Gyakorlófeladatok a lineáris leképezésekhez és a komplex számokhoz

1. Melyik leképezés lineáris az alábbiak közül?
   a.) $f(x) = 3x$ b.) $f(x) = 3x + 5$ c.) $f(x) = 3$ d.) $f(x) = 0$ e.) $f(x) = x^2$
   f.) $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ g.) $f(x_1, x_2) = (5x_2, x_1)$ h.) $f(x_1, x_3) = (x_1 x_2, x_1 x_2^2)$
   i.) $f(x_1, x_2) = 5$

2. Írjuk fel a mátrixát annak az $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineáris leképezésnek, amely
   a.) az $(1, 2)$ vektorhoz a $(3, 8)$ vektort, a $(3, 1)$-hez pedig a $(4, 14)$-et rendeli;
   b.) az $(1, 0)$-hoz a $(3, 2)$-t, a $(0, 1)$-hez az $(1, 8)$-at rendeli.

3. Határozzuk meg az
   $$A = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$
   mátrix sajátértékeit és sajátvektorait!

4. Írjuk fel trigonometrikus alakban a $z_1 = -1 - i, z_2 = -3i, z_3 = -1$ komplex számokat! Ábrázoljuk is ezeket a komplex számsíkon.

5. Írjuk át algebrai alakba a $z = \frac{1}{2}(\cos 300^o + i \sin 300^o)$ komplex számot!

6. Adottak a $z_1 = -\sqrt{3} - i$ és $z_2 = 1 - i$ komplex számok. Számítsuk ki az alábbiakat:
   $$|z_1| = ?, \quad \mathrm{Re}(z_1) = ? \quad \mathrm{Im}(z_2) = ?, \quad z_1 + \overline{z}_2 = ?, \quad z_1 \overline{z}_2 = ?$$

7. Végezzük el a kijelölt műveleteket:
   $$(\overline{2 - i})^4 = ?, \quad \overline{\left(\frac{3 - i}{2 + 2i}\right)} = ?$$

8. Végezzük el a számításokat trigonometrikus alakban, és ha lehet, írjuk fel a végeredményt algebrai alakban is:
   $$a.)\ (2(\cos 15^o + i \sin 15^o)) \cdot (4(\cos 105^o + i \sin 105^o)) = ?, \qquad b.)\ \frac{4}{\cos 210^o + i \sin 210^o} = ?$$
   $$c.)\ (2(\cos 40^o + i \sin 40^o))^9 = ?, \quad d.)\ \sqrt[4]{16(\cos 240^o + i \sin 240^o)} = ?$$

9. Oldjuk meg a komplex számok halmazán a $z^2 + 4z + 5 = 0$ egyenletet!

Megoldások:

1. a.), d.) és g.)

2. Azon $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ mátrixot keressük, amellyel a megadott két vektort szorozva a megfelelő eredményvektorokat kapjuk. A két mátrixszorzást elvégezve lineáris egyenletrendszert kapunk az $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ számokra. Ennek megoldásából:

   a.) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad b.)$ $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$

   Vegyük észre, hogy a b.) esetben a descartes-i egységvektorok képei kerültek a mátrix oszlopaiba.

3. $\lambda_1 = 5$, hozzá a sajátvektorok a $(p, p), p \in \mathbb{C}$ vektorok; $\lambda_2 = 3$, hozzá a sajátvektorok a $(q, 2q), q \in \mathbb{C}$ vektorok.

4. A z_1 számnak a síkon a $(-1, -1)$ pont felel meg. Abszolút értéke $r_1 = \sqrt{2}$, irányszöge $\phi_1 = 225^o$. Ezzel $z_1 = \sqrt{2}(\cos 225^o + i \sin 225^o)$. Hasonlóan, $z_2 = 3(\cos 270^o + i \sin 270^o)$, $z_3 = \cos 180^o + i \sin 180^o$.

5. $z = \frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}$

6. $2, \ -\sqrt{3}, \ -1, \ -\sqrt{3}+1, \ \ 1-\sqrt{3}+i(-1-\sqrt{3})$

7. $-7+24i, \ \ \frac{1}{2}+i$

8. a.) $8(\cos 120^o + i \sin 120^o) = -4 + 4\sqrt{3}i$,
   b.) $4(\cos 150^o + i \sin 150^o) = -2\sqrt{3} + 2i$,
   c.) $512(\cos 360^o + i \sin 360^o) = 512$,
   d.) 4 db negyedik gyök van: $2(\cos(\frac{240^o+2k\pi}{4}) + i \sin(\frac{240^o+2k\pi}{4}), \ k = 0, 1, 2, 3$, azaz $z_1 = 2(\cos 60^o + i \sin 60^o) = 1 + \sqrt{3}i$, $z_2 = 2(\cos 150^o + i \sin 150^o) = -\sqrt{3} + i$, $z_3 = 2(\cos 240^o + i \sin 240^o) = -1 - \sqrt{3}i$, $z_4 = 2(\cos 330^o + i \sin 330^o) = \sqrt{3} - i$.

9. $z_{1,2} = -2 \pm i$.