Gyakorlópéldák vektoranalízisből

1. Írjuk fel az $\underline{f}(t) = (t+1, \frac{t^2}{2}+3t, 5)$ görbe $t_0 = 1$ pontbeli érintőjének irányvektoros egyenletét!

2. Írjuk fel az $f(x,y) = x^4 - 6xy$ felület $\underline{a} = (1,3)$ pontbeli érintősíkjának az egyenletét!

3. Merre gurul az $f(x,y) = 3x^2 - 2y^2$ függvénnyel megadott felület $(1,1,1)$ pontjába helyezett labda?

4. Határozzuk meg a $\underline{v}(x,y,z) = (x^2y, y^2z, z^2x)$ vektormező divergenciáját és rotációját!

5. Határozzuk meg a $\underline{v}(\underline{r}) = y\underline{i} - x\underline{j}$ vektormező rotációját!

6. Adjuk meg az $u(x,y,z) = 4\ln(x^2+3) - 8xyz$ skalármező gradiensét!

7. Jelölje r a $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ hosszúságot. Számítsuk a grad r^n kifejezés értékét!

8. Legyen $\underline{a} = 2xz\underline{i} - y\underline{j} + z\underline{k}$. Számítsuk ki div $\underline{a}$ és rot $\underline{a}$ értékét!

9. Mivel egyenlő a div $(a\underline{r})$ értéke, ha
   a.) a konstans;
   b.) $a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tetszőleges differenciálható skalármező?

10. Paraméterezzük
    a.) annak a hengernek a felső lapját, amelynek alapja az origó középpontú 3 sugarú kör, magassága pedig 10;
    b.) azt a téglalapot, amelynek csúcsai $(-1,-1,0)$, $(-1,2,0)$, $(1,2,0)$ és $(1,-1,0)$.

11. Legyen $\underline{v}(\underline{r}) = \underline{k} \times \underline{r}$, és jelölje L a 0 középpontú, xy-síkbeli egységsugarú körvonalat, pozitív irányítással. Számítsuk ki az $\int_L \underline{v}\mathrm{d}\underline{r}$ vonalintegrált!

12. Számítsuk ki a következő többszörös integrált:
$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \left(\int_0^{\pi} (\sin x + \cos y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

13. Számítsuk ki a $\underline{v}(\underline{r}) = \underline{r}$ vektormező felületi integrálját a 0 középpontú egységsugarú G gömbfelületre.

Megoldások:

1. $\underline{r}(t) = (2, \frac{7}{2}, 5) + t \cdot (1,4,0),\ t \in \mathbb{R}$

2. $z = -14x - 6y + 15$

3. A (-3,2) vektor irányába.

4. $2xy + 2yz + 2xz$, $(-y^2, -z^2, -x^2)$

5. -2$\underline{k}$

6. $(\frac{8x}{x^2+3} - 8yz, -8xz, -8xy)$

7. $nr^{n-2} \cdot \underline{r}$

8. div $\underline{a}(x, y, z) = 2z$, rot $\underline{a}(x, y, z) = (0, 2x, 0)$

9. a.) $3a$
   b.) $3a + \underline{r} \cdot \text{grad } a$

10. a.) $\underline{A}(r, \phi) = (r \cos \phi, r \sin \phi, 10)$ b.) $\underline{A}(a, b) = (a, b, 0)$.

11. A jobbkézszabály szerint a $\underline{k} \times \underline{r}$ vektor az L görbe minden pontjában érintőirányú, és nagysága 1, ezért $\int_L \underline{v} \mathrm{d}\underline{r} = 1 \cdot K_{\text{kör}} = 2\pi$.

12. 2π

13. A felület paraméterezése

$$\underline{A}(\phi, \vartheta) = (\sin \vartheta \cos \phi, \sin \vartheta \sin \phi, \cos \vartheta), \quad \phi \in [0, 2\pi], \vartheta \in [0, \pi].$$

Kiszámítandó az

$$\int_G \underline{v} \mathrm{d}\underline{F} = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \underline{v}(\underline{A}(\phi, \vartheta)) \cdot \left(\frac{\partial \underline{A}}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \underline{A}}{\partial \phi} \right) \mathrm{d}\vartheta \right) \mathrm{d}\phi$$

integrál. Itt

$$\frac{\partial \underline{A}}{\partial \vartheta} = (\cos \vartheta \cos \phi, \cos \vartheta \sin \phi, -\sin \vartheta)$$

és

$$\frac{\partial \underline{A}}{\partial \phi} = (-\sin \vartheta \sin \phi, \sin \vartheta \cos \phi, 0),$$

amelyek vektoriális szorzata akkor mutat kifelé a felületből, ha $\frac{\partial \underline{A}}{\partial \vartheta}$ áll elöl. Számítsuk ki az integrandust:

$$\underline{v}(\underline{A}(\phi, \vartheta)) \cdot \left(\frac{\partial \underline{A}}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \underline{A}}{\partial \phi} \right) = \begin{vmatrix} \sin \vartheta \cos \phi & \sin \vartheta \sin \phi & \cos \vartheta \\ \cos \vartheta \cos \phi & \cos \vartheta \sin \phi & -\sin \vartheta \\ -\sin \vartheta \sin \phi & \sin \vartheta \cos \phi & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \sin^3 \vartheta \sin^2 \phi + \cos^2 \vartheta \sin \vartheta \cos^2 \phi + \sin^3 \vartheta \cos^2 \phi + \cos^2 \vartheta \sin \vartheta \sin^2 \phi =$$

$$= sin^3 \vartheta + \cos^2 \vartheta \sin \vartheta = \sin \vartheta (\sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta) = \sin \vartheta.$$

Tehát

$$\int_G \underline{v} \mathrm{d}\underline{F} = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \sin \vartheta \mathrm{d}\vartheta \right) \mathrm{d}\phi = \int_0^{2\pi} 2 \mathrm{d}\phi = 4\pi.$$