1. gyakorlat
Geometriai vektorok

Geometriai vektor:

- irányított egyenesszakasz (a síkon/a térben)
- eltolás-invariáns $\Rightarrow$ elég egy rögzített pontból kiinduló vektorokkal foglalkozni
- nullvektor fogalma

Jel.: $\mathcal{E}_2$: a sík összes vektorának halmaza, $\mathcal{E}_3$: a tér összes vektorának halmaza

Két fontos jellemző: irány, hosszúság

Műveletek
Összeadás: paralelogramma-szabállyal
Skalárral való szorzás
A két műveletre igaz a következő hét tulajdonság:

1. $\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a} \qquad \forall \underline{a}, \underline{b} \in \mathcal{E}_2(\mathcal{E}_3)$ (az összeadás kommutatív)
2. $(\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c} = \underline{a} + (\underline{b} + \underline{c}) \qquad \forall \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in \mathcal{E}_2(\mathcal{E}_3)$ (az összeadás asszociatív)
3. A nullvektor egy olyan vektor, amely azzal a tulajdonsággal rendelkezik, hogy bármely $\underline{a}$ vektorhoz adva $\underline{a}$-t kapjuk.
4. Minden $\underline{a}$ vektorhoz létezik negatív elem, azaz olyan vektor, amelyet $\underline{a}$-hoz adva a nullvektort kapjuk: ez az $\underline{a}$-val ellentétes irányú, vele megegyező hosszúságú vektor. Ezt a vektort jelölje $-\underline{a}$.
5. Vektorok összegét tagonként szorozhatjuk:
$\lambda \cdot (\underline{a} + \underline{b}) = \lambda \cdot \underline{a} + \lambda \cdot \underline{b} \qquad \forall \underline{a}, \underline{b} \in \mathcal{E}_2(\mathcal{E}_3)$ és $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ (vektordisztributivitás)
6. Két valós szám összegével tagonként szorozhatunk bármely vektort:
$(\lambda + \mu) \cdot \underline{a} = \lambda \cdot \underline{a} + \mu \cdot \underline{a} \qquad \forall \underline{a} \in \mathcal{E}_2(\mathcal{E}_3)$ és $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (skalárdisztributivitás)
7. Két valós számmal tetszőleges sorrendben szorozhatunk:
$\lambda \cdot (\mu \cdot \underline{a}) = \mu \cdot (\lambda \cdot \underline{a}) = (\lambda\mu) \cdot \underline{a} \qquad \forall \underline{a} \in \mathcal{E}_2(\mathcal{E}_3)$ és $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (skalárasszociativitás)

Megjegyzés: Értelmezhető a kivonás: $\underline{a} - \underline{b} := \underline{a} + (-\underline{b})$ és a skalárral való osztás (ha $\lambda \neq 0$): $\frac{\underline{a}}{\lambda} := \frac{1}{\lambda} \cdot \underline{a}$
DE: Nincs vektoroknak egymással való szorzása, osztása!

Feladat. Legyen $\underline{a} \neq \underline{0}$. Milyen hosszú az $\frac{\underline{a}}{|\underline{a}|}$ vektor?
Megoldás: $\frac{\underline{a}}{|\underline{a}|} = |\frac{1}{|\underline{a}|} \cdot \underline{a}| = |\frac{1}{|\underline{a}|}| \cdot |\underline{a}| = \frac{1}{|\underline{a}|} \cdot |\underline{a}| = 1$

Lineáris kombináció

$\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n$ vektorok lineáris kombinációja: $\alpha_1 \cdot \underline{a}_1 + \alpha_2 \cdot \underline{a}_2 + \ldots + \alpha_n \cdot \underline{a}_n \quad \alpha_i \in \mathbb{R}$
Megjegyzés: egy darab $\underline{a}$ vektor lineáris kombinációi az $\alpha \cdot \underline{a}$ szorzatok.

Pl. egy $\underline{a}$ és egy $\underline{b}$ vektornak lineáris kombinációi: $2\underline{a} + 0\underline{b}$, $\frac{3}{4}\underline{a} + 10\underline{b}$, $-\underline{a} - 2\underline{b}$ stb.
Hány lineáris kombinációt lehet gyártani? Végtelen sokat.
Mi lesz a lineáris kombináció, ha mindkét vektort 0-val szorozzuk? $0\underline{a} + 0\underline{b} = \underline{0}$ (ún. triviális lineáris kombináció)

Lineáris összefüggőség

Fontos kérdés: Adott $\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n\}$ vektorhalmaz (vektorrendszer) elemeiből hogyan kaphatjuk meg lineáris kombinációval a nullvektort?
- Ha csak csupa nulla együtthatókkal, akkor azt mondjuk, hogy $\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n\}$ lineárisan független rendszer
- Ha nem csak csupa nulla együtthatókkal: $\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n\}$ lineárisan összefüggő rendszer.

Feladat. Lineárisan összefüggő-e az $\{\underline{a}, \underline{0}\}$ vektorrendszer, ahol $\underline{a} \in \mathcal{E}_2, \underline{a} \neq \underline{0}$ tetszőleges?
Megoldás: Milyen együtthatókkal állhat fenn: $\alpha_1\underline{a} + \alpha_2\underline{0} = \underline{0}$? Ha $\alpha_1 = 0$, akkor α_2 tetszőlegesen megválasztható $\Rightarrow$ a rendszer lineárisan összefüggő.
(Minden olyan vektorrendszer lineárisan összefüggő, amelyben benne van a nullvektor.)

Belátható:
- Két nemnulla vektor lin. összefüggő $\Leftrightarrow$ kollineárisak
- Három nemnulla vektor lin. összefüggő $\Leftrightarrow$ komplanárisak.

$\Rightarrow$ A síkon az $\{\underline{i}, \underline{j}\}$, a térben az $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ descartesi egységvektor-rendszerek lineárisan függetlenek.

Feladatok. Lineárisan összefüggőek-e?

1. $\{\underline{i},\ \underline{i} + \underline{j},\ \underline{i} + \underline{j} + \underline{k}\} \subset \mathcal{E}_3$

Megoldás: Azt kell megvizsgálnunk, hogy milyen együtthatókkal teljesülhet az

$$\alpha\underline{i} + \beta(\underline{i} + \underline{j}) + \gamma(\underline{i} + \underline{j} + \underline{k}) = \underline{0}$$

egyenlőség. Rendezzük át az egyenletet úgy, hogy a bal oldalon az $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ vektorok lineáris kombinációja álljon:

$$(\alpha + \beta + \gamma)\underline{i} + (\beta + \gamma)\underline{j} + \gamma\underline{k} = \underline{0}$$

Mivel az $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ vektorrendszer lineárisan független, ez az egyenlőség csak úgy állhat fenn, ha mindegyik vektor együtthatója nulla, azaz

$$\alpha + \beta + \gamma = 0, \quad \beta + \gamma = 0, \quad \gamma = 0.$$

Ezzel egy háromismeretlenes egyenletrendszert kaptunk az α, β, γ számokra, amelynek egyedüli megoldása: $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0$. Tehát az eredeti három vektor is lineárisan független.

2. $\{\underline{i} - \underline{j},\ \underline{j} - \underline{k},\ \underline{k} - \underline{i}\} \subset \mathcal{E}_3$
   Megoldás: Számolás nélkül is látszik, hogy ezeknek a vektoroknak az összege $\underline{0}$, azaz

$$1 \cdot (\underline{i} - \underline{j}) + 1 \cdot (\underline{j} - \underline{k}) + 1 \cdot (\underline{k} - \underline{i}) = \underline{0}.$$

   Ez egy nemtriviális lineáris kombináció, amely a nullvektort adja, így a vektorok lineárisan összefüggőek.

Vektortér

Vegyük észre, hogy $\mathcal{E}_2$-re igaz a következő két tulajdonság:
1. ha $\underline{a} \in \mathcal{E}_2$ és $\underline{b} \in \mathcal{E}_2$, akkor $\underline{a} + \underline{b} \in \mathcal{E}_2$
2. ha $\underline{a} \in \mathcal{E}_2$, akkor minden λ valós számra $\lambda \cdot \underline{a} \in \mathcal{E}_2$

Ugyanezek igazak $\mathcal{E}_3$-ra is. Igazak-e a következő halmazokra is?

a.) $H_1 := \{\underline{i},\ \underline{j}\} \subset \mathcal{E}_2$
Nem, ugyanis pl. $\underline{i} + \underline{j}$ nincs benne H_1-ben.

b.) $H_2 := \{\underline{v} \in \mathcal{E}_2 : \underline{v} \parallel \underline{u},\ \underline{u} \in \mathcal{E}_2 \text{ rögzített}\}$
Legyen $\underline{v}_1$ és $\underline{v}_2$ két tetszőleges vektor a H_2-ben. Ekkor $\underline{v}_1 \parallel \underline{u}$ és $\underline{v}_2 \parallel \underline{u}$. Egy egyenesbe eső vektorok összege is ugyanabban az egyenesben van. Így

$$\underline{v}_1 + \underline{v}_2 \parallel \underline{u}, \text{ azaz } \underline{v}_1 + \underline{v}_2 \in H_2.$$

Legyen továbbá $\lambda \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ekkor $\lambda \cdot \underline{v} \parallel \underline{v}$ és $\underline{v} \parallel \underline{u}$ (hiszen $\underline{v} \in H_2$), következésképpen $\lambda \cdot \underline{v} \parallel \underline{u}$, azaz $\lambda \cdot \underline{v} \in H_2$. Tehát a H_2 halmazra már igaz 1. és 2.

Ha egy V vektorhalmazra igaz 1. és 2., akkor vektortérnek nevezzük.
Azt mondjuk, hogy a vektortér dimenziója n, ha található benne n darab vektorból álló lineárisan független rendszer, n+1 darabból álló azonban már nem.

Pl. $\dim\mathcal{E}_2 = 2$, ugyanis a síkon két nem egy egyenesbe eső vektor független rendszert alkot, három egy síkba eső vektor azonban már összefüggő. Hasonlóan belátható: $\dim H_2 = 1, \dim\mathcal{E}_3 = 3$.

Kérdés: Tudunk-e egy vektortérben olyan elemeket találni, amelyek lineáris kombinációi kiadják a teljes vektorteret? Az ilyen elemek halmazát a vektortér generálórendszerének nevezzük.

Feladatok. A megadott V vektortereknek generálórendszerei-e az alábbi U halmazok?
$V = H_2$
a.) $U = \{\underline{a}\}$, ahol $\underline{a} \in H_2$, $\underline{a} \neq \underline{0}$ tetsz. igen
b.) $U = \{\underline{a}, \underline{b}\}$, ahol $\underline{a}, \underline{b} \in H_2$ tetsz. igen
$V = \mathcal{E}_2$
a.) $U = \{\underline{a}\}$, ahol $\underline{a} \in \mathcal{E}_2$, $\underline{a} \neq \underline{0}$ tetsz. nem
b.) $U = \{\underline{a}, \underline{b}\}$, ahol $\underline{a}, \underline{b} \in \mathcal{E}_2$, $\underline{a} \nparallel \underline{b}$ igen
c.) $U = \{\underline{a}, \underline{b}\}$, ahol $\underline{a}, \underline{b} \in \mathcal{E}_2$, $\underline{a} \parallel \underline{b}$ nem
d.) $U = \{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\}$, ahol $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in \mathcal{E}_2$, és $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ páronként hegyesszöget zár be igen

Látszik: sokféle generálórendszer megadható. De ezek különbözhetnek abban, hogy belőlük hogyan állíthatók elő a vektortér elemei! Hasonlítsuk össze az 1./a.) és b.) példát. Hogyan állítható elő pl. a $\underline{c} = 2\underline{a}$ vektor az a.) és a b.) generálórendszer segítségével?
a.) $\underline{c} = 2\underline{a}$ az egyetlen előállítás
b.) Legyen $\underline{b} = -\underline{a}$. Ekkor végtelen sok lehetőség van:

$$\underline{c} = 2\underline{a} + 0\underline{b} = 3\underline{a} + 1\underline{b} = 4\underline{a} + 2\underline{b} \text{ stb.}$$

Előnyös, ha az előállítás egyértelmű. Ezért vezetjük be a köv. definíciót: Egy generálórendszert bázisnak nevezünk, ha lineárisan független. (Belátható: annyi eleme van, amennyi a vektortér dimenziója.) A bázis elemeiből a vektortér minden eleme egyértelműen állítható elő. Ennek szemléltetésére tekintsünk még egy példát:

Legyen V az $\mathcal{E}_2$ vektortér. Tekintsük azt az $\underline{a}$ vektort, amely az első síknegyedben van, és az x és y-tengelyre eső vetülete 3 ill. 2 hosszúságú. Az $\mathcal{E}_2$-ben az $\{\underline{i}, \underline{j}\}$ halmaz bázis. Világos, hogy $\underline{a}$ előáll $3\underline{i} + 2\underline{j}$ alakban. Gondoljuk meg, hogy miért nem lehet más előállítás! Tegyük fel, hogy az $\underline{a}$ az $\alpha_1\underline{i} + \alpha_2\underline{j}$ alakban is felírható, ahol $\alpha_1 \neq 3$ és $\alpha_2 \neq 2$. Ekkor egyszerre fennállna a következő két egyenlőség:

$$\underline{a} = 3\underline{i} + 2\underline{j},$$
$$\underline{a} = \alpha_1\underline{i} + \alpha_2\underline{j}$$

Vonjuk ki az első egyenletből a másodikat:

$$\underline{0} = (3 - \alpha_1)\underline{i} + (2 - \alpha_2)\underline{j}.$$

A jobb oldalon az $\underline{i}$ és a $\underline{j}$ vektorok lineáris kombinációja van. Mivel $\underline{i}$ és $\underline{j}$ lineárisan független rendszert alkot, ezért lineáris kombinációjuk csak akkor adhatja a nullvektort, ha mindkét vektor együtthatója nulla, azaz

$$3 - \alpha_1 = 0 \quad \text{és} \quad 2 - \alpha_2 = 0.$$

Ez viszont azt jelenti, hogy $\alpha_1 = 3$ és $\alpha_2 = 2$, azaz ellentmondásba kerültünk azzal a feltevéssel, hogy $\alpha_1 \neq 3$ és $\alpha_2 \neq 2$. Így tehát nincs más előállítás. A fentiekből látható, hogy ez a tény a báziselemek lineáris függetlenségének a következménye.
Általában is alkalmazható a fenti gondolatmenet, és így könnyen belátható, hogy ha $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2\}$ bázis $\mathcal{E}_2$-ben, akkor bármely $\underline{v} \in \mathcal{E}_2$ vektor egyértelműen állítható elő $\underline{b}_1$ és $\underline{b}_2$ lineáris kombinációjaként. (Az $\mathcal{E}_2$-ben leggyakrabban a fenti $\{\underline{i}, \underline{j}\}$ bázist használjuk, de végtelen sok bázis létezik.)

Miért jó az egyértelmű előállítás? Mivel minden egyes $\underline{v} \in \mathcal{E}_2$ vektort csak egyféleképpen lehet az $\alpha_1\underline{b}_1 + \alpha_2\underline{b}_2$ alakban felírni, ezért a $\underline{v}$ vektort egyértelműen azonosítja az α_1 és α_2 szám. Mivel nem mindegy, hogy ezek közül melyik a $\underline{b}_1$, és melyik a $\underline{b}_2$ együtthatója, ezért a két számot rendezett számpárként ($\mathbb{R}^2$-beli elem) adjuk meg: mindig előre írjuk az első báziselem ($\underline{b}_1$) és hátra a második báziselem ($\underline{b}_2$) szorzóját. Így pl. az $\underline{a} = 3\underline{i} + 2\underline{j}$ vektort egyértelműen megadhatjuk a $(3, 2)$ számpárral. Az α_1 és α_2 számot a vektornak az adott bázisra vonatkozó **koordinátá**inak, az $\alpha_1\underline{b}_1$ és $\alpha_2\underline{b}_2$ vektorokat pedig a vektor **komponens**einek (vektorösszetevőinek) nevezzük. A koordináták és a komponensek függnek a bázistól, de adott bázisban egyértelműek.
Tekintsük pl. az $\underline{a} = 3\underline{i} + 2\underline{j}$ vektort az $\{\underline{i}, \underline{b}\}$ bázisban, ahol legyen most $\underline{b} = -\underline{j}$. Ekkor $\underline{a} = 3\underline{i} - 2\underline{b}$, azaz az $\underline{a}$ vektorhoz ebben a bázisban a $(3, -2)$ számpárt rendeljük hozzá.