10. gyakorlat
Mátrixok sajátértékei és sajátvektorai

Azt mondjuk, hogy az $A \in M_n$ mátrixnak a $\lambda \in \mathbb{R}$ szám a sajátértéke, ha létezik olyan $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{x} \neq \underline{0}$ vektor, amelyre $A\underline{x} = \lambda\underline{x}$. Ekkor az $\underline{x}$ vektort az A mátrix λ számhoz tartozó sajátvektorának nevezzük.
Megjegyezzük, hogy a sajátérték komplex szám is lehet, és a sajátvektorok is lehetnek komplex elemű vektorok. Ebben a fejezetben azonban mi csak valós sajátértékekkel fogunk foglalkozni, és mindig csak valós elemű sajátvektorokat keresünk.

Pl. 1. Az

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrix minden vektort a kétszeresére nyújt. Azaz A-nak sajátértéke a 2, és sajátvektora minden $\mathbb{R}^2$-beli nemnulla vektor.
2. Határozzuk meg az

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix sajátértékeit és sajátvektorait!
Megoldás: λ sajátérték $\Leftrightarrow$ létezik $\underline{x} \neq \underline{0}$, amelyre $A\underline{x} = \lambda\underline{x}$.
Az $A\underline{x} = \lambda\underline{x}$ egyenlet másképpen úgy is írható: $A\underline{x} - \lambda\underline{x} = \underline{0}$. A bal oldalon $\underline{x}$ kiemelhető a következőképpen:

$$(A - \lambda I)\underline{x} = \underline{0},$$

ahol I jelöli a 2×2-es identitásmátrixot. Ez az egyenlet egy homogén (azaz $\underline{0}$ jobb oldalú) lineáris egyenletrendszert jelent az $\underline{x}$ sajátvektorra.
Összegezve: a λ szám pontosan akkor sajátértéke az A mátrixnak, ha az $(A - \lambda I)\underline{x} = \underline{0}$ homogén lineáris egyenletrendszernek létezik $\underline{x} \neq \underline{0}$ megoldása.

Megj.:

- A Kronecker–Capelli-tételből következik, hogy egy $B\underline{x} = \underline{0}$ homogén lineáris egyenletrendszernek mindig van megoldása.
- Világos, hogy mindig megoldása az $\underline{x} = \underline{0}$ (triviális megoldás).
- Ha $|B| \neq 0$, akkor a megoldás egyértelmű (azaz csak a triviális megoldás van).
- Ha $|B| = 0$, akkor végtelen sok megoldás van (azaz csak ekkor van nemtriviális megoldás).

Bennünket az utolsó eset érdekel: az $(A - \lambda I)\underline{x} = \underline{0}$ egyenletrendszernek pontosan akkor van $\underline{x} \neq \underline{0}$ megoldása, amikor $|A - \lambda I| = 0$. A kérdés tehát az, hogy milyen λ esetén lesz $|A - \lambda I| = 0$.
A példában

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7-\lambda & -2 \\ 4 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

Ennek determinánsa:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (7-\lambda)(1-\lambda) + 8 = \lambda^2 - 8\lambda + 15.$$

Azt keressük, hogy ez milyen λ értékekre 0, azaz meg kell oldani a

$$\lambda^2 - 8\lambda + 15 = 0$$

másodfokú egyenletet. A megoldóképletből:

$$\lambda_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64-60}}{2} \Rightarrow \lambda_1 = 5,\ \ \lambda_2 = 3.$$

Ezek tehát a keresett sajátértékek. Most rátérünk a hozzájuk tartozó sajátvektorok meghatározására.
A $\lambda_1 = 5$-höz tartozó sajátvektorok meghatározása: $\underline{u}$ sajátvektor, ha $A\underline{u} = \lambda_1\underline{u}$, azaz $(A - \lambda_1 I)\underline{u} = \underline{0}$. Ez egy homogén lineáris egyenletrendszer, amelyben keressük az ismeretlen $\underline{u}$ vektor u_1 és u_2 elemét. A megoldandó egyenletrendszer tehát:

$$\begin{aligned} 2u_1 - 2u_2 &= 0 \\ 4u_1 - 4u_2 &= 0 \end{aligned}$$

A második egyenlet nem független az elsőtől. (Ennek így is kell lennie, mert végtelen sok megoldást kell kapnunk.) Minden olyan nemnulla (u_1, u_2) számpár megoldás, amely kielégíti az első egyenletet, azaz amelyre $u_1 = u_2$. Így az összes megoldás

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} p \\ p \end{bmatrix}, \quad p \in \mathbb{R},\ p \neq 0 \text{ tetszőleges.}$$

Ezzel megadtuk a $\lambda_1 = 5$-höz tartozó sajátvektorokat. Ellenőrzésképpen:

$$\begin{bmatrix} 7-\lambda & -2 \\ 4 & 1-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5p \\ 5p \end{bmatrix},$$

azaz az A mátrix valóban 5-szörösére nyújtja a (p, p) alakú vektorokat.
Hasonlóan számíthatók ki a $\lambda_2 = 3$-hoz tartozó $\underline{v}$ sajátvektorok. A megoldás:

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} q \\ 2q \end{bmatrix}, \quad q \in \mathbb{R},\ q \neq 0 \text{ tetszőleges.}$$

Vegyük észre, hogy a sajátvektorról kikötöttük, hogy az nem lehet a nullvektor, de a sajátérték lehet nulla: nevezetesen, ha $|A| = 0$ (hiszen ekkor $A - \lambda I = A$).

A továbbiakban jelölje $\sigma(A)$ az A mátrix sajátértékeinek a halmazát.

Egyes speciális mátrixok sajátértékeit könnyű meghatározni. Pl. legyen $D \in M_n$ diagonális mátrix, a főátlóban a $d_1, d_2, \ldots, d_n$ számokkal:

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & d_n \end{bmatrix}$$

A D mátrix jelölése röviden: $\operatorname{diag}[d_1, d_2, \ldots, d_n]$. Számítsuk ki a sajátértékeit!
Egy λ szám pontosan akkor sajátértéke D-nek, ha $|D - \lambda I| = 0$. A $D - \lambda I$ mátrix a következő diagonálmátrix lesz:

$$D = \begin{bmatrix} d_1 - \lambda & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_2 - \lambda & 0 & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & d_n - \lambda \end{bmatrix}$$

Ismeretes, hogy egy diagonális mátrix determinánsa a főátlóban lévő elemek szorzata, azaz $|D - \lambda I| = (d_1 - \lambda)(d_2 - \lambda) \cdots (d_n - \lambda)$. Ez a szorzat pedig λ következő értékeire lesz nulla: $\lambda_1 = d_1$, $\lambda_2 = d_2 \ldots, \lambda_n = d_n$. Azaz D sajátértékei a főátlóban lévő számok: $\sigma(D) = \{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$.
Mik lesznek a hozzájuk tartozó sajátvektorok, ha nincs két egyforma elem a főátlóban?
A $\lambda_1 = d_1$ sajátértékhez tartozó sajátvektor olyan nemnulla $\underline{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ vektor,

amelyre $D\underline{u} = d_1\underline{u}$. Ez a következő egyenletrendszert jelenti:

$$\begin{aligned} d_1u_1 &= d_1u_1 \\ d_2u_2 &= d_1u_2 \\ &\vdots \\ d_nu_n &= d_1u_n \end{aligned}$$

Ez n darab független egyenlet a sajátvektor elemeire. Az első egyenletnek minden $u_1 \in \mathbb{R}$ szám eleget tesz. A többi egyenlet megoldása: $u_2 = 0$, $u_3 = 0, \ldots, u_n = 0$. Azaz: $u_1 = p \in \mathbb{R}$ tetszőleges, $u_i = 0$, $i = 2, 3, \ldots, n$. Így a d_1 sajátértékhez tartozó sajátvektor pl. az $(1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ vektor.
Hasonlóan, a λ_i sajátértékhez tartozó sajátvektorok azok a vektorok, amelyek i-edik eleme tetszőleges, és a többi elemük nulla.

Megjegyezzük, hogy a háromszögmátrixokra is igaz, hogy sajátértékeik a főátlóban lévő elemek.

Feladat. Tegyük fel, hogy $\lambda \in \sigma(A)$. Mutassuk meg, hogy ekkor $\lambda^2 \in \sigma(A^2)$!
Megoldás: Legyen $\underline{x}$ egy λ-hoz tartozó sajátvektora az A-nak. Ekkor

$$A^2\underline{x} = A(A\underline{x}) = A(\lambda\underline{x}) = \lambda \cdot A\underline{x} = \lambda^2\underline{x}.$$

Mivel $\underline{x} \neq 0$ (hiszen sajátvektora A-nak), ezért ez pontosan azt jelenti, hogy λ^2 sajátértéke A^2-nek.

Mátrixok spektrálfelbontása

Megmutatható, hogy ha az $A \in M_n$ mátrixnak van n darab különböző sajátértéke, akkor A felírható

$$A = X \cdot \mathrm{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n] \cdot X^{-1}$$

alakban, ahol X oszlopaiban sorra az A mátrix $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sajátértékeihez tartozó sajátvektorai vannak. Az A mátrix ilyen alakú felírását spektrálfelbontásnak nevezzük.

Pl. Adjuk meg a már látott

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix spektrálfelbontását, ha lehet.
Megoldás: Láttuk, hogy A-nak van két különböző sajátértéke: $\lambda_1 = 5$ és $\lambda_2 = 3$. $\Rightarrow$ A-nak

létezik spektrálfelbontása. Mindkét sajátértékhez keressünk egy-egy sajátvektort!
1. $\lambda_1 = 5$-höz: Láttuk, hogy minden (p, p), $p \neq 0$ vektor sajátvektor. Legyen pl. $\underline{u} := (1, 1)$. (Bármelyik sajátvektort választhatjuk.)
2. $\lambda_2 = 3$-hoz: Láttuk, hogy minden $(q, 2q)$ vektor sajátvektor. Legyen pl. $\underline{v} := (1, 2)$.
Ezzel a keresett X mátrix:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Számítsuk ki X inverzét Gauss–Jordan-eliminációval:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow^{(2.)-(1.)} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow^{(1.)-(2.)} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Az X inverze tehát:

$$X^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ezzel A spektrálfelbontása:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

A spektrálfelbontás ismeretében egyszerű pl. az invertálás: az

$$A = X \cdot \mathrm{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n] \cdot X^{-1}$$

mátrix inverze ugyanis

$$A = X \cdot \mathrm{diag}\left[\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \ldots, \frac{1}{\lambda_n}\right] \cdot X^{-1}.$$

Hasonlóan könnyen elvégezhető a hatványozás is:

$$A^n = X \cdot \mathrm{diag}\left[\lambda_1^n, \lambda_2^n, \ldots, \lambda_n^n\right] \cdot X^{-1}.$$

Négyzetes mátrixoknak nemcsak hatványát, hanem tetszőleges polinomiális függvényét is vehetjük. Ez azt jelenti, hogy a mátrixot behelyettesítjük a $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ függvénybe. Pl. ha a $p(x) = 2x^2 + 3x + 1$ polinomot vesszük az $A \in M_n$ helyen, akkor a $p(A) = 2A^2 + 3A + I$ mátrixot kapjuk. (Az 1-nek az $I \in M_n$ identitásmátrix felel meg.) Ekkor is jól használható a spektrálfelbontás:

$$p(A) = X \cdot \operatorname{diag}\left[p(\lambda_1), p(\lambda_2), \ldots, p(\lambda_n)\right] \cdot X^{-1}.$$