11. gyakorlat
Közönséges differenciálegyenletek

A közönséges differenciálegyenlet olyan egyenlet, amelyben információnk van egy valós függvény és annak deriváltja (vagy különböző rendű deriváltjai) közötti kapcsolatról. Az algebrai egyenletekkel szemben egy ilyen egyenlet megoldása nem szám, hanem (valamilyen intervallumon értelmezett) függvény lesz.

Pl. tegyük fel, hogy egy y függvényről azt tudjuk, hogy deriváltfüggvénye a $g(x) = x^3$ függvénynek és magának az y-nak az összege. Ezt a következő szimbólummal jelöljük:

$$y' = x^3 + y.$$

Általánosan egy elsőrendű közönséges differenciálegyenletet az

$$y' = f(x, y)$$

szimbólummal jelölünk, ahol f egy kétváltozós függvény. Az $y' = f(x, y)$ differenciálegyenlet megoldásának nevezzük az $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, ha egy intervallum minden x pontjában fennáll az

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

egyenlőség.

Példák. 1. Tekintsük az $y' = -y$ egyenletet. (Itt speciálisan a jobb oldal csak y-tól függ.) Megoldása-e ennek a differenciálegyenletnek az $y(x) = 3 \cdot e^{-x}$ függvény?
Helyettesítsük be az egyenletbe a megadott függvényt, és vizsgáljuk meg, hogy minden pontban egyenlő-e a két oldal:
Bal oldal: $y'(x) = -3 \cdot e^{-x}$.
Jobb oldal: $-y(x) = -3 \cdot e^{-x}$.
Jól látható, hogy a két kifejezés minden $x \in \mathbb{R}$ pontban egyenlő, ez a függvény tehát megoldása a differenciálegyenletnek.

2. Tekintsük a $-2y' + 4y = e^x - 1$ egyenletet. Megoldása-e az $y(x) = e^{2x}$ függvény?
Bal oldal: $-2y'(x) + 4y(x) = -4e^{2x} + 4e^{2x} = 0$.
Jobb oldal: $e^x - 1$.
A két kifejezés csak csak az $x = 0$ pontban egyenlő, a megadott függvény tehát nem megoldás.

Egy elsőrendű közönséges differenciálegyenletnek általában végtelen sok megoldása van.

A differenciálegyenlet összes megoldását **általános megoldás**nak nevezzük.
Pl.

1. Az $y' = 0$ egyenlet általános megoldása $y(x) = c$, ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans.

2. Az $y' = -y$ egyenlet általános megoldása:

$$y(x) = c \cdot e^{-x}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Feladat: Ábrázoljuk grafikusan a megoldásokat. A kapott görbéket integrálgörbéknek nevezzük.

A differenciálegyenlet egy adott megoldását **partikuláris megoldás**nak nevezzük. Pl. az előbbi differenciálegyenletnek egy partikuláris megoldása az $y(x) = 3 \cdot e^{-x}$ függvény.

Rendszerint egy közönséges differenciálegyenletnek nem az összes megoldását keressük, hanem azt, amelyik valamely adott x_0 pontban egy előírt értéket vesz fel, pl. amelyre $y(x_0) = a$. Az $y(x_0) = a$ feltételt **kezdeti feltétel**nek nevezzük. Ha az $y' = f(x, y)$ differenciálegyenlet megoldását az $y(x_0) = a$ feltétel mellett keressük, **kezdetiérték-feladat**ról vagy **Cauchy-feladat**ról beszélünk.

Pl. Oldjuk meg az

$$\begin{cases} y' = -y & (1) \\ y(3) = 2 & (2) \end{cases}$$

Cauchy-feladatot.
Az (1) differenciálegyenlet általános megoldása, ahogy már láttuk, $y(x) = c \cdot e^{-x}$, $c \in \mathbb{R}$.
Válasszuk ki ezen végtelen sok megoldás közül azt, amelyre $y(3) = 2$.

$$y(3) = c \cdot e^{-3} = 2 \Rightarrow c = 2 \cdot e^3.$$

Így (1)–(2) megoldása: $y(x) = 2 \cdot e^3 \cdot e^{-x} = 2e^{3-x}$.

A továbbiakban azzal foglalkozunk, hogy hogyan számítható ki egy közönséges differenciálegyenlet megoldása. Általános képlet nincs, különböző típusú differenciálegyenletek megoldására más-más módszerek léteznek.

1.) A legegyszerűbb típusú differenciálegyenletben a jobb oldal csak x függvénye, pl. $y' = x^2$. Ilyenkor azokat a függvényeket keressük, amelyeknek deriváltja a jobb oldalon álló függvény. A megoldások tehát f primitív függvényei lesznek, azaz az általános megoldás:

$$y(x) = \int f(x)\mathrm{d}x$$

Pl. oldjuk meg az $y' = 2\sin x$ egyenletet!
$y(x) = \int f(x)\mathrm{d}x = \int 2\sin x\mathrm{d}x = -2\cos x + c,\ \ c \in \mathbb{R}$.

2.) Szintén egyszerűen megoldhatók a szétválasztható típusú differenciálegyenletek. Ezekben az $f(x,y)$ jobb oldal egy csak x-től és egy csak y-tól függő függvény szorzata, azaz

$$y' = g(x) \cdot h(y).$$

Ekkor a megoldásokat az

$$\int \frac{1}{h(y)}\mathrm{d}y = \int g(x)\mathrm{d}x$$

képlet adja meg. Ezt a következőképpen tudjuk egyszerűen megjegyezni. Az egyenletben y'-t írjuk fel $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ alakban, majd formálisan szorozzunk át $\mathrm{d}x$-szel és osszunk át $h(y)$-nal:

$$\frac{\mathrm{d}y}{h(y)} = g(x)\mathrm{d}x.$$

Végül a kapott egyenlet mindkét oldala elé írjunk integráljelet.

Pl. oldjuk meg az

$$y' = -\frac{x^3}{(y+1)^2}$$

egyenletet!
Ez szétválasztható típusú: $g(x) = -x^3$, $h(y) = \frac{1}{(y+1)^2}$. Így a megoldásokat az

$$\int (y+1)^2\mathrm{d}y = \int -x^3\mathrm{d}x$$

képlet adja meg. A bal oldali határozatlan integrál kiszámítása:

$$\int (y+1)^2\mathrm{d}y = \frac{(y+1)^3}{3} + c_1,\ c_1 \in \mathbb{R} \text{ tetsz.}$$

A jobb oldali integrál:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int -x^3\mathrm{d}x = -\frac{x^4}{4} + c_2,\ c_2 \in \mathbb{R} \text{ tetsz.}$$

A kettő egyenlőségéből

$$\frac{(y+1)^3}{3} = -\frac{x^4}{4} + c_3,\ (c_3 \in \mathbb{R} \text{ tetsz.}) \Rightarrow y(x) = \sqrt[3]{-\frac{3}{4}x^4 + c} - 1,\ c \in \mathbb{R} \text{ tetsz.}$$

Szöveges feladatok:

1. Egy radioaktív anyag tömege kezdetben m_0. Határozzuk meg a tömeget az idő függvényében ($m(t) =?$), ha a bomlási sebesség arányos a tömeggel, és a felezési idő 1600 év.
Megoldás: A bomlási sebesség az m tömeg t idő szerinti deriváltja: $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$. Tudjuk, hogy ez arányos a tömeggel, azaz

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = k \cdot m,$$

ahol k jelöli az arányossági tényezőt (konstans). Ezt a differenciálegyenletet egészítsük ki az $m(0) = m_0$ kezdeti feltétellel, így a

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = k \cdot m & (1) \\ m(0) = m_0 & (2) \end{cases}$$

Cauchy-feladatot kapjuk. A differenciálegyenlet szétválasztható típusú, így összes megoldása az

$$\int \frac{1}{m}\mathrm{d}m = \int k\mathrm{d}t$$

képletből határozható meg:

$$\ln m = kt + c_1 \Rightarrow m(t) = c_2 e^{kt}.$$

A c_2 egyelőre tetszőleges konstans. Értékét a kezdeti feltételből határozhatjuk meg:

$$m(0) = c_2 = m_0$$

Így a megoldás $m(t) = m_0 \cdot e^{kt}$. A k arányossági tényezőt is ki tudjuk számítani a felezési időből:

$$m(1600) = \frac{m_0}{2} \Rightarrow m_0 \cdot e^{k \cdot 1600} = \frac{m_0}{2} \Rightarrow k = -\frac{\ln 2}{1600}.$$

Így a megoldás:

$$m(t) = m_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{1600}t}.$$

2. A testek hűlési sebessége arányos a test és a környezete közötti hőmérsékletkülönbséggel. Az előbbit jelölje T, az utóbbit T_k. Egy 100 ^oC-os testet 0 ^oC-os helyre viszünk, 20 perc múlva a test 50 ^oC-os. Hány fokra hűlt le 10 perc alatt?

Megoldás: A problémát leíró differenciálegyenlet:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -k(T - T_k) = -kT.$$

Ez szétválasztható típusú, általános megoldása

$$T(t) = c \cdot e^{-kt},$$

ahol a kezdeti feltételből $c = 100$. A k kiszámítása:

$$T(20) = 100 \cdot e^{-20k} = 50 \Rightarrow e^{-20k} = 0,5 \Rightarrow k = -\frac{\ln 0,5}{20} = 0,0347$$

Ebből $T(10) = 100 \cdot e^{-0,347} = 70,71^oC$.
Tehát a test 10 perc alatt 70,71 ^oC-ra hűlt le.

3.) Még egy típusú differenciálegyenlettel megismerkedünk: ez a lineáris differenciálegyenlet. Általános alakja

$$y' + f(x)y = g(x).$$

Ha a jobb oldali $g(x)$ függvény nulla, akkor homogén lineáris, ha nem nulla, inhomogén lineáris differenciálegyenletről beszélünk.
a) Homogén lineáris differenciálegyenletek megoldása: A homogén lineáris differenciálegyenleteket eddigi ismereteink alapján is meg tudjuk oldani, ugyanis ezek szétválasztható típusúak:

$$y' + f(x)y = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + f(x)y = 0 \Rightarrow \frac{1}{y}\mathrm{d}y = -f(x)\mathrm{d}x.$$

Megmutatható (lásd a következő példát), hogy az összes megoldás $y = c \cdot y_0$ alakú, ahol y_0 egy tetszőleges megoldása az egyenletnek. (Azaz a homogén feladat bármely két megoldása csak egy konstans szorzóban különbözhet.)
b.) Inhomogén lineáris differenciálegyenletek megoldása: az általános megoldás

$$y = y_h + y_p$$

alakban írható fel, ahol y_h a megfelelő homogén egyenlet általános megoldását jelöli, y_p pedig az inhomogén egyenlet egy tetszőleges partikuláris megoldását.
Partikuláris megoldást pl. az állandó variálásának módszerével találhatunk: a megoldást

$$y_p(x) = c(x) \cdot y_0(x)$$

alakban keressük, ahol y_0 a homogén egyenlet egy tetszőleges megoldása. (Ez hasonlít a homogén feladat összes megoldásához, de itt a c konstans szorzó helyett egy x-től függő $c(x)$ függvénnyel szorozzuk meg a homogén feladat összes megoldását. Innen ered az állandó variálása elnevezés: az állandóból változót (függvényt) csinálunk.)

Pl. Oldjuk meg az

$$y' + \frac{2}{x}y = x^3$$

inhomogén lineáris differenciálegyenletet!
Először megoldjuk a homogén feladatot:

$$y' + \frac{2}{x}y = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{2}{x}y$$

$$\int \frac{1}{y}\mathrm{d}y = -\int \frac{2}{x}\mathrm{d}x$$

$$\ln|y| = -2\ln|x| + c_1 = \ln\frac{1}{x^2} + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R} \text{ tetsz.}$$

Ebből a homogén egyenlet összes megoldása

$$y_h(x) = c \cdot \frac{1}{x^2}, \quad c \in \mathbb{R} \text{ tetsz.}$$

Egy megoldás ezek közül pl. az $y_0(x) = \frac{1}{x^2}$. Ezért az inhomogén feladat megoldását kereshetjük a következő alakban:

$$y_p(x) = c(x) \cdot \frac{1}{x^2}.$$

A $c(x)$ függvény meghatározásához helyettesítsük be az inhomogén differenciálegyenletbe a fenti y_p függvényt: mivel $y_p'(x) = c'(x) \cdot \frac{1}{x^2} + c(x) \cdot (-\frac{2}{x^3})$, ezért a

$$c'(x) \cdot \frac{1}{x^2} + c(x) \cdot (-\frac{2}{x^3}) + \frac{2}{x}c(x)\frac{1}{x^2} = x^3$$

egyenlethez jutunk. Ebből

$$c'(x) = x^5 \Rightarrow c(x) = \frac{x^6}{6} + c_3$$

Válasszuk pl. a c_3-at nullának, ezzel az $y_p(x) = \frac{x^4}{6} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{x^4}{6}$ függvényt kapjuk. Az inhomogén egyenlet általános megoldása tehát

$$y(x) = c \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{x^4}{6}, \quad c \in \mathbb{R} \text{ tetsz.}$$