2. gyakorlat

A polárkoordináta-rendszer

Az 1. gyakorlaton megismerkedtünk a descartesi koordináta-rendszerrel. Síkvektorokat gyakran kényelmes ún. polárkoordinátákkal megadni: az r hosszúsággal és a ϕ irányszöggel ($\phi \in [0, 2\pi)$):

$$\underline{a} \mapsto (r, \phi)_p$$

(Vigyázat: itt nem bázisvektorokhoz tartozó együtthatókról van szó!)
Feladat: a.) Adjuk meg az $\underline{a} = \underline{i} + \underline{j}$ vektor polárkoordinátás alakját!

$$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \quad \phi = \frac{\pi}{4}\ (45^o) \Rightarrow \ \underline{a} \text{ polárkoordinátás alakja: } (\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})_p$$

b.) Ha egy $\underline{a}$ vektor polárkoordinátás alakja $(4, \frac{\pi}{3})_p$, akkor mik a Descartes-koordinátái?

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\phi = 4\cos\frac{\pi}{3} = 2 \\ y = r\sin\phi = 4\sin\frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3} \end{array}\right. \Rightarrow \ \underline{a} \text{ Descartes-koordinátás alakja: } (2, 2\sqrt{3})$$

Az $\mathbb{R}^n$ vektortér

Feladat: Adjuk meg síkbeli vektorok
a.) összegének,
b.) skalárszorosának
Descartes-koordinátáit!
a.) Legyen $\underline{a} = \alpha_1\underline{i} + \alpha_2\underline{j}$ és $\underline{b} = \beta_1\underline{i} + \beta_2\underline{j}$. Ekkor

$$\underline{a} + \underline{b} = \alpha_1\underline{i} + \alpha_2\underline{j} + \beta_1\underline{i} + \beta_2\underline{j} = (\alpha_1 + \beta_1)\underline{i} + (\alpha_2 + \beta_2)\underline{j},$$

amiből $\underline{a} + \underline{b}$ koordinátái: $(\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2)$. Azaz összeadásnál a megfelelő koordináták összeadódnak.
b.) Legyen $\underline{a} = \alpha_1\underline{i} + \alpha_2\underline{j}$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ekkor

$$\lambda \cdot \underline{a} = \lambda \cdot (\alpha_1\underline{i} + \alpha_2\underline{j}) = (\lambda \cdot \alpha_1)\underline{i} + (\lambda \cdot \alpha_2)\underline{j}.$$

Ebből a $\lambda \cdot \underline{a}$ vektor Descartes-koordinátái: $(\lambda \cdot \alpha_1, \lambda \cdot \alpha_2)$. Vagyis az $\underline{a}$ vektor mindkét Descartes-koordinátája λ-val szorzódik. Könnyen meggondolható, hogy ez nemcsak a descartesi, hanem tetszőleges bázisvektorok esetén is igaz. (A levezetés ugyanez.)

Tekintsük most $\mathbb{R}^2$-t önmagában, és ne képzeljünk mögé irányított szakaszokat. Ez a rendezett valós számpárok halmaza. Vezessünk be ezen a halmazon két műveletet:

1. Összeadáson értsük a következőt: $(a, b) \oplus (c, d) := (a + c, b + d)$;
2. Skalárral való szorzáson pedig a következőt: $\lambda \odot (a, b) := (\lambda a, \lambda b)$.

Belátható, hogy ez a két művelet ugyanazzal a hét tulajdonsággal rendelkezik, mint a geometriai vektorok összeadása és skalárral való szorzása! Mutassuk meg pl., hogy az összeadás kommutatív:

$$(a, b) \oplus (c, d) = (c, d) \oplus (a, b)?$$

Ez igaz, mert $(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d) = (c + a, d + b) = (c, d) \oplus (a, b)$. (A második egyenlőség azért áll fenn, mert a valós számok összeadása kommutatív.)
A nullvektor tulajdonságával rendelkezik a $(0, 0)$ számpár: $(a, b) \oplus (0, 0) = (a, b)$
(A maradék öt tulajdonságot lássuk be otthon.)
Igaz továbbá, hogy az összeadás és a skalárral való szorzás eredménye is mindig számpár, azaz benne van $\mathbb{R}^2$-ben. Így jogos $\mathbb{R}^2$-t (a fenti két művelettel ellátva!) szintén vektortérnek nevezni, elemeit, a valós számpárokat pedig vektoroknak. Vegyük észre, hogy most már $\mathbb{R}^2$-ben is van értelme a következő fogalmaknak: lineáris kombináció, lineáris összefüggőség/függetlenség, generálórendszer, bázis, dimenzió.

Feladat: Adjunk meg bázist $\mathbb{R}^2$-ben!
Például

$$B := \{(1, 0), (0, 1)\}$$

Ez egyrészt generálórendszere $\mathbb{R}^2$-nek, mivel bármely $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ számpár felírható ezen két számpár lineáris kombinációjaként, mégpedig az a és b együtthatókkal:

$$(a, b) = a \odot (1, 0) \oplus b \odot (0, 1).$$

Belátandó még, hogy B lineárisan független rendszer: igaz-e, hogy

$$\alpha \odot (1, 0) \oplus \beta \odot (0, 1) = (0, 0) \Leftrightarrow \alpha, \beta = 0?$$

A bal oldalon elvégezve a műveleteket:

$$(\alpha, 0) \oplus (0, \beta) = (0, 0),$$

$$(\alpha, \beta) = (0, 0) \Leftrightarrow \alpha, \beta = 0.$$

(A továbbiakban a karikákat elhagyjuk a műveletek jelölésénél.)

Az $\mathbb{R}^2$ vektortér szoros kapcsolatban van a síkvektorokkal: láttuk, hogy adott bázist választva kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők egymásnak a két halmaz elemei. Ez a bijekció ráadásul művelettartó is, ami a következőt jelenti. Ha az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektoroknak az (a_1, a_2) és a (b_1, b_2) számpár felel meg, akkor az $\underline{a} + \underline{b}$ összegnek éppen az a számpár felel meg, amelyet úgy kapunk, hogy az $\mathbb{R}^2$-n definiált összeadási szabállyal összeadjuk az (a_1, a_2) és a (b_1, b_2) számpárt. Hasonlóan, a $\lambda \cdot \underline{a}$ vektornak az a számpár felel meg, amelyet úgy kapunk, hogy az $\mathbb{R}^2$-n definiált szorzási szabályt követve megszorozzuk az (a_1, a_2) számpárt λ-val. Ez a művelettartó bijekció biztosítja, hogy a síkvektorok helyett számolhatunk a nekik megfeleltetett számpárokkal. Egy számpár és a megfelelő síkvektor közé egyenlőségjelet teszünk.

Feladat: $\underline{a} = \underline{i} + 2\underline{j}, \quad \underline{b} = -2\underline{i} - \underline{j}$
Adjuk meg a $3(\underline{a} + \underline{b})$ vektor Descartes-koordináta-rendszerbeli alakját.

1. $3(\underline{a} + \underline{b}) = 3(\underline{i} + 2\underline{j} - 2\underline{i} - \underline{j}) = 3(-\underline{i} + \underline{j}) = -3\underline{i} + 3\underline{j} = (-3, 3)$

2. $3(\underline{a} + \underline{b}) = 3 \odot ((1, 2) \oplus (-2, -1)) = 3 \odot (-1, 1) = (-3, 3).$

Hasonlóan bevezethetők az $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4, \dots \mathbb{R}^n$ vektorterek. (A térvektorok vektortere $\mathbb{R}^3$-mal azonosítható.)

Geometriai vektorok skaláris, vektoriális és vegyes szorzata

Térjünk vissza a geometriai vektorokra!

Skaláris szorzat
$\underline{a}, \underline{b} \in \mathcal{E}_2$ vagy $\mathcal{E}_3$
$\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos\gamma$
Descartes-koordinátákkal: $\underline{a} \cdot \underline{b} = \sum_{i=1}^{2(3)} a_i b_i$

Pl. 1. $|\underline{a}| = \sqrt{3}, \; |\underline{b}| = 2, \; \gamma = 30^o$
$\underline{a} \cdot \underline{b} = \sqrt{3} \cdot 2 \cdot \cos 30^o = 3$

Definíció $\Rightarrow$ a skaláris szorzatból meghatározható a közbezárt szög: $\cos\gamma = \dfrac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{|\underline{a}| \cdot |\underline{b}|}$

Három eset:

1. $\underline{a} \cdot \underline{b} > 0 \Rightarrow \gamma$ hegyesszög

2. $\underline{a} \cdot \underline{b} = 0 \Rightarrow \gamma$ derékszög

3. $\underline{a} \cdot \underline{b} < 0 \Rightarrow \gamma$ tompa- vagy egyenesszög

Pl. 2. Mekkora szöget zár be $\underline{a} = \underline{i} + \underline{k}$ és $\underline{b} = \underline{j} + \underline{k}$?
$|\underline{a}| = \sqrt{2} = |\underline{b}|,\ \underline{a} \cdot \underline{b} = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \gamma = 60^o$

Műveleti tulajdonságok: bármely $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in \mathcal{E}_2(\mathcal{E}_3)$ vektorra és $\alpha \in \mathbb{R}$ számra

1. $\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{b} \cdot \underline{a}$
2. $(\underline{a} + \underline{b}) \cdot \underline{c} = \underline{a} \cdot \underline{c} + \underline{b} \cdot \underline{c}$
3. $(\alpha\underline{a}) \cdot \underline{b} = \alpha(\underline{a} \cdot \underline{b}) = \underline{a} \cdot (\alpha\underline{b})$

Igaz-e, hogy $\underline{a}(\underline{b} \cdot \underline{c}) = (\underline{a} \cdot \underline{b})\underline{c}$? Nem feltétlenül, ugyanis az előbbi vektor $\underline{a}$-val egyirányú, a második pedig $\underline{c}$-vel!

Vektoriális szorzat
$\underline{a}, \underline{b} \in \mathcal{E}_3$
$|\underline{a} \times \underline{b}| = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \sin\gamma$
$\underline{a} \times \underline{b} \perp \underline{a},\ \underline{a} \times \underline{b} \perp \underline{b}$ úgy, hogy $\underline{a},\ \underline{b},\ \underline{a} \times \underline{b}$ jobbsodrású rendszer

Műveleti tulajdonságok: bármely $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in \mathcal{E}_3$ vektorra és $\alpha \in \mathbb{R}$ számra

1. $\underline{a} \times \underline{b} = -\underline{b} \times \underline{a}$
2. $(\underline{a} + \underline{b}) \times \underline{c} = \underline{a} \times \underline{c} + \underline{b} \times \underline{c}$
3. $(\alpha\underline{a}) \times \underline{b} = \alpha(\underline{a} \times \underline{b}) = \underline{a} \times (\alpha\underline{b})$
4. $(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c} = (\underline{c} \cdot \underline{a})\underline{b} - (\underline{b} \cdot \underline{c})\underline{a}$ (kifejtési tétel)

A vektoriális szorzat a Descartes-koordinátákkal:
Ha $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3),\ \underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$, akkor

$$\underline{a} \times \underline{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\underline{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\underline{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\underline{k}$$

Kiszámításához érdemes táblázatot készíteni:

$$\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Pl. $\underline{a} = (3,2,1)$, $\underline{b} = (4,5,6)$

$$\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$\underline{a} \times \underline{b} = (12-5)\underline{i} + (4-18)\underline{j} + (15-8)\underline{k} = (7,-14,7)$

Vegyes (triadikus) szorzat

$\underline{a}, \underline{b} \in \mathcal{E}_3$

$(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) := (\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c}$

Felcserélési tétel: $(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) = (\underline{c}, \underline{a}, \underline{b}) = (\underline{b}, \underline{c}, \underline{a}) = -(\underline{b}, \underline{a}, \underline{c}) = -(\underline{a}, \underline{c}, \underline{b}) = -(\underline{c}, \underline{b}, \underline{a})$

$(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c})$ kiszámítása Descartes-koordinátákkal:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Pl. $\underline{a} = (1,0,1)$, $\underline{b} = (2,-1,6)$, $\underline{c} = (0,2,5)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) = 1 \cdot (-1) \cdot 5 + 0 \cdot 6 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) \cdot 0 - 1 \cdot 2 \cdot 6 - 0 \cdot 2 \cdot 5 = -13$

Feladatok.

1. Lássuk be, hogy a vektoriális szorzás 2. tulajdonsága a következő sorrendben is fennáll:

   $$\underline{a} \times (\underline{b} + \underline{c}) = \underline{a} \times \underline{b} + \underline{a} \times \underline{c}$$

   Megoldás: $\underline{a} \times (\underline{b} + \underline{c}) \overset{1.\ tul.}{=} -(\underline{b} + \underline{c}) \times \underline{a} \overset{2.\ tul.}{=} -(\underline{b} \times \underline{a} + \underline{c} \times \underline{a}) = -\underline{b} \times \underline{a} - \underline{c} \times \underline{a} \overset{2.\ tul.}{=}$ $\underline{a} \times \underline{b} + \underline{a} \times \underline{c}$

2. Lássuk be a következő azonosságot: $(\underline{a} \times \underline{b}) \times (\underline{c} \times \underline{d}) = (\underline{c}, \underline{d}, \underline{a})\underline{b} - (\underline{c}, \underline{d}, \underline{b})\underline{a}$

   Megoldás: Jelölje $\underline{e}$ a $\underline{c} \times \underline{d}$ vektort.

   $(\underline{a} \times \underline{b}) \times (\underline{c} \times \underline{d}) = (\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{e} = (\underline{e} \cdot \underline{a})\underline{b} - (\underline{b} \cdot \underline{e})\underline{a} = ((\underline{c} \times \underline{d}) \cdot \underline{a})\underline{b} - (\underline{b} \cdot (\underline{c} \times \underline{d}))\underline{a} =$ $(\underline{c}, \underline{d}, \underline{a})\underline{b} - (\underline{c}, \underline{d}, \underline{b})\underline{a}$