3. gyakorlat
A komplex számtest

Láttuk, hogy ha az $\mathbb{R}^2$ halmazt ellátjuk az összeadás és a skalárral való szorzás műveletével, akkor az $\mathbb{R}^2$ ugyanazokkal a tulajdonságokkal rendelkezik, mint a geometriai vektorterek. Ezért $\mathbb{R}^2$-t ezen két művelettel ellátva vektortérnek neveztük. A skalárral való szorzás műveletét úgy is nevezhetjük, hogy külső számtesttel való szorzás, mert a számpárokat nem számpárokkal, hanem egy másik halmaz, az $\mathbb{R}$ elemeivel szoroztuk.

Most induljunk ki az $\mathbb{R}^2$ halmazból, és definiáljunk rajta más módon műveleteket:

1. Összeadáson értsük ugyanazt, mint a vektortérben: $(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$.
2. Két elem egymással való szorzatán (belső szorzás!) értsük a következőt: $(a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc)$

Az összeadás tulajdonságai így megegyeznek a valós számok összeadásának tulajdonságaival. A belső szorzást azért definiáljuk ilyen bonyolult módon, mert csak így lehet elérni, hogy ez a művelet egyszerre rendelkezzen a valós számok szorzásának következő négy tulajdonságával:

1. kommutatív
2. asszociatív
3. van olyan számpár (ún. egységelem), amellyel bármely (a, b) számpárt szorozva (a, b)-t kapjuk: ez az $(1, 0)$;
4. minden (a, b) számpárhoz létezik olyan számpár (ún. reciprok elem), amellyel megszorozva az $(1, 0)$-t kapjuk.

Mivel tehát ezekkel a műveletekkel az $\mathbb{R}^2$ elemei ugyanolyan tulajdonságokkal rendelkeznek, mint a valós számok, ezért $\mathbb{R}^2$-t ezen két művelettel ellátva komplex számtestnek nevezzük. A komplex számtestet $\mathbb{C}$-vel jelöljük, és $\mathbb{C}$ elemeit komplex számoknak nevezzük. Az $z = (a, b)$ komplex számban a-t a komplex szám valós részének (jel.: Re z), b-t a komplex szám képzetes részének (Im z) nevezzük. A valós és a komplex számtest között fontos különbség, hogy a valós számokkal ellentétben a komplex számokon nincsen rendezés, azaz nincs kisebb és nagyobb komplex szám.

A valós számok a komplex számok részének tekinthetők: az a valós számot azonosíthatjuk az $(a, 0)$ komplex számmal.

Egy (a, b) komplex szám $\overline{(a, b)}$ konjugáltján az $(a, -b)$ komplex számot értjük. Pl. $\overline{(2, -3)} =$

$(2, 3)$.

Az (a, b) komplex szám abszolút értékén az $|(a, b)| := \sqrt{a^2 + b^2}$ számot értjük.

Feladatok:

1. Számítsuk ki az $(5, 2)$ és a $(4, 3)$ komplex számok összegét és szorzatát.
   $(5, 2) + (4, 3) = (9, 5)$, $(5, 2) \cdot (4, 3) = (5 \cdot 4 - 2 \cdot 3, 5 \cdot 3 + 2 \cdot 4) = (14, 23)$

2. Nevezetes komplex szám a $(0, 1)$ (ún. képzetes egység), amelyet i-vel jelölünk. Számítsuk ki i négyzetét!

   $$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 - 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1$$

   (A kapott komplex számot azonosnak tekintjük a -1 valós számmal!)

3. Mutassuk meg, hogy egy (a, b) komplex szám felírható $a + ib$ alakban (algebrai alak)!

   $a + ib = (a, 0) + (0, 1) \cdot (b, 0) = (a, 0) + (0 \cdot b - 1 \cdot 0, 0 \cdot 0 + 1 \cdot b) = (a, 0) + (0, b) = (a, b)$

4. Az algebrai alakkal kényelmes számolni. Pl. az $(5, 2)$ és a $(4, 3)$ szám szorzatát így is kiszámíthatjuk:

   $(5 + 2i) \cdot (4 + 3i) = 5 \cdot 4 + 2i \cdot 4 + 5 \cdot 3i + 2i \cdot 3i = 20 + 17i + 6i^2 = 20 + 23i - 6 = 14 + 23i$

5. Adjuk meg a következő komplex számok algebrai alakját:
   a.) $z = i^{1994}$ b.) $z = |\overline{1 + i}|$ c.) $z = \dfrac{3 - 4i}{2 - i}$
   Megoldás:
   a.) $(-1)^{997} = -1$
   b.) $\sqrt{2}$
   c.) $\dfrac{3 - 4i}{2 - i} = \dfrac{3 - 4i}{2 - i} \cdot \dfrac{2 + i}{2 + i} = \dfrac{(3 - 4i)(2 + i)}{4 - i^2} = \dfrac{(3 - 4i)(2 + i)}{5} = \dfrac{6 - 8i + 3i - 4i^2}{5} = \dfrac{10 - 5i}{5} = 2 - i$

Komplex számokat ugyanúgy szokásos az abszolút érték és az irányszög segítségével megadni, ahogy a síkvektorokat. Ha az (a, b) komplex szám abszolút értéke r, szöge ϕ, akkor $(a, b) = (r \cos \phi, r \sin \phi) = r \cos \phi + ir \sin \phi = r(\cos \phi + i \sin \phi)$ (trigonometrikus alak). A trigonometrikus alakkal igen kényelmesen elvégezhető a szorzás és az osztás:

$r(\cos \alpha + i \sin \alpha) \cdot p(\cos \beta + i \sin \beta) = rp(\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta))$

$$\frac{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)}{p(\cos\beta + i\sin\beta)} = \frac{r}{p}(\cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta))$$

Pl. legyen $z_1 = 2(\cos 45^o + i\sin 45^o)$, $z_2 = 3(\cos 5^o + i\sin 5^o)$. Mivel egyenlő $z_1 \cdot z_2$ és $\frac{z_1}{z_2}$?
$z_1 \cdot z_2 = 6(\cos 50^o + i\sin 50^o)$, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3}(\cos 40^o + i\sin 40^o)$

A szorzásból következik az egész kitevős hatvány képlete:

$$z^n = [r(\cos\phi + i\sin\phi)]^n = r^n(\cos n\phi + i\sin n\phi)$$

Egy komplex szám n-edik hatványa egyértelmű, n-edik gyökből azonban n db van (ezek között lehetnek egyenlők is):

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\phi + k2\pi}{n} + i\sin\frac{\phi + k2\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots n-1$$

Pl. $\sqrt{i} = ?$
Mivel $i = \cos 90^o + i\sin 90^o$, így

$$\sqrt{i} = \sqrt{1}\left(\cos\frac{90^o + k2\pi}{n} + i\sin\frac{90^o + k2\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1,$$

azaz $\sqrt{i} = \pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Másodfokú egyenleteknek mindig van megoldásuk a komplex számok halmazán. A szokásos megoldóképletet használhatjuk. Míg negatív diszkrimináns esetén nincs valós megoldás, komplex megoldásból kettő is van, mert egy negatív számnak két komplex négyzetgyöke van. A -1 gyökei pl. a $+i$ és a $-i$.
Pl. Oldjuk meg a $z^2 + 3z + 4 = 0$ egyenletet!

$$z_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-16}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{-1}\sqrt{7}}{2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}i.$$