4. gyakorlat

Mátrixszámítás

Egy m sorból és n oszlopból álló számtáblázatot m-szer n-es mátrixnak nevezünk.

$$A \in M_{m,n}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \ a_{ij} \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C}),\ i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n$$

Speciális mátrixok:

- $m = 1$: sormátrix
- $n = 1$: oszlopmátrix
- $m = n$: négyzetes (kvadratikus) mátrix

A négyzetes mátrixokon belül további speciális mátrixok:

- diagonális mátrix: $a_{ij} = 0$, ha $i \neq j$, pl. identitásmátrix (a főátlóban egyesek)
- szimmetrikus mátrix: $a_{ij} = a_{ji},\ i, j = 1, 2 \dots, n$ (a főátlóra szimmetrikusak az elemek)
- antiszimmetrikus mátrix: $a_{ij} = -a_{ji},\ i, j = 1, 2 \dots, n$ (a főátlóra szimmetrikusan elhelyezkedő elemek egymás (-1)-szeresei, a főátlóban nullák vannak!)
- háromszögmátrixok: felsőháromszög-mátrix: $a_{ij} = 0$, ha $i > j$, ill. alsóháromszög-mátrix: $a_{ij} = 0$, ha $i < j$.

Műveletek mátrixokkal

1. Összeadás: Az $A \in M_{m,n}$ és $B \in M_{m,n}$ mátrixok összege az a $C \in M_{m,n}$ mátrix, amelynek elemeire $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ (azaz két mátrixot elemenként adunk össsze).
2. Skalárral való szorzás: $A \in M_{m,n}$ λ számszorosán azt az $\tilde{A}$ mátrixot értjük, amelynek elemeire $\tilde{a}_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$ (azaz a mátrix minden elemét megszorozzuk λ-val).

Tulajdonságaik megegyeznek a vektoroknál látottakkal.
Pl.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$3 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Mátrixok egymással való szorzatát is értelmezzük, de csak ha az első mátrixnak ugyanannyi oszlopa van, ahány sora a másodiknak: ha $A \in M_{m,p}$ és $B \in M_{p,n}$, akkor $C = A \cdot B \in M_{m,n}$, és $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj},\ i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n.$

Pl. 1. Számítsuk ki az $A \cdot B$ szorzatmátrixot, ha

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Pl. 2. Értelmes-e, és ha igen, mivel egyenlő?

$$a.) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^2 \qquad b.) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^3 \qquad c.) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}^2$$

Egy $A \in M_{m,n}$ mátrix transzponáltján azt az $A^T \in M_{n,m}$ mátrixot értjük, amelynek elemeire $a_{ij}^T = a_{ji}$. (Szemléletesen: a mátrix elemeit tükrözzük arra a gondolatbeli egyenesre, amely a bal felső elemből 45^o-ban lefelé indul ki.)

Pl. 1. Transzponáljuk a következő mátrixokat:

$$a.)\ A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad b.)\ B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad c.)\ C = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Megoldás:

$$a.)\ A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad b.)\ B^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad c.)\ C^T = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Pl. 2. Legyen $A \in M_{m,n}$. Értelmes-e AA^T és A^TA, és ha igen, milyen méretűek?
Megoldás: Mindkettő értelmes: $AA^T \in M_m$ és $A^TA \in M_n$.

Mátrixok determinánsa

Csak négyzetes mátrixokra értelmezzük!

Az $A \in M_n$ mátrix determinánsa (jel.: $|A|$) egy valós (vagy komplex) szám (a definíciót lásd az előadáson). Kiszámítása:

1. Ha $A \in M_2$, azaz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, akkor $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Pl.

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ determinánsa: $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 4 \cdot 3 = -10.$

Hogyan változik a determináns értéke, ha A első sorát megszorozzuk 3-mal?

$\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 6 \cdot 1 - 4 \cdot 9 = -30 \rightarrow$ 3-szorosára változott.

2. Ha $A \in M_3$, azaz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, akkor

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}$$

Vegyük észre, hogy $|A|$ összerakható 2×2-es determinánsokból:

$$|A| = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Ez általánosabban is igaz: Legyen i egy tetszőleges index ($i \in \{1, 2, 3\}$)

$$|A| = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot |A_{ij}|,$$

ahol $|A_{ij}|$ annak a mátrixnak a determinánsa, amelyet A-ból úgy kapunk, hogy az a_{ij} elemet tartalmazó sort és oszlopot elhagyjuk. Ez a kifejtési tétel. ($|A_{ij}|$ neve: az a_{ij} elemhez adjungált aldetermináns.)

3. A kifejtési tétel alkalmazható tetszőleges $A \in M_n$ mátrixra.

Pl. Fejtsük ki valamelyik soruk szerint a következő mátrixok determinánsát:

$$a.)\ A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad b.)\ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Megoldás:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} =^{3.\text{ sor szerint}} -2(-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} + 1(-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} + 0 = 35$$

$$|B| =^{1.\text{ sor szerint}} 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 0 + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -8 + 33 + 20 = 45$$

Megjegyzések:

- Ha A valamely sora vagy oszlopa csak nullákat tartalmaz, akkor $|A| = 0$.
- Ha A valamely sora (oszlopa) a többi sor (oszlop) lineáris kombinációja, akkor $|A| = 0$. Pl.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 10 \\ 3 & 6 & 13 \end{vmatrix} = 0$$

- Szorzatmátrix determinánsa a tényezők determinánsainak szorzata: $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|,\ A, B \in M_n$
- A determináns értékét a transzponálás változatlanul hagyja: $|A^T| = |A|$.
- Egyes speciális mátrixok determinánsa könnyen meghatározható:
  a.) Az identitásmátrix determinánsa 1.
  b.) A diagonálmátrixok és háromszögmátrixok determinánsa a főátlóban lévő elemek szorzata:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 24, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 12, \qquad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 48$$