**5. gyakorlat**

**Lineáris leképezések**

Tekintsük azt a valós függvényt, amely minden számhoz hozzárendeli az ötszörösét!

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 5x$$

Mit rendel hozzá ez a függvény két szám összegéhez?

$$x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \quad f(x_1 + x_2) = 5(x_1 + x_2) = 5x_1 + 5x_2 = f(x_1) + f(x_2)$$

Azaz két szám összegéhez a megfelelő függvényértékek összegét rendeli.
Mit rendel egy szám $\lambda$-szorosához?

$$x \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}, \quad f(\lambda \cdot x) = 5 \cdot (\lambda \cdot x) = \lambda \cdot 5x = \lambda \cdot f(x).$$

Azaz egy $x$ szám $\lambda$-szorosához az $x$-beli függvényérték $\lambda$-szorosát rendeli.
Ha egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre igaz a fenti két tulajdonság minden $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ és minden $x, \lambda \in \mathbb{R}$ esetén, akkor $f$-et lineáris függvénynek nevezzük.

Lineárisak-e a következő valós függvények?
a.) $f(x) = 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$
Legyen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Ekkor $f(x_1 + x_2) = 1$, azonban $f(x_1) + f(x_2) = 1 + 1 = 2 \neq 1$. Azaz az azonosan 1 függvény nem lineáris.
b.) $f(x) = x^2$
Ez sem lineáris, hiszen pl. $f(2x) = (2x)^2 = 4x^2 \neq 2 \cdot f(x) = 2x^2$.
c.) $f(x) = \sin x$ - szintén nem lineáris, hiszen pl. $\sin(2 \cdot 90^o) = 0 \neq 2\sin(90^o) = 2$
d.) $f(x) = 5x + 2$
$f(x_1 + x_2) = 5(x_1 + x_2) + 2 = 5x_1 + 5x_2 + 2$, de $f(x_1) + f(x_2) = 5x_1 + 2 + 5x_2 + 2 = 5x_1 + 5x_2 + 4 \neq 5x_1 + 5x_2 + 2$
Tehát ez sem lineáris! Ezt a függvényt helyesen lineáris inhomogén függvénynek nevezzük.

Tekintsünk most egy $\mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_2$ függvényt! Pl. minden síkvektorhoz rendeljük hozzá a $\phi$ szöggel való elforgatottját. A geometriából jól látszik, hogy ez a leképezés is összeghez összeget, skalárszoros vektorhoz skalárszorost rendel. Ez a leképezés a síkvektorok terében egy bázis rögzítésével megfelel egy $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ függvénynek.

A fenti két tulajdonság vizsgálatának bármilyen $f : V_1 \to V_2$ függvény esetén van ér-

telme, ahol $V_1$ és $V_2$ két vektortér. Egy $f : V_1 \to V_2$ függvényt lineárisnak nevezünk, ha egyszerre igaz rá a következő két tulajdonság:
1. $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in V_1$
2. $f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x) \quad \forall x \in V_1, \lambda \in \mathbb{R}$ esetén.

Melyek a lineáris függvények?

- Belátható, hogy az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények körében csak az $f(x) = a \cdot x$ alakúak lineárisak, ahol $a \in \mathbb{R}$ rögzített szám. (Az világos az előzőekből, hogy az ilyen függvény lineáris, de az is könnyen meggondolható, hogy ha egy valós függvény lineáris, akkor csak ilyen alakú lehet. Ugyanis ha $f$ lineáris, akkor $f(x) = f(1 \cdot x) = f(1) \cdot x = a \cdot x$, ahol $a = f(1)$.)

- Az $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ függvények már számpárhoz számpárt rendelnek:

$$(x_1, x_2) \mapsto (y_1, y_2)$$

ahol a képvektor $y_1$ és $y_2$ koordinátája is függ általában $x_1$-től és $x_2$-től. Az ilyen függvények között csak azok lineárisak, amelyekre a következő igaz:

$$y_1(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2 \quad \text{és} \quad y_2(x_1, x_2) = cx_1 + dx_2, \quad \text{ahol } a, b, c, d \text{ rögzített számok,}$$

vagyis a képtér vektorainak mindkét koordinátája az alappont koordinátáinak lineáris kombinációja, mégpedig mindegyik alappont esetén ugyanazokkal az együtthatókkal. Azaz egy $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineáris leképezés négy darab számmal adható meg: $a, b, c, d$. Vegyük észre, hogy ha ezeket a számokat egy $2 \times 2$-es mátrixba rendezzük a következő módon:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

akkor az $(x_1, x_2)$ vektor képét megkaphatjuk úgy, hogy ezzel a mátrixszal az $(x_1, x_2)$ vektort mint oszlopmátrixot megszorozzuk (a mátrixszorzás múlt órán tanult szabálya szerint):

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{bmatrix}$$

Egy $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineáris leképezés tehát nem más, mint egy $2 \times 2$-es mátrixszal való szorzás.

- Végül általában, ha $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, azaz szám-n-esekhez szám-m-eseket rendel:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (y_1, y_2, \ldots y_m)$$

akkor pontosan akkor lineáris, ha az $y_1, y_2, \ldots y_m$ koordináták mind lineáris kombinációi az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ koordinátáknak:

$$\begin{aligned}
y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\
y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\
&\vdots \\
y_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n
\end{aligned}$$

ahol $a_{ij}, i = 1, 2 \ldots, m, j = 1, 2, \ldots, n$ adott számok. Vagyis az $(y_1, y_2, \ldots y_m)$ vektort úgy kapjuk meg, hogy az $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vektort mint oszlopmátrixot megszorozzuk a következő $m \times n$-es mátrixszal:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Pl. 1. Milyen lineáris leképezést határoznak meg a következő mátrixok?

$$a.)\ A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix} \quad b.)\ B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \quad c.)\ C = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a.) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + 2x_2 + x_3, 4x_1 + 6x_2 + 2x_3)$
b.) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2)$
c.) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ f(x) = (2x, x)$

Pl. 2. Lineárisak-e a következő függvények?
a.) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$ (igen)
b.) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x_1, x_2) = (x_1x_2, x_1 + x_2)$ (nem)

**Lineáris leképezés mátrixának meghatározása**

Ebben a részben azzal foglalkozunk, hogy hogyan lehet felírni egy lineáris leképezés mátrixát.

Pl. láttuk, hogy az adott $\phi$ szögű elforgatás $\mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_2$ lineáris leképezés. Ha $\mathcal{E}_2$-ben rögzítünk egy bázist, akkor minden síkvektornak egyértelműen megfelel egy $\mathbb{R}^2$-beli elem, így a forgatás megfelel egy $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineáris leképezésnek. Tegyük fel, hogy végig a descartesi bázisban dolgozunk, és írjuk fel a forgatás mátrixát! Azaz: azt a $2\times2$-es mátrixot keressük, amellyel ha megszorozzuk az elforgatandó vektor Descartes-koordinátáiból álló számpárt mint oszlopmátrixot, akkor az elforgatott vektort szintén a descartesi koordináta-rendszerben kapjuk meg. Megmutatható, hogy ez a mátrix (ún. forgatási mátrix) a következő:

$$\begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

Vegyük észre, hogy a forgatási mátrix első oszlopába éppen az $\underline{i}$ elforgatottja, a második oszlopába pedig a $\underline{j}$ elforgatottja került, a descartesi koordináta-rendszerben felírva.

Ha pl. $\phi = 90^o$ akkor a mátrix

$$A_{90^o} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Így pl. a $(2,1) = 2\underline{i} + \underline{j}$ vektor elforgatottját így számolhatjuk ki:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

tehát az a $-\underline{i} + 2\underline{j}$ vektor lesz.
Általában, ha az alapvektorokat a $B_1$ bázisban adjuk meg, és a képüket a $B_2$ bázisban szeretnénk megkapni, akkor a leképezés mátrixának i-edik oszlopába a $B_1$ i-edik eleme képének a $B_2$ bázisbeli koordinátáit kell írni.

Példák

1. Az $x$-tengelyre való tükrözés is $\mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_2$ lineáris leképezés. Írjuk fel a mátrixát, ha
   a.) $B_1 = \{\underline{i}, \underline{j}\}$ és $B_2 = \{\underline{i}, \underline{j}\}$;
   b.) $B_1 = \{\underline{i}, \underline{j}\}$ és $B_2 = \{-\underline{i}, -\underline{j}\}$
   *Megoldás:*
   a.) Az $\underline{i}$ képe $\underline{i}$, a $\underline{j}$ képe $-\underline{j}$, azaz a descartesi koordináta-rendszerben $(1,0)$ ill. $(0,-1)$, így a mátrix
   $$A_{B_1,B_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$
   b.) Az $\underline{i}$ és a $\underline{j}$ képét most a $B_2$ bázisban kell megadni. Milyen együtthatókkal áll

elő az $\underline{i}$ a $-\underline{i}$ és $-\underline{j}$ vektorból?

$$\underline{i} = \alpha_1 \cdot (-\underline{i}) + \alpha_2 \cdot (-\underline{j}) \Rightarrow \alpha_1 = -1,\ \alpha_2 = 0$$

És milyen együtthatókkal a $-\underline{j}$ ugyancsak a $-\underline{i}$ és $-\underline{j}$ vektorból?

$$-\underline{j} = \beta_1 \cdot (-\underline{i}) + \beta_2 \cdot (-\underline{j}) \Rightarrow \beta_1 = 0,\ \beta_2 = 1$$

Ebből a keresett mátrix:

$$A_{B_1,B_2} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Előfordul, hogy egymás után több leképezést is alkalmazunk egy vektorra, azaz lineáris leképezések kompozícióját alkalmazzuk. Lineáris leképezések kompozíciója maga is lineáris leképezés lesz, tehát megfelel neki egy mátrix. Nézzük meg pl. az egymás utáni 90 és $-90$ fokos elforgatás mátrixát!

Először elforgatjuk az $\underline{x} = (x_1, x_2)$ vektort 90 fokkal. Ez azt jelenti, hogy megszorozzuk az $A_{90^o}$ mátrixszal, és így megkapjuk a képét, amit jelöljünk $\underline{y}$-nal.

$$\underline{y} = A_{90^o}\underline{x}$$

Most az $\underline{y}$ vektort forgatjuk el $-90$ fokkal, azaz $\underline{y}$-t megszorozzuk az $A_{-90^o}$ mátrixszal. Az eredmény:

$$\underline{z} = A_{-90^o}\underline{y} = A_{-90^o}(A_{90^o}\underline{x})$$

Mivel a mátrixszorzás asszociatív, ezért ez másképpen $(A_{-90^o}A_{90^o})\underline{x}$. Vagyis az egymás utáni 90 és -90 fokos leképezés kompozíciója a -90 és 90 fokos leképezés mátrixának a szorzata. Vigyázzunk a sorrendre: az a mátrix áll elöl, amelyet utolsónak alkalmazunk.