6. gyakorlat
A mátrix rangja

Az $A \in M_{m,n}$ nemnulla mátrix rangján az egymással lineárisan független rendszert alkotó sorvektorainak (vagy oszlopvektorainak) maximális számát értjük. (Belátható, hogy ez a két szám megegyezik.) Ha $A = 0$ (nullmátrix), akkor a rangja 0. A rang jelölése: $\rho(A)$.

A definícióból következik, hogy egy mátrixnak nem lehet nagyobb a rangja, mint ahány sora, és mint ahány oszlopa van. Egy 2×3-as mátrixnak például legfeljebb 2 lehet a rangja, egy 5×3-asnak legfeljebb 3, és egy $n \times n$-esnek legfeljebb n.
Pl. mennyi a rangja a következő mátrixoknak?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Az A mátrix három sorvektora lineárisan független rendszert alkot, ezért $\rho(A) = 3$. A B mátrixban a három sorvektor összefüggő, ezért a rang csak 3-nál kisebb lehet. Az $(1, 0, 0)$ és a $(0, 0, 1)$ sorvektor lineárisan független, ezért a rang 2. A C mátrix rangja nem lehet 2-nél nagyobb. A két sorvektora azonban lineárisan független, így a rangja 2. (Az oszlopvektorokat vizsgálva is ugyanerre az eredményre jutunk.)

A rangot a legtöbb esetben nehéz a fenti definíció alapján kiszámítani. Ezért hasznos a következő tétel.

Mátrixok rangszámtétele: Az $A \in M_{m,n}$ mátrixban a legmagasabb rendű nemnulla aldetermináns rendje egyenlő az A rangjával.

A fenti B mátrixban pl. lehet találni 2×2-es nemnulla aldeterminánst: a 2. oszlop és a 3. sor elhagyásával:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

azonban harmadrendűt nem, mert a mátrix egyetlen harmadrendű aldeterminánsa maga az A determinánsa, ez pedig nulla (hiszen van csupa nulla sora). Így a B mátrix rangja a rangszámtétel alapján is 2-nek adódik.

Köv.: Ha egy $n \times n$-es mátrixnak nemnulla a determinánsa, akkor a rangja n.

Egy mátrix összes aldeterminánsát sok esetben nehéz volna kiszámítani. Szerencsére belátható, hogy ha a mátrixban találtunk egy r-edrendű nemnulla aldeterminánst, és az **ezt tartalmazó $r+1$-edrendű** aldeterminánsok mind nullák, akkor a rang r. Nem kell tehát az összes magasabbrendű determinánst kiszámítani. Ezért a rang kiszámításakor az alacsonyabb rendű aldeterminánsoktól a magasabbak felé haladunk.

Pl. Számítsuk ki a

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 6 & 4 \\ -3 & 2 & 8 & 5 \end{bmatrix}$$

mátrix rangját!

Megoldás: Induljunk el pl. a bal felső sarokból. A bal felső 2×2-es aldetermináns

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

azaz a rang legalább 2. Most rátérhetünk a 3×3-as aldeterminánsok vizsgálatára. A fentiek érelmében azonban csak azokkal kell foglalkoznunk, amelyek tartalmazzák a fenti 2×2-es blokkot. Ha valamelyik nem nullának adódik, akkor a rang legalább 3, és ki kell számítanunk az egyetlen 4×4-es aldeterminánst (azaz magát a determinánst). Ha mindegyik nulla, akkor megállhatunk, és a rang 2. A szóban forgó 3×3-as aldeterminánsok:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 6 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 8 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

Mindegyik értéke 0, ezért $\rho(B) = 2$.

A mátrix rangját felhasználhatjuk arra, hogy segítségével eldöntsük egy vektorhalmazról, hogy lineárisan független vagy összefüggő-e. Pl. lineárisan független-e a következő vektorrendszer?

$$\{(-2, 4, 5, 0), (1, 7, 1, 2), (1, 25, 8, 6)\}$$

Rendezzük őket mátrixba, és vizsgáljuk meg a rangját!

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 7 & 1 & 2 \\ 1 & 25 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

Ha az derül ki, hogy A rangja 3, akkor a vektorok függetlenek, ha 3-nál kisebb, akkor pedig összefüggőek. Induljunk el megint pl. a bal felső sarokból:

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = -18 \neq 0 \Rightarrow \rho(A) \geq 2.$$

Ezt tartalmazó 3×3-as aldeterminános kettő van. Az első:

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 1 & 7 & 1 \\ 1 & 25 & 8 \end{vmatrix} = 0.$$

Mivel ez nulla, meg kell vizsgálni a másikat is:

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 1 & 7 & 2 \\ 1 & 25 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Vagyis a rang 2. Így a három vektor lineárisan összefüggő volt.

Lineáris algebrai egyenletrendszerek

Lineáris algebrai egyenletrendszernek nevezzük az

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \ldots &= \ldots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{sn}x_n &= b_s \end{aligned}$$

alakú egyenletrendszereket, ahol a_{ij} $(i = 1, \ldots, s, j = 1, \ldots, n), b_1, b_2 \ldots, b_s$ adott számok, és keressük az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ismeretlenek értékét.
Pl. egy két egyenletből álló $(s = 2)$ kétismeretlenes $(n = 2)$ egyenletrendszer a következő:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3 \\ 2x_1 + 2x_2 &= 5 \end{aligned}$$

A továbbiakban gyakran alkalmazzuk az egyenletrendszer rövidített jelölésmódját. Vegyük észre, hogy az előbbi egyenletrendszer az

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

jelölések bevezetésével felírható

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

alakban, ahol az $\underline{x}$ az ismeretlenek $(x_1, x_2)^T$ oszlopvektorát jelöli. Az A mátrixot az egyenletrendszer együtthatómátrixának, a $\underline{b}$ vektort a szabad tagok oszlopvektorának nevezzük. Mindazon $\underline{x}$ vektorokat keressük, amelyek kielégítik az $A\underline{x} = \underline{b}$ egyenletet.

Pl. 1. Mely egyenletrendszernek felel meg az $A\underline{x} = \underline{b}$ egyenlet, ha

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}?$$

Megoldás:

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 4x_3 &= 3 \\ x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

2. Írjuk fel az

$$\begin{aligned} x_2 &= 2 \\ x_1 + x_2 &= 3 \end{aligned}$$

egyenletrendszer együtthatómátrixát!
Megoldás:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$