7. gyakorlat

Lineáris algebrai egyenletrendszerek megoldhatósága

Egy lineáris algebrai egyenletrendszerrel kapcsolatban a következő kérdések merülnek fel:

1. Létezik-e megoldása?
2. Ha igen, hány megoldása van?
3. Hogyan határozható(k) meg a megoldás(ok)?

Először az első kérdéssel fogunk foglalkozni. Ehhez bevezetjük az egyenletrendszer kibővített mátrixának a fogalmát: az $A\underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszer kibővített mátrixának azt a mátrixot nevezzük, amelyet A-ból úgy kapunk, hogy jobbról kiegészítjük a $\underline{b}$ oszlopvektorral. Jelölése: $[A|\underline{b}]$. Pl. az

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3 \\ 2x_1 + 2x_2 &= 5 \end{aligned}$$

egyenletrendszer kibővített mátrixa:

$$[A|\underline{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Kérdés: Hogyan viszonyulhat egymáshoz A és $[A|\underline{b}]$ rangja? Nyilvánvalóan a kibővített mátrix rangja nem lehet kisebb, mint az A rangja, mivel az A márix aldeterminánsai az $[A|\underline{b}]$-nek is aldeterminánsai. Köv.: $\rho([A|\underline{b}]) \geq \rho(A)$.

Az egyenletrendszer megoldhatóságának feltételét a Kronecker–Capelli-tétel fogalmazza meg: Az $A\underline{x} = \underline{b}$ lineáris algebrai egyenletrendszernek pontosan akkor létezik megoldása, ha $\rho(A) = \rho([A|\underline{b}])$, azaz az együtthatómátrixnak és a kibővített mátrixnak ugyanannyi a rangja.

Ennek illusztrálására tekintsük a következő példákat!
1.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3 \\ 2x_1 + 2x_2 &= 5 \end{aligned}$$

Jól látszik, hogy ennek az egyenletrendszernek nincs megoldása, mert a második egyenlet bal oldala az első egyenlet bal oldalának éppen kétszerese, azonban a jobb oldala az első egyenlet jobb oldalának nem a kétszerese, hanem csak 5/3-szorosa. Ez ellentmondás. Alkalmazzuk a Kronecker–Capelli-tételt! Az együtthatómátrix és a kibővített mátrix:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad [A|\underline{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Az A mátrixban két azonos oszlop van, így $\rho(A) = 1$. A $(3,5)^T$ oszlopvektor azonban már független az $(1,2)^T$ oszlopvektortól, így a kibővítéssel megnöveltük a mátrix rangját: $\rho([A|\underline{b}]) = 2 \neq 1 \Rightarrow$ nem létezik megoldás.

2.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3 \\ 2x_1 + 2x_2 &= 6 \end{aligned}$$

Itt a bal oldalakat nem változtattuk meg, a második egyenletben viszont már 6 van a jobb oldalon, ami kétszerese a 3-nak. Az A mátrix ugyanaz, mint előbb, így $\rho(A) = 1$. A $(3,6)^T$ oszlop azonban már összefügg az $(1,2)^T$-vel, így $\rho([A|\underline{b}]) = 1 = \rho(A) \Rightarrow$ létezik megoldás. Valóban, ezt az egyenletrendszert minden olyan számpár kielégíti, amely az egyik egyenletnek eleget tesz (végtelen sok megoldás van).

3.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 &= 5 \end{aligned}$$

Az együtthatómátrix és a kibővített mátrix:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad [A|\underline{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Itt $\rho(A) = 2 = \rho([A|\underline{b}]) \Rightarrow$ létezik megoldás. Valóban, pl. az egyik ismeretlen kiküszöbölésével könnyen kiszámítható, hogy $x_1 = 1$ és $x_2 = 2$ (egy darab megoldás van, más szóval a megoldás egyértelmű).

A fenti három példa lefedi a lineáris egyenletrendszerek megoldásainak számát illetően az összes lehetséges esetet:

1. Ha $\rho(A) \neq \rho([A|\underline{b}])$, akkor nincs megoldás (lásd az 1. példát).

2. Ha $\rho(A) = \rho([A|\underline{b}])$, és ez a közös rang egyenlő az ismeretlenek számával, akkor egy megoldás van (lásd a 3. példát).

3. Ha $\rho(A) = \rho([A|\underline{b}])$, és ez a közös rang kisebb az ismeretlenek számánál, akkor végtelen sok megoldás van (lásd a 2. példát).

Más eset nem lehetséges, így pl. egy lineáris egyenletrendszernek sosem lehet két megoldása!

Pl. 1. Létezik-e megoldásuk az alábbi egyenletrendszereknek? Ha igen, hány?
a.)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 &= 5 \end{aligned}$$

Itt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad [A|\underline{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Vizsgáljuk meg az A rangját!

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \rho(A) \geq 2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow \rho(A) = 2.$$

A kibővített mátrixnak is legalább 2 a rangja, de ha található benne 3×3-as nemnulla aldetermináns, akkor 3. Ilyen létezik:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \Rightarrow \rho([A|\underline{b}]) = 3 \neq \rho(A).$$

Így az egyenletrendszernek nincs megoldása.
b.)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad [A|\underline{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Itt $\rho(A)$ szintén 2, a kibővített mátrixnak pedig ennél sem kisebb nem lehet a rangja, sem nagyobb nem lehet (csak két sora van). Tehát létezik megoldás. A közös rang 2, az ismeretlenek száma viszont $3 > 2$, ezért végtelen sok megoldás van.

Pl. 2. Lehet-e olyan két egyenletből álló háromismeretlenes lineáris egyenletrendszer, amelynek nem végtelen sok megoldása van?
Igen: lehet, hogy nincs megoldása. (Egyértelmű megoldása nem lehet.)

Pl. 3. Tegyük fel, hogy az $A\underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszerben $A \in M_n$ olyan négyzetes mátrix, amelynek a determinánsa nem nulla. Mit mondhatunk a rendszer megoldhatóságáról és a megoldások számáról?
$|A| \neq 0 \Rightarrow \rho(A) = n$. De ekkor $\rho([A|\underline{b}])$ is csak n lehet (ez egyben az ismeretlenek száma is) $\Rightarrow$ létezik egyetlen megoldás.

Pl. 4. Mit mondhatunk az $A\underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszer megoldhatóságáról, ha $\underline{b}$ minden eleme nulla?
Ekkor a kibővített mátrixban A-t egy nulla oszloppal egészítjük ki. Mivel egy nullvektort tartalmazó vektorrendszer mindig összefüggő, ezért ezzel nem nőhet meg a lineárisan független rendszert alkotó oszlopok maximális száma, vagyis a rang nem változik meg. Ezért mindig van megoldás. (Másképp gondolkozva: világos, hogy ha minden ismeretlennek a nulla értéket adjuk, az összes egyenlet fennáll, tehát mindig megoldás az $\underline{x} = \underline{0}$.)

Lineáris algebrai egyenletrendszerek megoldási módszerei

A továbbiakban azzal foglalkoznuk, hogy hogyan határozhatjuk meg egy lineáris egyenletrendszer megoldásait.

1. A Cramer-szabály

Tegyük fel, hogy az $A\underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszerben $A \in M_n$ olyan négyzetes mátrix, amelynek a determinánsa nem nulla. Az előbbi 3. példa szerint ekkor létezik egyetlen megoldás. Ennek meghatározására alkalmazható a Cramer-szabály: az x_i ismeretlen előáll

$$x_i = \frac{|[A|^i\underline{b}]|}{|A|}$$

alakban, ahol $[A|^i\underline{b}]$ azt a mátrixot jelöli, amelyet A-ból úgy kapunk, hogy az i-edik oszlopát kicseréljük a $\underline{b}$-re.

Pl. Számítsuk ki az y ismeretlent a következő egyenletrendszerben:

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 4z &= 3 \\ x - 6y + 2z &= -1 \\ 4x + 3y - 8z &= 1 \end{aligned}$$

Megoldás:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -6 & 2 \\ 4 & 3 & -8 \end{vmatrix}} = \frac{80}{240} = \frac{1}{3}.$$

Megjegyezzük, hogy a determinánsok kiszámítása miatt ez a módszer nagyon műveletigényes. Egy darab $n \times n$-es determináns kiszámításához ugyanis $(n-1)n!$ számú szorzást kell elvégeznünk. $n = 50$ esetén ez több mint $50!$, azaz több mint 10^{64} darab szorzást jelent. Ennek a számnak az érzékeltetésére végezzünk el egy egyszerű gondolatkísérletet! Képzeljünk el egy olyan számítógépet, amely 10^{-10} méter méretű számolóegységekből áll, és a számolást az elképzelhető legnagyobb sebességgel: fénysebességgel végzi. Egy szorzás ideje legyen az az idő, amely alatt a fény átfut egy számolóegységen: ez $1/3 \cdot 10^{-18}$ másodperc. Akkor 10^{64} darab szorzás

$$t = \frac{1}{3} \cdot 10^{-18} \cdot 10^{64} = \frac{1}{3} \cdot 10^{46} s$$

időt igényel. Ha az eredményt átszámítjuk évekbe, akkor azt kapjuk, hogy ez az idő több mint $\frac{1}{3} \cdot 10^{37}$ év!

Az alkalmazások során (pl. az időjárás-előrejelzésben) jóval nagyobb méretű egyenletrendszerek is előfordulnak. Világos, hogy ezeket a Cramer-szabállyal lehetetlen reális időn belül megoldani. Ezért a gyakorlatban más módszerek terjedtek el (lásd a köv. órát).