8. gyakorlat

Lineáris egyenletrendszerek megoldási módszerei folyt.

2. Kiküszöbölési (eliminációs) eljárások

A kiküszöbölési eljárások azon az észrevételen alapulnak, hogy egyes speciális egyenletrendszerek könnyen megoldhatók. A legegyszerűbb eset az, amikor az A együtthatómátrix diagonális. Tekintsük például az

$$\begin{aligned} 5x_1 &= 10 \\ 2x_2 &= 4 \\ 3x_3 &= -1 \end{aligned}$$

egyenletrendszert. Ebben az esetben

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad b = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix},$$

és az ismeretlenek az egyenletekből közvetlenül kifejezhetők:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 \\ x_2 &= 2 \\ x_3 &= -\tfrac{1}{3}. \end{aligned}$$

Ha az együtthatómátrix az identitásmátrix, akkor a jobb oldalon a megoldás van. Könnyű dolgunk van háromszögmátrixú egyenletrendszerek esetén is. Az

$$\begin{array}{cccc} x_1 & +2x_2 & +2x_3 & = & 7 \\ & 4x_2 & +5x_3 & = & 17 \\ & & 9x_3 & = & 27 \end{array}$$

egyenletrendszer mátrixa felsőháromszög-mátrix. Az utolsó egyenletből kifejezhető az x_3 ismeretlen: $x_3 = 27/9 = 3$. Ezt behelyettesítjük a második egyenletbe, és kifejezzük x_2-t: $x_2 = 1/2$. Végül x_1 az első egyenletből adódik x_2 és x_3 behelyettesítésével: $x_1 = 7 - 2 \cdot 3 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 0$.

Legyen $A\underline{x} = \underline{b}$ négyzetes mátrixú egyenletrendszer, ahol A se nem diagonális, se nem háromszögmátrix. A kiküszöbölési eljárások lényege, hogy a rendszert átalakítjuk háromszögmátrixú vagy diagonálmátrixú rendszerré. Az átalakítás ekvivalens átalakítást jelent, azaz olyat, amely nem változtatja meg az egyenletrendszer megoldását. Így például

1. egyenleteket felcserélhetünk;

2. egyenleteket bármilyen nullától különböző számmal szorozhatunk;

3. bármelyik egyenlethez hosszáadhatjuk egy másik egyenlet tetszőleges számszorosát.

A következőkben két alapvető kiküszöbölési eljárást ismertetünk.

1. Gauss-elimináció

A Gauss-elimináció során az egyenletrendszert az előző részben ismertetett 1., 2. ill. 3. műveletek segítségével felsőháromszög-mátrixú rendszerré transzformáljuk. Ehhez célszerű az együtthatókat és a szabad tagokat táblázatba foglalni, és az átalakításokat ezen a táblázaton nyomon követni, hiszen az ismeretleneket fölösleges minden egyes lépésben kiírnunk. Az elemek nullára transzformálása során felülről lefelé és balról jobbra haladunk. Így elkerülhetjük, hogy már lenullázott elem újra feltöltődjön.

Alkalmazzuk ezt a módszert a

$$\begin{array}{cccccc} 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 4 \\ x_1 & +3x_2 & +2x_3 & = & 6 \\ x_1 & +2x_2 & +2x_3 & = & 5 \end{array}$$

egyenletrendszerre! Készítsük el a együtthatók és a szabad tagok táblázatát:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \end{array}\right]$$

Lépések:
1. Először a bal felső elem alatti számokat transzformáljuk nullára. Ehhez a 2. ill. a 3. egyenletből kivonjuk az első egyenlet $\frac{1}{2}$-szeresét:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 5/2 & 3/2 & 4 \\ 0 & 3/2 & 3/2 & 3 \end{array}\right]$$

2. A főátló alatt már csak egy nemnulla elem van: a 3. sor 2. eleme. Ezért a 3. sorból kivonjuk a 2. sor $\frac{3}{5}$-szörösét:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 5/2 & 3/2 & 4 \\ 0 & 0 & 3/5 & 3/5 \end{array}\right]$$

Tehát a megoldandó egyenletrendszer ekvivalens a

$$\begin{array}{rrrcl} 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 4 \\ & \frac{5}{2}x_2 & +\frac{3}{2}x_3 & = & 4 \\ & & \frac{3}{5}x_3 & = & \frac{3}{5} \end{array}$$

egyenletrendszerrel. Ebből az ismeretleneket alulról fölfelé kiküszöbölve az

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 1$$

megoldáshoz jutunk.

Ha egy egyenletrendszernek több megoldása is van, akkor megoldani annyit jelent, mint meghatározni az összes megoldását. A következő egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van. Határozzuk meg az összes megoldását a Gauss-elimináció technikáját alkalmazva!

$$\begin{array}{rrrcl} x_1 & +x_2 & +3x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & +6x_2 & -x_3 & = & 6 \\ 3x_1 & +7x_2 & +2x_3 & = & 7 \end{array}$$

Megoldás:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & -1 & 6 \\ 3 & 7 & 2 & 7 \end{array}\right] \to^{(2.)-(1.)\cdot 2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -7 & 4 \\ 3 & 7 & 2 & 7 \end{array}\right]$$

$$\to^{(3.)-(1.)\cdot 3} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -7 & 4 \\ 0 & 4 & -7 & 4 \end{array}\right] \to^{(3.)-(2.)} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Az utolsó előtti lépésben megjelenő két egyforma sor már mutatja, hogy az egyenletek nem voltak függetlenek egymástól. Ha a harmadik egyenletből kivonjuk a másodikat, egy csupa nulla sort kapunk. Ez a $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0$ egyenletnek felel meg, amelynek minden számhármas eleget tesz. Ha nulla sorokat kapunk, akkor néhány ismeretlen értékét tetszőlegesen megválaszthatjuk. Nevezetesen, ha k db nulla sort kapunk, akkor az utolsó k darab ismeretlen értékét választjuk meg tetszőlegesen. Azaz, a mi esetünkben legyen $x_3 = p \in \mathbb{R}$ tetszőleges. A maradék ismeretlenek értéke természetesen már függ ettől a p paramétertől: az x_2-t a második egyenletből határozhatjuk meg: $x_2 = 1 + \frac{7}{4}p$, végül az első egyenletből megvan az első ismeretlen: $x_1 = -\frac{19}{4}p$. Tehát az egyenletrendszer összes (végtelen sok) megoldását a következőképpen adhatjuk meg:

$$x_1 = -\frac{19}{4}p,\ x_2 = 1 + \frac{7}{4}p,\ x_3 = p,\ p \in \mathbb{R} \text{ tetszőleges.}$$

Megjegyezzük, hogy a Gauss-elimináció technikája nem csak négyzetes mátrixú egyenletrendszerekre alkalmazható, hanem tetszőleges lineáris egyenletrendszerre. Az átalakítások során arra törekedjünk, hogy a bal felső elemből 45 fokos egyenes mentén elhelyezkedő elemek alatt nullák legyenek.

2. Gauss–Jordan-elimináció

Ez a módszer olyan négyzetes mátrixú egyenletrendszerekre alkalmazható, amelyekben az együtthatómátrix determinánsa nem nulla (egyértelmű megoldás van). Ennél az eljárásnál a Gauss-féle kiküszöbölés lépései után a táblázat átalakítását tovább folytatjuk egészen addig, amíg az együtthatómátrix helyén az identitásmátrixot nem kapjuk. Ekkor a szabad tagok helyén leolvasható a megoldás.

Pl. Az előző 1. példában szereplő egyenletrendszert oldjuk meg a Gauss–Jordan-féle eljárással.
Megoldás: A Gauss-elimináció lépései után tovább folytatjuk az egyenletrendszer átalakítását. A lépéseket a következő táblázatok mutatják:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 4 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{3}{5} \end{array}\right] \to^{(3.)\cdot\frac{5}{3},\ (2.)\cdot\frac{2}{5}} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & \frac{8}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\to^{(2.)-(3.)\cdot\frac{3}{5}} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \to^{(1.)-(3.)} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\to^{(1.)-(2.)} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \to^{(1.)/2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Az utolsó résztáblázat jobb oldali oszlopa szerint az összes ismeretlen 1-gyel egyenlő.

Mátrixinvertálás Gauss- és Gauss–Jordan-eliminációval

A Gauss- és a Gauss–Jordan-féle eljárás mátrixinvertálásra is alkalmazható. Legyen

$A \in M_n$ olyan négyzetes mátrix, amelyre $|A| \neq 0$ (az ilyen mátroxoknak létezik inverzük). Keressük azt az $X \in M_n$ mátrixot, amely kielégíti $AX = I$ mátrixegyenletet. (Belátható, hogy ekkor $XA = I$ is teljesül.) Az egyenlet X megoldása nem más, mint a keresett A^{-1} inverz mátrix.
Vezessük be az

$$\underline{x}_i := \begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{pmatrix} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

jelölést. Az A mátrixszal megszorozva az $\underline{x}_i$ oszlopvektort, az $AX = I$ szorzatmátrix i-edik oszlopát kell megkapnunk, azaz az $\underline{e}_i \in \mathbb{R}^n$ oszlopvektort. (Itt $\underline{e}_i$ jelöli azt az $\mathbb{R}^n$-beli vektort, amelynek i-edik eleme 1, a többi nulla.) A feladat tehát az n darab

$$A\underline{x}_i = \underline{e}_i \quad i = 1, 2 \ldots, n$$

egyenletrendszer megoldása. Mivel ezek együtthatómátrixa közös, ezért a Gauss- és a Gauss–Jordan-elimináció esetén is mind az n egyenletrendszerben ugyanazokat az átalakításokat végezzük el az A mátrix elemein. Ezért célszerű az n db egyenletrendszert egyszerre megoldani, azaz a táblázatba mind az n db jobb oldalt belefoglalni. A Gauss-elimináció alkalmazásakor a bal oldali $n \times n$-es blokkot felsőháromszög-mátrixúvá alakítjuk, és ezután mind az n jobb oldallal visszahelyettesítünk. A Gauss–Jordan-elimináció esetén a bal oldalt az identitásmátrixszá transzformáljuk, ekkor a megfelelő átalakítások nyomán a jobb oldali blokkban magát az inverz mátrixot kapjuk meg.

Pl. Invertáljuk az

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -8 & 6 \end{bmatrix}$$

mátrixot!
Megoldás: 1. Gauss-eliminációval

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -4 & 1 & 0 \\ -8 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow^{(2.)+(1.)\cdot 4} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

A jobb oldali első oszlophoz a következő egyenletrendszer tartozik:

$$\begin{aligned} 2x_{11} - 4x_{21} &= 1 \\ -10x_{21} &= 4 \end{aligned}$$

Ebből $x_{21} = -\frac{2}{5}$ és $x_{11} = -\frac{3}{10}$. A második oszlophoz tartozó egyenletrendszer a következő:

$$\begin{aligned} 2x_{12} - 4x_{22} &= 0 \\ -10x_{22} &= 1 \end{aligned}$$

Ebből $x_{22} = -\frac{1}{10}$ és $x_{12} = -\frac{1}{5}$. Tehát a keresett inverz mátrix:

$$X = A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{10} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & -\frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

2. Gauss–Jordan-eliminációval: a fenti lépések után a táblázatot tovább alakítjuk:

$$\longrightarrow^{(2.)/(-10)} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{10} \end{array}\right] \longrightarrow^{(1.)/2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{10} \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow^{(1.)+(2.)\cdot 2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{3}{10} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{10} \end{array}\right]$$

Látható, hogy az utolsó lépésben a jobb oldali blokkban az előbb kiszámított inverz mátrixot kaptuk.