10. gyakorló feladatsor
Megoldások

1. Sajátértékek: $\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 1$. A 4-hez tartozó sajátvektorok:

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} 2p \\ p \end{bmatrix}, \quad p \in \mathbb{R},\ p \neq 0 \text{ tetszőleges.}$$

Az 1-hez tartozó sajátvektorok:

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} q \\ -q \end{bmatrix}, \quad q \in \mathbb{R},\ q \neq 0 \text{ tetszőleges.}$$

2. Komplex sajátértékeket kapunk: $\lambda_1 = 2 + i\sqrt{5}$, $\lambda_2 = 2 - i\sqrt{5}$.

3. Mivel λ sajátértéke A-nak, ezért létezik olyan $\underline{x} \neq \underline{0}$ vektor, amelyre $A\underline{x} = \lambda\underline{x}$. Szorozzuk meg ezt az egyenletet balról az A^{-1} inverz mátrixszal. (Ez létezik, mert a mátrixnak nemnulla a determinánsa.)

$$A^{-1}A\underline{x} = A^{-1}\lambda\underline{x}.$$

Mivel $A^{-1}A = I$, ezért ez az

$$\underline{x} = \lambda A^{-1}\underline{x}$$

egyenletet jelenti. Mivel λ egy reguláris mátrix sajátértéke, ezért $\lambda \neq 0$. Így az egyenlet mindkét oldalát eloszthatjuk λ-val:

$$\frac{1}{\lambda}\underline{x} = A^{-1}\underline{x}$$

Vagyis $\frac{1}{\lambda}$ sajátértéke A^{-1}-nek.

4. Legyen

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Ekkor $A\underline{x} = 1 \cdot \underline{x}$, azaz $1 \in \sigma(A)$.

5. a.) Számítsuk ki A sajátértékeit:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(4-\lambda) - 3 = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 5, \lambda_2 = 1$$

Van két különböző sajátérték $\Rightarrow$ létezik spektrálfelbontás. Mindkét sajátértékhez keressünk egy-egy sajátvektort!

1. $\lambda_1 = 5$-höz: az

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

vagyis a

$$\begin{aligned} -3u_1 + u_2 &= 0 \\ (3u_1 - u_2 &= 0) \end{aligned}$$

egyenletrendszer egy megoldását keressük. Minden olyan számpár megoldás, amelyre $u_2 = 3u_1$, azaz pl. $\underline{u} := (1, 3)$.

2. $\lambda_2 = 1$-hez: a megoldandó egyenletrendszer a következő:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ennek megoldása minden olyan számpár, amelyre $v_1 = -v_2$. Legyen pl. $\underline{v} = (1, -1)$.
Ezzel a keresett X mátrix:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Számítsuk ki az inverzét Gauss–Jordan-eliminációval:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow^{(2.)-(1.)\cdot 3} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow^{(2.)/(-4)} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right] \rightarrow^{(1.)-(2.)} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right]$$

Az X inverze tehát:

$$X^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Ezzel A spektrálfelbontása:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

b.)

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 18 & 19 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 18 & 19 \end{bmatrix}$$