1. gyakorló feladatsor
Megoldások

1. a.) $\underline{0}$, b.) $-13\underline{k}$

2. a.) $|\underline{a}| = \sqrt{9+16} = 5$, b.) $|\underline{b}| = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14}$, c.) $|\underline{c}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

3. Végtelen sok lehetőség van, pl.:

$$\underline{0} = \underline{a} - \frac{1}{2}\underline{b} = 2\underline{a} - \underline{b} = 4\underline{a} - 2\underline{b}$$

4. Nem. (Ugyanis az $\underline{i}$ és $\underline{j}$ vektor összes lineáris kombinációja az általuk kifeszített síkban van, a $\underline{k}$ pedig nincs benne ebben a síkban. A választ úgy is megindokolhatjuk, hogy a három vektor lineárisan független rendszert alkot, ezért egyik sem állítható elő a többi lineáris kombinációjaként.)

5. Rendezzünk át minden tagot a bal oldalra:

$$\alpha_1\underline{i} + \alpha_2\underline{j} - \beta_1\underline{i} - \beta_2\underline{j} = \underline{0},$$

amiből a tagok összevonásával:

$$(\alpha_1 - \beta_1)\underline{i} + (\alpha_2 - \beta_2)\underline{j} = \underline{0}.$$

Itt a bal oldalon $\underline{i}$ és $\underline{j}$ lineáris kombinációja áll, amely egyenlő a nullvektorral. Tudjuk, hogy az $\underline{i}$ és a $\underline{j}$ vektor lineárisan független rendszert alkot, vagyis lineáris kombinációjuk csak úgy adhatja a nullvektort, ha mindkét együttható nulla, azaz $\alpha_1 - \beta_1 = 0$ és $\alpha_2 - \beta_2 = 0$. Ez pedig éppen azt jelenti, hogy $\alpha_1 = \beta_1$ és $\alpha_2 = \beta_2$ lehet csak.

6. a.) Azt kell megvizsgálnunk, hogy milyen együtthatókkal teljesülhet az

$$\alpha\underline{i} + \beta(\underline{i} + \underline{j}) + \gamma(\underline{i} + \underline{j} + \underline{k}) = \underline{0}$$

egyenlőség. Rendezzük át az egyenletet úgy, hogy a bal oldalon az $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ vektorok lineáris kombinációja álljon:

$$(\alpha + \beta + \gamma)\underline{i} + (\beta + \gamma)\underline{j} + \gamma\underline{k} = \underline{0}$$

Mivel $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ lineárisan független rendszer, ez az egyenlőség csak úgy állhat fenn, ha mindegyik vektor együtthatója nulla, azaz

$$\alpha + \beta + \gamma = 0, \quad \beta + \gamma = 0, \quad \gamma = 0.$$

Ezzel egy háromismeretlenes egyenletrendszert kaptunk az α, β, γ számokra, amelynek egyedüli megoldása: $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0$. Tehát az eredeti három vektor is lineárisan független rendszert alkot.

b.) Számolás nélkül is látszik, hogy ezeknek a vektoroknak az összege $\underline{0}$, azaz

$$1 \cdot (\underline{i} - \underline{j}) + 1 \cdot (\underline{j} - \underline{k}) + 1 \cdot (\underline{k} - \underline{i}) = \underline{0}.$$

Ez egy nemtriviális lineáris kombináció, amely a nullvektort adja, így a vektorok lineárisan összefüggőek.

c.) Lineárisan összefüggő a rendszer, mert benne van a nullvektor.

d.) Lineárisan összefüggő a rendszer, mert négy vektor a térben csak összefüggő lehet.

e.) Lineárisan független a rendszer. A megoldás hasonló, mint az a.) feladatban. (Az $\alpha + \beta = 0, \ \alpha + \gamma = 0, \ \beta + \gamma = 0$ egyenletrendszerhez jutunk.)

7. Ahhoz, hogy az $\underline{i}+\underline{j}+\underline{k}$ vektort fel lehessen írni $\alpha(\underline{i}-\underline{j})+\beta(\underline{j}-\underline{k})+\gamma(\underline{k}+\underline{i})$ alakban, annak kell teljesülnie, hogy $\alpha - \gamma = 1, \ \beta - \alpha = 1$ és $\gamma - \beta = 1$. Ennek az egyenletrendszernek pedig nincs megoldása. (Geometriailag is látszik: az $\underline{i} - \underline{j}$, $\underline{j} - \underline{k}$, $\underline{k} - \underline{i}$ vektorok egy síkban vannak, az $\underline{i} + \underline{j} + \underline{k}$ vektor pedig nincs benne ebben a síkban.)

8. Ha $\underline{a}$ és $\underline{b}$ lineárisan függetlenek, akkor az $\alpha_1\underline{a} + \beta_1\underline{b} = \underline{0}$ egyenlőség csak $\alpha_1 = 0$ és $\beta_1 = 0$ esetén teljesül. Tudjuk ugyanakkor, hogy $\underline{a}, \underline{b}$ és $\underline{c}$ lineárisan összefüggő rendszert alkot, tehát léteznek olyan $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ nem mind nulla számok, amelyekkel

$$\alpha_2\underline{a} + \beta_2\underline{b} + \gamma_2\underline{c} = \underline{0}.$$

Itt γ_2 nem lehet nulla, mivel ha az lenne, akkor $\alpha_2\underline{a} + \beta_2\underline{b} = \underline{0}$ lenne úgy, hogy $\alpha_2 \neq 0$ vagy $\beta_2 \neq 0$, ez pedig ellentmondana $\underline{a}$ és $\underline{b}$ lineáris függetlenségének. Így γ_2-vel oszthatunk:

$$\frac{\alpha_2}{\gamma_2}\underline{a} + \frac{\beta_2}{\gamma_2}\underline{b} + \underline{c} = \underline{0}.$$

Ebből $\underline{c}$ előáll

$$\underline{c} = -\frac{\alpha_2}{\gamma_2}\underline{a} - \frac{\beta_2}{\gamma_2}\underline{b}$$

alakban, azaz $\underline{a}$ és $\underline{b}$ lineáris kombinációjaként.

9. Nem, ugyanis két vektor közül legalább az egyik nem a nullvektor. Ennek összes számszorosát nem tartalmazza a halmaz.

10. Igen, a sík nullvektorát vagy a tér nullvektorát tartalmazó egyelemű V halmaz. (Hiszen ekkor $\lambda \cdot \underline{0} = \underline{0} \in V \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$, és $\underline{0} + \underline{0} = \underline{0} \in V$.) Az összes többi vektortér végtelen sok elemből áll.

11. Nem, mert a bázisnak lineárisan független rendszernek kell lenni, egy nullvektort tartalmazó vektorrendszer pedig mindig lineárisan összefüggő.

12. a.) generálórendszer és bázis, b.) generálórendszer, nem bázis

13. a.) generálórendszer és bázis, b.) nem generálórendszer, így nem bázis, c.) nem generálórendszer, így nem bázis, d.) generálórendszer, nem bázis, e.) generálórendszer és bázis

14. Legyen $\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n\}$ generálórendszer valamely V vektortérben. Ekkor egy tetszőleges $\underline{v} \in V$ vektor előáll
$$\underline{v} = \alpha_1\underline{a}_1 + \alpha_2\underline{a}_2 + \ldots + \alpha_n\underline{a}_n$$
alakban. Vegyünk hozzá a generálórendszerhez egy tetszőleges $\underline{b} \in V$ vektort. Ekkor minden $\underline{v} \in V$ előáll ezen n+1 elemből, pl. a következőképpen:
$$\underline{v} = \alpha_1\underline{a}_1 + \alpha_2\underline{a}_2 + \ldots + \alpha_n\underline{a}_n + 0\underline{b}.$$
Tehát a kibővített halmaz is generálórendszer.

15. a.) $(1, 1)$ (mivel $\overrightarrow{AC} = 1\overrightarrow{AB} + 1\overrightarrow{AD}$) b.) $(2, 1)$ c.) $(1, 2)$ d.) $(0, 1)$

16. Azon α_1 és α_2 együtthatókat keressük, amelyekre
$$2\underline{i} + 6\underline{j} = \alpha_1(\underline{i} + \underline{j}) + \alpha_2 \cdot 2\underline{i}.$$
Másképpen:
$$2\underline{i} + 6\underline{j} = (\alpha_1 + 2\alpha_2)\underline{i} + \alpha_1 \cdot \underline{j}.$$
Rendezzük a tagokat a bal oldalra:
$$(2 - \alpha_1 - 2\alpha_2)\underline{i} + (6 - \alpha_1)\underline{j} = \underline{0}.$$
Az $\underline{i}$ és $\underline{j}$ vektorok függetlenek, ezért
$$2 - \alpha_1 - 2\alpha_2 = 0 \quad \text{és} \quad 6 - \alpha_1 = 0$$
kell, hogy legyen, amiből $\alpha_1 = 6$ és $\alpha_2 = -2$. Tehát az új koordináták: $(6, -2)$.

17. $\left(\frac{9}{2}, \frac{13}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

18. a.) Legyen $\underline{a} = \alpha_1\underline{i} + \alpha_2\underline{j}$ és $\underline{b} = \beta_1\underline{i} + \beta_2\underline{j}$. Ekkor
$$\underline{a} + \underline{b} = \alpha_1\underline{i} + \alpha_2\underline{j} + \beta_1\underline{i} + \beta_2\underline{j} = (\alpha_1 + \beta_1)\underline{i} + (\alpha_2 + \beta_2)\underline{j},$$
amiből $\underline{a} + \underline{b}$ koordinátái: $(\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2)$. Azaz összeadásnál a megfelelő koordináták összeadódnak.
b.) Legyen $\underline{a} = \alpha_1\underline{i} + \alpha_2\underline{j}$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ekkor
$$\lambda \cdot \underline{a} = \lambda \cdot (\alpha_1\underline{i} + \alpha_2\underline{j}) = (\lambda \cdot \alpha_1)\underline{i} + (\lambda \cdot \alpha_2)\underline{j}.$$

Ebből a $\lambda \cdot \underline{a}$ vektor Descartes-koordinátái: $(\lambda \cdot \alpha_1, \lambda \cdot \alpha_2)$. Azaz az vektor mindkét Descartes-koordinátája λ-val szorzódik. Könnyen meggondolható, hogy ez nemcsak a descartesi, hanem tetszőleges bázisvektorok esetén is igaz. (A levezetés ugyanez.)