2. gyakorló feladatsor

Polárkoordináták. Az $\mathbb{R}^n$ vektortér. Skaláris, vektoriális és vegyes szorzat

1. Adjuk meg az alábbi síkvektorok polárkoordinátás alakját:

$$a.)\ 3\underline{i}+3\underline{j} \qquad b.)\ 5\underline{i} \qquad c.)\ 4\underline{i}+3\underline{j} \qquad d.)\ -\underline{i}+\underline{j}$$

2. Adjuk meg a következő, polárkoordinára-rendszerben adott vektorok Descartes-koordinátáit:

$$a.)\ (2,\frac{3\pi}{2})_p \qquad b.)\ (3,\frac{5\pi}{4})_p \qquad c.)\ (\frac{1}{2},\pi)_p \qquad c.)\ (2,\frac{\pi}{3})_p$$

3. Ha egy síkvektor polárkoordinátás alakja $(r,\phi)_p$, akkor mi lesz a vektor λ-szorosának polárkoordinátás alakja, ha λ egy nemnulla szám?

4. Végezzük el az alábbi műveleteket:
a.) $2\cdot(1,8)-3\cdot(-2,-1)$
b.) $\frac{1}{2}\cdot(2,4,4)+10\cdot(\frac{1}{2},\frac{7}{2},0)$

5. Adjunk meg bázist a.) $\mathbb{R}^2$-ben, b.) $\mathbb{R}^3$-ban és c.) $\mathbb{R}^n$-ben, ahol $n\in\mathbb{N}$ tetszőleges!

6. Legyen $\underline{a}=2\underline{j}$, $\underline{b}=\underline{i}+\underline{k}$. Számítsuk ki az $5(\underline{a}+\underline{b})-2\underline{b}$ vektor Descartes-koordinátáit kétféleképpen:
a.) végezzük el a műveleteket a térvektorokkal, majd írjuk fel az eredményt a Descartes-koordináta-rendszerben;
b.) a számolást a Descartes-koordinátákból álló számhármasokkal végezzük el.

7. Lineárisan összefüggőek-e a következő számhármasok: $(1,2,3),(1,2,0),(2,0,0)$?

8. Lássuk be, hogy az $\mathbb{R}^2$ vektortéren értelmezett összeadás és skalárral való szorzás rendelkezik mindazzal az – összesen hét – tulajdonsággal, amelyekkel a geometriai vektorok vektorterei.

9. Számítsuk ki az $\underline{a}\cdot\underline{b}$ skaláris szorzatot a következő példákban:
a.) $|\underline{a}|=\sqrt{3}, |\underline{b}|=2,\ \gamma=30^o$
b.) $|\underline{a}|=\sqrt{5}, |\underline{b}|=1,\ \gamma=\frac{\pi}{2}$
c.) $|\underline{a}|=3, |\underline{b}|=2,\ \gamma=180^o$

10. Mekkora szöget zár be egymással
a.) az $\underline{a}=\underline{i}+\underline{k}$ és a $\underline{b}=\underline{j}+\underline{k}$ vektor?
b.) az $(1,2,5)$ és az $(1,1,3)$ vektor?

11. Határozzuk meg az $\underline{a}=\underline{i}+\underline{j}$, $\underline{b}=\underline{j}+\underline{k}$, $\underline{c}=\underline{i}+2\underline{j}-2\underline{k}$ vektorok által páronként bezárt szögeket!

12. Mutassuk meg, hogy ha $\underline{a}$ és $\underline{b}$ tetszőleges vektorok, akkor

$$\underline{b} - \frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{|\underline{a}|^2} \cdot \underline{a} \perp \underline{a}$$

13. Legyen $\underline{a} = (2, -3, 1)$, $\underline{b} = (7, 4, z)$. Határozzuk meg z értékét abból a feltételből, hogy $\underline{a}$ és $\underline{b}$ merőleges egymásra!

14. Határozzuk meg u értékét úgy, hogy az $\underline{a} = (1, 0, 3)$, $\underline{b} = (-2, 1, 0)$, $\underline{c} = (u, -1, 2)$ vektorok komplanárisak legyenek (egy síkba essenek, vagy, ami ugyanazt jelenti, egy közös síkkal párhuzamosak legyenek).

15. Számítsuk ki az $\underline{a} = (2, -1, 3)$ és $\underline{b} = (1, 0, 7)$ vektorok vektoriális szorzatát! Mekkora a két vektor által kifeszített paralelogramma területe?

16. Számítsuk ki az $\underline{a} = (2, 1, 4)$, $\underline{b} = (5, 3, 2)$ és $\underline{c} = (3, 6, 7)$ vektorok $(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c})$ vegyes szorzatát! Mekkora a vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata?

17. Írjuk fel két síkvektor skaláris szorzatát polárkoordinátákkal kifejezett alakban!

18. Bizonyítsuk be, hogy az $Ax + By + Cz + D = 0$ egyenletű síkra merőleges az (A, B, C) vektor. (Más szóval: (A, B, C) normálvektora a síknak.)

19. Adva vannak a $\underline{v}_1 = 3\underline{i} + 2\underline{j} - 4\underline{k}$, $\underline{v}_2 = -\underline{i} + 2\underline{j} + \underline{k}$, $\underline{v}_3 = 3\underline{i} + 2\underline{k}$ vektorok. Számítsuk ki az alábbiakat:
    a.) $\underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2$ b.) $\underline{v}_1 \times \underline{v}_2$ c.) $(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) \times \underline{v}_3$ d.) $(\underline{v}_2 \cdot \underline{v}_3)\underline{v}_1$ e.) $\underline{v}_1 \times (\underline{v}_3 - \underline{v}_2)$
    f.) $4(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) \cdot \underline{v}_3$ g.) $(\underline{v}_2 \times \underline{v}_3) \cdot \underline{v}_1$

20. Lássuk be, hogy tetszőleges térvektorokra igazak a következő azonosságok:
    a.) $(\underline{a} \times \underline{b}) \times (\underline{c} \times \underline{d}) = (\underline{c}, \underline{d}, \underline{a})\underline{b} - (\underline{c}, \underline{d}, \underline{b})\underline{a}$
    b.) $(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot (\underline{c} \times \underline{d}) = (\underline{a} \cdot \underline{c})(\underline{d} \cdot \underline{b}) - (\underline{d} \cdot \underline{a})(\underline{c} \cdot \underline{b})$
    c.) $\underline{p} \times [\underline{q} \times (\underline{r} \times \underline{s})] = (\underline{p}, \underline{r}, \underline{s})\underline{q} - (\underline{p} \cdot \underline{q})(\underline{r} \times \underline{s})$
    d.) $((\underline{a} \times \underline{b}) \times (\underline{b} \times \underline{c}), (\underline{b} \times \underline{c}) \times (\underline{c} \times \underline{a}), (\underline{c} \times \underline{a}) \times (\underline{a} \times \underline{b})) = (\underline{a}, \underline{b}, \underline{c})^4$