2. gyakorló feladatsor
Megoldások

1. a.) $(\sqrt{18}, \frac{\pi}{4})_p$ b.) $(5, 0)_p$ c.) $(5, \mathrm{arctg}\frac{3}{4})_p$ d.) $(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4})_p$

2. a.) $(0, -2)$ b.) $(-\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}})$ c.) $(-\frac{1}{2}, 0)$ d.) $(1, \sqrt{3})$

3. $\lambda \geq 0$ esetén $(\lambda r, \phi)_p$, $\lambda < 0$ esetén $(-\lambda r, \phi + \pi)_p$. (Tehát itt nem igaz az, hogy mindkét koordináta λ-val szorzódik.)

4. a.) $2 \cdot (1, 8) - 3 \cdot (-2, -1) = (2, 16) - (-6, -3) = (8, 19)$;
   b.) $\frac{1}{2} \cdot (2, 4, 4) + 10 \cdot (\frac{1}{2}, \frac{7}{2}, 0) = (1, 2, 2) + (5, 35, 0) = (6, 37, 2)$

5. a.) $\{(1, 0), (0, 1)\}$
   b.) $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$
   c.) azon $\underline{e}_i \in \mathbb{R}^n, i = 1, 2, \ldots, n$ vektorok halmaza, amelyek i-edik koordinátája 1, a többi pedig 0.

6. a.) $5(\underline{a} + \underline{b}) - 2\underline{b} = 5(2\underline{j} + \underline{i} + \underline{k}) - 2(\underline{i} + \underline{k}) = 3\underline{i} + 10\underline{j} + 3\underline{k} = (3, 10, 3)$.
   b.) $5(\underline{a} + \underline{b}) - 2\underline{b} = 5((0, 2, 0) + (1, 0, 1)) - 2(1, 0, 1) = (5, 10, 5) - (2, 0, 2) = (3, 10, 3)$.

7. Azt kell eldönteni, hogy milyen α, β, γ együtthatókkal állhat fenn a következő egyenlőség:

$$\alpha(1, 2, 3) + \beta(1, 2, 0) + \gamma(2, 0, 0) = (0, 0, 0).$$

Végezzük el a műveleteket a bal oldalon:

$$(1\alpha, 2\alpha, 3\alpha) + (1\beta, 2\beta, 0) + (2\gamma, 0, 0) = (0, 0, 0).$$

$$(\alpha + \beta + 2\gamma, 2\alpha + 2\beta, 3\alpha) = (0, 0, 0).$$

Ez két számhármas egyenlősége. Mivel két számhármas pontosan akkor egyenlő, ha a megfelelő elemeik egyenlőek, ezért az egyenlőség csak akkor áll fenn, ha a bal oldali vektor minden eleme 0. Azaz

$$\alpha + \beta + 2\gamma = 0, \quad 2\alpha + 2\beta = 0, \quad 3\alpha = 0.$$

Ennek az egyenletrendszernek pedig az egyetlen megoldása: $\alpha = 0,\ \beta = 0,\ \gamma = 0$. Így a megadott számhármasok lineárisan függetlenek.

8. 1. Az összeadás kommutatív, mivel

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d) = (c + a, d + b) = (c, d) \oplus (a, b) \quad \forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$$

(Itt és a többi tulajdonság bizonyításánál a valós számok közötti műveletektől való megkülönböztetésül használjuk a bekarikázott műveleti jeleket, amikor számpárok közötti műveletekről van szó.)

2. Az összeadás asszociatív, azaz

$$(a,b) \oplus \{(c,d) \oplus (e,f)\} = \{(a,b) \oplus (c,d)\} \oplus (e,f) \quad \forall (a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{R}^2$$

ugyanis a bal oldalon

$$(a,b) \oplus \{(c,d) \oplus (e,f)\} = (a,b) \oplus (c+e, d+f) = (a+(c+e), b+(d+f)),$$

a jobb oldalon pedig

$$\{(a,b) \oplus (c,d)\} \oplus (e,f) = (a+c, b+d) \oplus (e,f) = ((a+c)+e, (b+d)+f) = (a+(c+e), b+(d+f)).$$

3. Létezik olyan számpár (ún. nullelem), amelyet bármely (a,b) számpárhoz adva (a,b)-t kapjuk, nevezetesen a $(0,0)$:

$$(a,b) \oplus (0,0) = (a+0, b+0) = (a,b)$$

4. Minden (a,b) számpárhoz létezik negatív elem, azaz olyan számpár, amelyet (a,b)-hez adva a $(0,0)$ számpárt kapjuk: ez nem más, mint a $(-a,-b)$ számpár:

$$(a,b) \oplus (-a,-b) = (a-a, b-b) = (0,0) \quad \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$$

5. Teljesül a vektordisztributivitás, azaz

$$\lambda \odot \{(a,b) \oplus (c,d)\} = \lambda \odot (a,b) \oplus \lambda \odot (c,d) \quad \forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

ugyanis a bal oldal

$$\lambda \odot \{(a,b) \oplus (c,d)\} = \lambda \odot (a+c, b+d) = (\lambda(a+c), \lambda(b+d)),$$

a jobb oldal pedig

$$\lambda \odot (a,b) \oplus \lambda \odot (c,d) = (\lambda a, \lambda b) \oplus (\lambda c, \lambda d) = (\lambda a + \lambda c, \lambda b + \lambda d) = (\lambda(a+c), \lambda(b+d))$$

6. Teljesül a skalárdisztributivitás, azaz

$$(\lambda + \mu) \odot (a,b) = \lambda \odot (a,b) \oplus \mu \odot (a,b) \quad \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

ugyanis a bal oldal

$$(\lambda + \mu) \odot (a,b) = ((\lambda+\mu)a, (\lambda+\mu)b),$$

a bal oldal pedig

$$\lambda \odot (a,b) \oplus \mu \odot (a,b) = (\lambda a, \lambda b) \oplus (\mu a, \mu b) = (\lambda a + \mu a, \lambda b + \mu b) = ((\lambda+\mu)a, (\lambda+\mu)b)$$

7. Teljesül a skalárasszociativitás, azaz

$$\lambda \odot (\mu \odot (a,b)) = (\lambda \cdot \mu) \odot (a,b) = \mu \odot (\lambda \odot (a,b)) \quad \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

ugyanis mindhárom kifejezés $(\lambda\mu a, \lambda\mu b)$-vel egyenlő.

9. a.) 3 b.) 0 c.) -6

10. a.) $\underline{a} \cdot \underline{b} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1$, $|\underline{a}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $|\underline{b}| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.
Ebből $\cos\gamma = \frac{1}{2}$, így $\gamma = 60^o$
b.) $\gamma = \arccos \frac{18}{\sqrt{330}}$

11. $\gamma(\underline{a}, \underline{b}) = 60^o$, $\gamma(\underline{a}, \underline{c}) = 45^o$, $\gamma(\underline{b}, \underline{c}) = 90^o$

12. Mutassuk meg, hogy a bal oldali kifejezést $\underline{a}$-val skalárisan szorozva 0-t kapunk:

$$\underline{b} \cdot \underline{a} - \frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{|\underline{a}|^2} \cdot (\underline{a} \cdot \underline{a}) = \underline{b} \cdot \underline{a} - \frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{|\underline{a}|^2} \cdot |\underline{a}|^2 = \underline{b} \cdot \underline{a} - \underline{b} \cdot \underline{a} = 0$$

13. A két vektor akkor merőleges egymásra, ha a skaláris szorzatuk 0. Ebből $z = -2$.

14. A vektorok vegyes szorzatának nullával kell egyenlőnek lennie. Ebből $u = \frac{8}{3}$.

15. $\underline{a} \times \underline{b} = -7i - 11j + k = (-7, -11, 1)$, így a paralelogramma területe: $|\underline{a} \times \underline{b}| = \sqrt{171} \approx 13,08$

16. Vegyes szorzat: $(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) = 73$. Ennyi egyben a keresett paralelepipedon térfogata is.

17. Ha a polárkoordináta-rendszerben $\underline{a} = (r_1, \phi_1)_p$ és $\underline{b} = (r_2, \phi_2)_p$, akkor a Descartes-koordináta-rendszerben $\underline{a} = (r_1 \cos\phi_1, r_1 \sin\phi_1)$ és $\underline{b} = (r_2 \cos\phi_2, r_2 \sin\phi_2)$. Így

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = r_1 \cos\phi_1 \cdot r_2 \cos\phi_2 + r_1 \sin\phi_1 \cdot r_2 \sin\phi_2$$

18. Belátjuk, hogy (A, B, C) merőleges a megadott síkban fekvő összes vektorra.
Legyen $P_1(x_1, y_1, z_y)$ és $P_2(x_2, y_2, z_2)$ két tetszőleges pont ezen a síkon. Azt akarjuk belátni, hogy a $\overrightarrow{P_2P_1} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$ vektor merőleges az (A, B, C)-re. Mivel P_1 és P_2 is a síkon van, mindkettő kielégíti a sík egyenletét, azaz

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \quad \text{és} \quad Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0.$$

Vonjuk ki az első egyenletből a másodikat:

$$A(x_1 - x_2) + B(y_1 - y_2) + C(z_1 - z_2) = 0,$$

azaz

$$(A, B, C) \cdot (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2) = 0.$$

Tehát $(A, B, C) \perp \overrightarrow{P_2P_1}$.

19. a.) -3 b.) $(10, 1, 8)$ c.) $(8, -13, -12)$ d.) $(-3, -2, 4)$ e.) $(-6, -19, -14)$ f.) 0 g.) 46

20. a.) Jelölje $\underline{e}$ a $\underline{c} \times \underline{d}$ vektort.

$(\underline{a}\times\underline{b})\times(\underline{c}\times\underline{d}) = (\underline{a}\times\underline{b})\times\underline{e} = (\underline{e}\cdot\underline{a})\underline{b}-(\underline{b}\cdot\underline{e})\underline{a} = ((\underline{c}\times\underline{d})\cdot\underline{a})\underline{b}-(\underline{b}\cdot(\underline{c}\times\underline{d}))\underline{a} = (\underline{c},\underline{d},\underline{a})\underline{b}-(\underline{c},\underline{d},\underline{b})\underline{a}$

b.) Jelölje ismét $\underline{e}$ a $\underline{c} \times \underline{d}$ vektort.

$(\underline{a}\times\underline{b})\cdot(\underline{c}\times\underline{d}) = (\underline{a}\times\underline{b})\cdot\underline{e} = (\underline{a},\underline{b},\underline{e}) = (\underline{e},\underline{a},\underline{b}) = ((\underline{c}\times\underline{d})\times\underline{a})\cdot\underline{b} = ((\underline{a}\cdot\underline{c})\underline{d} - (\underline{d}\cdot\underline{a})\underline{c})\cdot\underline{b} =$
$((\underline{a}\cdot\underline{c})\underline{d})\cdot\underline{b} - ((\underline{d}\cdot\underline{a})\underline{c}))\cdot\underline{b} = (\underline{a}\cdot\underline{c})(\underline{d}\cdot\underline{b}) - (\underline{d}\cdot\underline{a})(\underline{c}\cdot\underline{b})$

c.) Jelölje $\underline{e}$ az $\underline{r} \times \underline{s}$ vektort.

$\underline{p}\times[\underline{q}\times(\underline{r}\times\underline{s})] = \underline{p}\times[\underline{q}\times\underline{e}] = -[\underline{q}\times\underline{e}]\times\underline{p} = -(\underline{p}\cdot\underline{q})\underline{e}+(\underline{e}\underline{p})\underline{q} = -(\underline{p}\cdot\underline{q})(\underline{r}\times\underline{s})+[(\underline{r}\times\underline{s})\cdot\underline{p}]\underline{q} =$
$= -(\underline{p}\cdot\underline{q})(\underline{r}\times\underline{s}) + (\underline{p},\underline{r},\underline{s})\underline{q} = (\underline{p},\underline{r},\underline{s})\underline{q} - (\underline{p}\cdot\underline{q})(\underline{r}\times\underline{s})$

d.) $((\underline{a}\times\underline{b})\times(\underline{b}\times\underline{c}), (\underline{b}\times\underline{c})\times(\underline{c}\times\underline{a}), (\underline{c}\times\underline{a})\times(\underline{a}\times\underline{b})) =$
$(((\underline{b}\times\underline{c})\cdot\underline{a})\underline{b} - (\underline{b}\cdot(\underline{b}\times\underline{c}))\underline{a}, ((\underline{c}\times\underline{a})\cdot\underline{b})\underline{c} - (\underline{c}\cdot(\underline{c}\times\underline{a}))\underline{b}, ((\underline{a}\times\underline{b})\cdot\underline{c})\underline{a} - (\underline{a}\cdot(\underline{a}\times\underline{b}))\underline{c}) =$
$((\underline{b},\underline{c},\underline{a})\underline{b}, (\underline{a},\underline{b},\underline{c})\underline{c}, (\underline{a},\underline{b},\underline{c})\underline{a})$.

Legyen $d := (\underline{a},\underline{b},\underline{c})$.

$(d\underline{b}, d\underline{c}, d\underline{a}) = (d\underline{b}\times d\underline{c})\cdot d\underline{a} = d^3(\underline{b}\times\underline{c})\underline{a} = d^3(\underline{a},\underline{b},\underline{c}) = (\underline{a},\underline{b},\underline{c})^4$