4. gyakorló feladatsor
Mátrixszámítás

1. Legyenek adva a következő mátrixok:

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&0\\2&4\\0&3\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}0&0&1\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}2\\0\\4\end{bmatrix}$$

Mely mátrixkifejezések léteznek az alábbiak közül, és mennyi az értékük?
a.) $A\cdot D$ b.) A^2+A c.) B^2-2B d.) $C+D^T$ e.) A^TA+CC^T f.) BB^T+C

2. Igaz-e, hogy ha $A\in M_n$ és $B\in M_n$, akkor $A\cdot B=B\cdot A$? Ha igen, bizonyítsuk be, ha nem, mondjunk ellenpéldát!

3. Ha az $A\in M_n$ és $B\in M_n$ mátrixokra $AB=BA$, akkor azt mondjuk, hogy A és B kommutál. Mondjunk példát kommutáló mátrixokra! Mondjunk példát olyan mátrixra is, amelyik minden más (vele azonos méretű) mátrixszal kommutál.

4. Igaz-e, hogy ha az A és B mátrixok szorzata nullmátrix (azaz minden eleme nulla), akkor A és B közül legalább az egyik is nullmátrix?

5. Legyen A egy négyzetes mátrix. Igaz-e, hogy ha $A^2=0$, akkor $A=0$?

6. Mely összefüggések igazak tetszőleges $A,B\in M_n$ mátrixok esetén? Az igazakat bizonyítsuk be, a hamisakra keressünk ellenpéldát!
a.) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$
b.) $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$
c.) $A^2-I=(A-I)(A+I)$, ahol I az $n\times n$-es identitásmátrix

7. Számítsuk ki az alábbi mátrixhatványokat:

$$a.)\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}^n\qquad b.)\begin{bmatrix}\cos\phi&-\sin\phi\\\sin\phi&\cos\phi\end{bmatrix}^n,$$

ahol n tetszőleges természetes szám, és ϕ tetszőleges szög.

8. Igazoljuk, hogy minden $A\in M_n$ mátrix felírható egy szimmetrikus és egy antiszimmetrikus mátrix összegeként. (Segítség: Mutassuk meg, hogy a következő felbontás jó: $A=A_{\mathrm{sz}}+A_{\mathrm{a}}$, ahol $A_{\mathrm{sz}}=\frac{1}{2}(A+A^T)$ és $A_{\mathrm{a}}=\frac{1}{2}(A-A^T)$.) Ennek alapján bontsuk fel egy szimmetrikus és egy antiszimmetrikus mátrix összegére a következő mátrixot:

$$A=\begin{bmatrix}3&1&8\\2&-1&6\\-2&-3&0\end{bmatrix}$$

9. Számítsuk ki a következő mátrixok determinánsát:

$$a.)\begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \quad b.)\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad c.)\begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad d.)\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 10 & 10 & 10 & 10 \\ 100 & 100 & 100 & 100 \\ 1000 & 1000 & 1000 & 1000 \end{bmatrix}$$