4. gyakorló feladatsor

Megoldások

1. a.) $\begin{bmatrix} 14 \\ 32 \\ 50 \end{bmatrix}$ b.) $\begin{bmatrix} 31 & 38 & 45 \\ 70 & 86 & 102 \\ 109 & 134 & 159 \end{bmatrix}$ c.) $\nexists$ d.) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ e.) $\nexists$ f.) $\nexists$

2. Nem igaz, ugyanis pl. legyen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ekkor $A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \neq B \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. A mátrixok szorzása tehát nem kommutatív művelet.

3. Pl. az

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrixok kommutálnak. Minden mátrix kommutál pl. a vele azonos méretű identitásmátrixszal és nullmátrixszal.

4. Nem igaz, mert pl. az

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrixok közül egyik sem nulla, a szorzatuk mégis a 2×2-es nullmátrix.

5. Nem, legyen pl. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

6. a.) Fejtsük ki a bal oldali kifejezést:

$$(A + B)^2 = (A + B) \cdot (A + B) = A \cdot A + B \cdot A + A \cdot B + B \cdot B$$

A jobb oldali első tag A^2, az utolsó B^2. A kérdés tehát már csak az: vajon bármely két négyzetes mátrixra igaz-e, hogy $2AB = AB+BA$, azaz $AB = BA$? Nem, mert láttuk, hogy a szorzás nem kommutatív a mátrixok körében. Természetesen kommutáló mátrixokra igaz az összefüggés.

b.) Szintén csak kommutáló mátrixokra igaz.

c.) Igaz, mert az identitásmátrix minden mátrixszal kommutál, és $I^2 = I$.

7. a.) Számítsuk ki először $n = 2$-re és $n = 3$-ra:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sejtés: $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Igazoljuk teljes indukcióval!

Azt láttuk, hogy az állítás $n = 2$-re és $n = 3$-ra igaz. Mutassuk meg, hogy ha n-re igaz, akkor $n + 1$-re is!

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{n+1}$$

b.) A hatvány $n = 2$-re:

$$\begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} \cos^2\phi - \sin^2\phi & -2\sin\phi\cos\phi \\ 2\sin\phi\cos\phi & -\sin^2\phi + \cos^2\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\phi & -\sin 2\phi \\ \sin 2\phi & \cos 2\phi \end{bmatrix}$$

Sejtés: $\begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \cos n\phi & -\sin n\phi \\ \sin n\phi & \cos n\phi \end{bmatrix}$

Igazoljuk teljes indukcióval! Az állítás $n = 2$-re igaz. Mutassuk meg, hogy ha igaz n-re, akkor $n + 1$-re is.

$$\begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} \cos n\phi & -\sin n\phi \\ \sin n\phi & \cos n\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(n+1)\phi & -\sin(n+1)\phi \\ \sin(n+1)\phi & \cos(n+1)\phi \end{bmatrix}?$$

Belátandó tehát a következő négy egyenlőség:

$\cos n\phi\cos\phi - \sin n\phi\sin\phi = \cos(n+1)\phi$

$-\cos n\phi\sin\phi - \sin n\phi\cos\phi = -\sin(n+1)\phi$

$\sin n\phi\cos\phi + \cos n\phi\sin\phi = \sin(n+1)\phi$

$-\sin n\phi\sin\phi + \cos n\phi\cos\phi = \cos(n+1)\phi$

Mindegyik a középiskolában tanult addíciós tételekből következik.

8. Világos, hogy az egyenlőség fennáll. Belátandó még, hogy A_{sz} szimmetrikus, és A_{a} antiszimmetrikus. Az A_{sz} mátrix i-edik sorának j-edik eleme:

$$[A_{\text{sz}}]_{ij} = [\frac{1}{2}(A + A^T)]_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})$$

A j-edik sor i-edik eleme:

$$[A_{\text{sz}}]_{ji} = [\frac{1}{2}(A + A^T)]_{ji} = \frac{1}{2}(a_{ji} + a_{ij}),$$

ami megegyezik az előzővel. Tehát A_{sz} szimmetrikus.

Az A_{a} mátrix i-edik sorának j-edik eleme:

$$[A_{\mathrm{a}}]_{ij} = [\frac{1}{2}(A - A^T)]_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji})$$

A j-edik sor i-edik eleme:

$$[A_{\mathrm{a}}]_{ji} = [\frac{1}{2}(A - A^T)]_{ji} = \frac{1}{2}(a_{ji} - a_{ij}),$$

ami az előző kifejezés (-1)-szerese. Tehát A_{a} antiszimmetrikus.
A példában

$$A_{\mathrm{sz}} = \frac{1}{2}(A + A^T) = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{bmatrix} 3 & 1 & 8 \\ 2 & -1 & 6 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \\ 8 & 6 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 3 & \frac{3}{2} & 3 \\ \frac{3}{2} & -1 & \frac{3}{2} \\ 3 & \frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{\mathrm{a}} = \frac{1}{2}(A - A^T) = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{bmatrix} 3 & 1 & 8 \\ 2 & -1 & 6 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \\ 8 & 6 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 5 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{9}{2} \\ -5 & -\frac{9}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Ellenőrizhető, hogy ezek összege valóban az A mátrixot adja.

9. a.) 14 b.) 21 c.) 0 d.) 0