6. gyakorló feladatsor
Megoldások

1. a.) $\rho(A) = 3$, mivel pl. a

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

2×2-es aldeterminláns értéke $-10 \neq 0$, és az ezt tartalmazó

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

3×3-as aldetermináns értéke szintén nem nulla (-10). 3-nál nagyobb nem lehet a rang, mert a mátrixnak csak három sora van.

b.) $\rho(B) = 3$, mert ezt a mátrixot az előbbiből úgy kaptuk, hogy egy oszlopot hozzávettünk. Ezzel a rangot nem csökkenthettük, de nem is növelhettük, mert a B mátrixnak is csak három sora van.

c.) $\rho(C) = 1$, mert ennek a mátrixnak nincs még két független sorvektora sem.

2. Az a-t 2-nek kell választani, mert ezzel kapunk két összefüggő sort. A b-t -1-nek kell választani, mert ekkor lesz a B mátrix determinánsa $(10b + 10)$ nulla.

3. Rendezzük mátrixba a megadott vektorokat, és vizsgáljuk meg a rangját!

a.) A

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

mátrix rangja 3, mivel

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \quad \text{és} \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -4 \\ 1 & -4 & 3 \end{vmatrix} = -39 \neq 0$$

Tehát a vektorok lineárisan függetlenek.

b.) Itt egy vektorral kibővítettük az előző vektorhalmazt. A

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

mátrix determinánsa 0, így a rang továbbra is csak 3, és a négy vektor már lineárisan összefüggő.