7. gyakorló feladatsor
Megoldások

1. a.) Az együtthatómátrix és a kibővített mátrix:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad [A|\underline{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & -4 & -5 \end{bmatrix}$$

Az A rangvizsgálata:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow \rho(A) \geq 2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow \rho(A) = 2.$$

Ugyanakkor a kibővített mátrixban

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & -5 \end{vmatrix} = -10 \neq 0 \Rightarrow \rho([A|\underline{b}]) = 3 \neq \rho(A).$$

Így az egyenletrendszernek nincs megoldása.

b.) Az együtthatómátrix és a kibővített mátrix:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad [A|\underline{b}] = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Itt $\rho(A) = 2$, mivel

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

A kibővített mátrix determinánsa

$$|[A|\underline{b}]| = 0 \Rightarrow \rho([A|\underline{b}]) = 2 = \rho(A).$$

Ez a közös rang egyenlő az ismeretlenek számával. Tehát létezik megoldás, és az egyértelmű.

2. a.) Igen, ha $a = 4$.

   b.) Nem.

3. $x_1 = -1,\ x_2 = 4,\ x_3 = -1$