8. gyakorló feladatsor
Megoldások

1. a.) 1. Gauss-eliminációval:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 8 \end{array}\right] \to^{(2.)-(1.),\ (3.)-(1.)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

Így az $x_1 + x_2 = 3,\ -x_2 + x_3 = 3,\ x_3 = 5$ egyenletekhez jutottunk.
Ezekből $x_3 = 5,\ x_2 = 2,\ x_1 = 1$.
2. Gauss–Jordan-eliminációval: tovább folytatva a táblázat átalakítását:

$$\to^{(2.)-(3.)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right] \to^{(2.)\cdot(-1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right] \to^{(1.)-(2.)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

A jobb oldalon leolvasható a megoldás: $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 5$.

2. a.) 1. Gauss-eliminációval:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right] \to^{(2.)-(1.),\ (3.)-2\cdot(1.)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -5 & -6 \end{array}\right]$$

$$\to^{(3.)-(2.)/3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -\frac{14}{3} & -\frac{14}{3} \end{array}\right] \to^{(4.)\cdot(-\frac{3}{14})} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Így az $x_1 - x_2 + 2x_3 = 2,\ 3x_2 - x_3 = -4,\ x_3 = 1$ egyenletekhez jutottunk.
Ezekből $x_3 = 1,\ x_2 = -1,\ x_1 = -1$.
2. Gauss–Jordan-eliminációval: tovább folytatva a táblázat átalakítását:

$$\to^{(2.)+(3.)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \to^{(2.)/3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\to^{(1.)-2\cdot(3.)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \to^{(1.)+(2.)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

A jobb oldalon leolvasható a megoldás: $x_1 = -1,\ x_2 = -1,\ x_3 = 1$.

3. a.)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 7 & 6 & 5 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right] \rightarrow_{(2.)-\frac{7}{3}\cdot(1.),\ (3.)-\frac{5}{3}\cdot(1.)} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{8}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 0 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow_{(2.)\cdot\frac{3}{4},\ (3.)\cdot\frac{3}{2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \rightarrow_{(3.)-(2.)} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Egy csupa nulla sort kaptunk: tetszőlegesen megválaszthatjuk x_3 értékét: $x_3 := p \in \mathbb{R}$ tetszőleges szám. Ekkor $x_2 = -2p,\ x_1 = p$. Tehát az összes megoldás:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} p \\ -2p \\ p \end{bmatrix}, \quad p \in \mathbb{R} \text{ tetsz.}$$

Megjegyzés: Homogén lineáris egyenletrendszernél az egyenletrendszer átalakítása során a jobb oldalon mindig nullák vannak, lásd fönt. Ezért homogén lineáris egyenletrendszernél a szabad tagok oszlopvektorát fölösleges feltüntetni a táblázatban. (A következő példában már nem írjuk ki.)

b.)

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 7 & -5 & -2 & -4 \\ 4 & -3 & -1 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow_{(1.)\cdot(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 7 & -5 & -2 & -4 \\ 4 & -3 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow_{(3.)-(1.)\cdot 7,\ (4.)-(1.)\cdot 4} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & 10 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow_{(2.)\cdot(-1),\ (3.)/(-5),\ (4.)/(-3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow_{(3.)-(2.),\ (4.)-(2.)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ezzel az $x_1 - x_3 - 2x_4 = 0,\ x_2 - x_3 - 2x_4 = 0$ egyenletrendszerhez jutottunk. Két nulla sor van, így válasszuk meg x_4 és x_3 értékét tetszőlegesen: $x_4 := p \in \mathbb{R}, x_3 := q \in \mathbb{R}$. Ekkor $x_2 = q + 2p$ és $x_1 = q + 2p$, azaz az összes megoldás:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} q+2p \\ q+2p \\ q \\ p \end{bmatrix}, \quad p,\ q \in \mathbb{R} \text{ tetszőleges számok.}$$

4.

$$a.)\ A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad b.)\ B^{-1} = \begin{bmatrix} 32 & 14 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 25 & 11 & -1 \end{bmatrix} \quad c.)\ C^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A B inverzének kiszámítása részletesen:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to^{(2.)+(1.)\cdot 2,\ (3.)-(1.)\cdot 3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & -1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\to^{(3.)-(2.)\cdot 11} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -25 & -11 & 1 \end{array}\right] \to^{(3.)\cdot(-1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 25 & 11 & -1 \end{array}\right]$$

$$\to^{(1.)+(3.)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 26 & 11 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 25 & 11 & -1 \end{array}\right] \to^{(1.)+(2.)\cdot 3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 32 & 14 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 25 & 11 & -1 \end{array}\right]$$