9. gyakorló feladatsor
Megoldások

1. Először meghatározzuk az

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

együtthatómátrix LU-felbontását az

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

mátrixegyenlőségből. A szorzatmátrix első oszlopát az A első oszlopával összehasonlítva

$$u_{11} = 1,$$

$$l_{21}u_{11} = 1, \Rightarrow l_{21} = 1,$$

$$l_{31}u_{11} = 2, \Rightarrow l_{31} = 2$$

A második oszlopaik összehasonlításából

$$u_{12} = -1,$$

$$l_{21}u_{12} + u_{22} = 2, \Rightarrow u_{22} = 3,$$

$$l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} = -1, \Rightarrow l_{32} = \frac{1}{3},$$

és végül a harmadik oszlopaik összehasonlításából

$$u_{13} = 2,$$

$$l_{21}u_{13} + u_{23} = 1, \Rightarrow u_{23} = -1,$$

$$l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} = -1, \Rightarrow u_{33} = -\frac{14}{3}.$$

A keresett tényezők tehát

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{14}{3} \end{bmatrix}.$$

Ezután a megoldás két lépése:
1. $L\underline{y} = \underline{b}$ megoldása $\rightarrow$ $\underline{y} =?$
2. $U\underline{x} = \underline{y}$ megoldása $\rightarrow$ $\underline{x} =?$

Az 1. egyenletrendszer:

$$\left\{\begin{array}{llllr} y_1 & & & = & 2 \\ y_1 & +y_2 & & = & -2 \\ 2y_1 & +\frac{1}{3}y_2 & +y_3 & = & -2 \end{array}\right.$$

Megoldása az ismeretleneket felülről lefelé kiküszöbölve: $y_1 = 2,\ y_2 = -4,\ y_3 = -\frac{14}{3}$.

A 2. egyenletrendszer:

$$\left\{\begin{array}{llllr} x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & 2 \\ & 3x_2 & -x_3 & = & -4 \\ & & -\frac{14}{3}x_3 & = & -\frac{14}{3} \end{array}\right.$$

Megoldása – amely egyben az eredeti egyenletrendszer megoldása is – az ismeretleneket alulról fölfelé kiküszöbölve: $x_3 = 1,\ x_2 = -1,\ x_1 = -1$.

2. a.)

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

b.) $x_1 = \frac{3}{2},\ x_2 = \frac{1}{3},\ x_3 = -\frac{1}{6}$.

3. Igen, mert az A mátrix szimmetrikus, és az összes bal felső sarokaldeterminánsa pozitív.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Az egyenletrendszer megoldása: $x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = 0$.