2. ZÁRTHELYI
Gyakorlati rész

1. a.) Írd fel a síkvektorok 90^o-os elforgatásának mátrixát, ha $B_1 = \{\underline{i}, -\underline{j}\}$ és $B_2 = \{-\underline{i}, \underline{j}\}$. (6 pont)
   b.) Mi lesz a képvektora a B_2 bázisban annak a síkvektornak, amelyet a B_1 bázisban a $(3, 8)$ számpár azonosít? (2 pont)
   Mo.: a.) A B_1 bázis első elemének elforgatottja $\underline{j}$, a második eleméé $\underline{i}$. Ezek a B_2 bázisban: $(0, 1)$ és $(-1, 0)$. Tehát a keresett mátrix
$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
   b.)
$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 3 \end{bmatrix}$$

2. Létezik-e megoldása a következő egyenletrendszernek? Ha igen, hány? (6 pont)
$$\begin{array}{rrrcl} x_1 & -x_2 & +3x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & -2x_2 & +4x_3 & = & 0 \\ -x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 0 \\ x_1 & -x_2 & +5x_3 & = & 0 \end{array}$$
   Mo.: Az egyenletrendszer együtthatómátrixa
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$
   Vizsgáljuk meg a rangját! Mivel található benne 2×2-es nemnulla aldetermináns, pl.
$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} \neq 0,$$

és az ezt tartalmazó összes 3×3-as aldeterminánsa 0:

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0,$$

ezért $\rho(A) = 2$. Homogén lineáris egyenletrendszerben a kibővített mátrix rangja nem lehet nagyobb, mint az együtthatómátrixé, ezért $\rho([A|\underline{b}]) = 2$. A két rang egyenlő, tehát létezik megoldás. A közös rang kisebb az ismeretlenek számánál, ezért végtelen sok megoldás van.

3. Oldd meg Gauss-eliminációval az alábbi egyenletrendszert! (6 pont)

$$\begin{array}{rrrrcr} x_1 & -x_2 & +x_3 & -x_4 & = & -2 \\ 2x_1 & +2x_2 & +2x_3 & +2x_4 & = & 12 \\ -x_1 & +2x_2 & -2x_3 & +x_4 & = & 3 \\ & 2x_2 & +2x_3 & & = & 6 \end{array}$$

Mo.: A Gauss-elimináció során az alábbi táblázathoz jutunk:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right]$$

Ez az alábbi egyenletrendszernek felel meg:

$$\begin{array}{rrrrcr} x_1 & -x_2 & +x_3 & -x_4 & = & -2 \\ & x_2 & & +x_4 & = & 4 \\ & & -x_3 & -x_4 & = & -3 \\ & & & -2x_4 & = & 4 \end{array}$$

Ennek megoldása: $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 1, x_4 = 2$.

4. Adjuk meg az

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

mátrix spektrálfelbontását! (10 pont)

Mo.: A sajátvektorai: $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1$. Sajátvektorok a $(2p, p)$ ill a (q, q) alakú nemnulla vektorok, azaz pl. a $(2,1)$ és az $(1,1)$. Ebből az X mátrix

$$X = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

és inverze

$$X^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ezzel A spektrálfelbontása:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$