Feladatok a numerikus prognosztika témaköréből

(A „Klasszikus dinamikus meteorológiai feladatgyűjtemény II."
című elektronikus jegyzet XIII. fejezete)

Szépszó Gabriella

Budapest, 2013. szeptember

Tartalomjegyzék

XIII.1. Bevezetés **2**
XIII.2. A vizsgált parciális differenciálegyenletek **2**
XIII.3. Véges differencia sémák az időbeli és a térbeli deriváltak közelítésére **5**
XIII.4. A numerikus megoldással szemben támasztott matematikai követelmények **7**
XIII.4.1. Konzisztencia 7
XIII.4.2. Konvergencia 7
XIII.4.3. Numerikus stabilitás 7
Feladatok 8
Megoldások 10
XIII.5. A stabilitás vizsgálata **17**
XIII.5.1. CFL-kritérium 17
XIII.5.2. Stabilitásvizsgálati módszerek 18
Energia-módszer 18
Feladat 19
Megoldás 19
Neumann-módszer 20
Feladatok 24
Megoldások 25
XIII.6. Hatékony numerikus sémák **31**
XIII.6.1. Szemi-implicit séma 31
XIII.6.2. Szemi-Lagrange módszer 32
Feladatok 34
Megoldások 35
XIII.7. Kitekintés **38**
Köszönetnyilvánítás **38**
Irodalom **39**

XIII.1. Bevezetés

Az időjárás alakításában a legfontosabb szerepet a légkörben fellépő hidro- és termodinamikai folyamatok játsszák, így az időjárás-előrejelzési modellek is főként ezeket a folyamatokat és kölcsönhatásokat veszik figyelembe. Ha ismerjük a légkör állapotát adott időpillanatban, akkor mivel a rendszer determinisztikus, a fizikai törvények alapján felállított matematikai egyenletek segítségével elméletileg egyértelműen meghatározható az időbeli fejlődése. (A gyakorlati megvalósításnál korlátot jelent a légköri folyamatok kaotikus jellege, például a kiindulási feltételek bizonytalanságára mutatott rendkívüli érzékenység.) A Newton-féle mozgásegyenletek, a tömeg- és energia-megmaradási egyenlet az univerzális gáztörvénnyel kiegészítve alkotja azt a folytonos nem-lineáris parciális differenciálegyenlet-rendszert, melynek megoldására – analitikus megoldás hiányában – numerikus módszereket alkalmazunk (Horányi et al., 1998). A kezdeti- és határfeltételeket igénylő egyenletrendszert a numerikus megoldás során egy háromdimenziós térbeli rács rácspontjaiban értelmezzük és az előrejelzés folyamán diszkrét időbeli lépésekben oldjuk meg. Az első numerikus modellt az 1910-es években alkották meg, de a numerikus számítások aranykora a számítógépek, majd a szuperszámítógépek megjelenésével vette kezdetét.

XIII.2. A vizsgált parciális differenciálegyenletek

Az alábbiakban a *lineáris* másodrendű parciális differenciálegyenletek típusait és tulajdonságait tekintjük át. Ugyan az előrejelzési feladat alapját egy bonyolultabb, nem-lineáris parciális differenciálegyenlet-rendszer képezi, mégis lényeges ismerni az egyszerűsített lineáris egyenletek megoldására alkalmazott módszereket, mert hasonlókat használunk az összetett problémákra is (Kalnay, 2003). Tekintsük a másodrendű lineáris parciális differenciálegyenletek alábbi általános alakját a $\phi(x, y)$ kétváltozós függvényre:

$$A\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} + C\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + D\frac{\partial\phi}{\partial x} + E\frac{\partial\phi}{\partial y} + F\cdot\phi = G\,. \qquad \text{(XIII.1.)}$$

Az egyenletek osztályozását a másodrendű tagok együtthatói (azaz az A, a B és a C) alapján végezzük el a következőképpen (Courant és Hilbert, 1962):

1. Ha $B^2 - AC > 0$, akkor az egyenlet **hiperbolikus**, amire egyszerű példa a hullámegyenlet: $\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}$, ahol c a hullám terjedési sebessége.

2. Ha $B^2 - AC = 0$, akkor az egyenlet **parabolikus**, amire egyszerű példa a diffúziós egyenlet: $\frac{\partial\phi}{\partial t} = \sigma\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}$, ahol σ a diffúziós együttható.

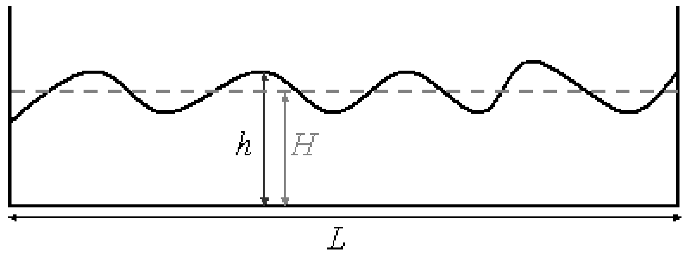
3. Ha $B^2 - AC < 0,$ akkor az egyenlet **elliptikus**, amire egyszerű példa a Poisson-egyenlet: $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = f(x, y)$ (konkrét meteorológiai példa az áramfüggvény és az örvényesség kapcsolata).

A további példáinkban gyakran előkerülő $\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial t} + c\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial x} = 0$ alakban felírt egydimenziós lineáris advekciós egyenlet ugyan elsőrendű parciális differenciálegyenlet, de megoldásai kielégítik a másodrendű hiperbolikus hullámegyenletet, ezért a hiperbolikus egyenletek között tartjuk számon. Az elliptikus feladatok határérték-problémák, melyek megoldásához peremfeltételek megadása szükséges minden határpontban. A parabolikus és hiperbolikus feladatok ezzel szemben kezdetiérték-problémák, melyek a kiindulási feltétel megadását igénylik. (Illetve amennyiben egy korlátos térrészre oldjuk meg őket, úgy vegyes feladatként mind kezdeti, mind peremfeltételek megadását igénylik.) A példatár ezen fejezetében olyan problémákkal foglalkozunk, melyek az állapothatározók kezdeti értékének megadását igénylik.

Tekintsük az ún. *sekély,* forgó folyadék egyenleteit, melynek karakterisztikus horizontális mérete jóval nagyobb a függőleges kiterjedésénél, vertikális irányban homogén, összenyomhatatlan és súrlódásmentes. Ezeket az egyenleteket **sekélyvíz-egyenleteknek** nevezünk:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -g\frac{\partial h}{\partial x} + f \cdot v \\
&\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -g\frac{\partial h}{\partial y} - f \cdot u \\
&\frac{\partial h}{\partial t} + u\frac{\partial h}{\partial x} + v\frac{\partial h}{\partial y} = -h \cdot D \ ,
\end{aligned}
\tag{XIII.2.}
$$

ahol $u(x, y, t)$ és $v(x ,y, t)$ a horizontális áramlási sebesség komponensei, $h(x, y, t)$ a hullám magassága, g a gravitációs gyorsulás, f a Coriolis-paraméter és D a horizontális divergencia (l. a *XIII.1. ábrát* és az ***V.2. fejezetet*** is). A sekélyvíz egyenletek leírják a Rossby-hullámokat és a külső gravitációs hullámokat. A Rossby-hullámok a Coriolis-erő földrajzi szélességgel való változása következtében horizontális irányban fellépő hullámmozgások, melyek a teljes Földet körülölelik. Alapvető szerepet játszanak a nagytérségű légköri folyamatok alakításában, terjedési sebességük általában néhányszor $10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, a hullámok hossza többezer km. A külső gravitációs hullámok olyan vertikális hullámmozgások, melyek két közeg határán (pl. két eltérő sűrűségű légtömeg választófelületén) lépnek fel a gravitációs erő hatására. A Rossby-hullámoknál kisebb kiterjedésűek, tipikus méretskálájuk 500–2000 km, terjedési sebességük azonban megközelítheti a hanghullámok sebességét.



XIII.1. ábra. A sekély folyadék sematikus rajza: horizontális mérete (L) jóval nagyobb, mint átlagos vertikális kiterjedése (H; a légkörre ~10 km). A folyadék aktuális magassága h.

Mivel a (XIII.2.) egyenletrendszer leírja a legfontosabb légköri folyamatokat, gyakran használják a különböző numerikus sémák tesztelésére. Ezért példáinkban mi is a sekélyvíz-egyenletek egyszerűsített, lineáris változatain vezetjük be és vizsgáljuk a numerikus módszereket, mégpedig:

- Az egydimenziós lineáris advekciós egyenleten:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0\,; \qquad \text{(XIII.3.)}$$

- Az egydimenziós lineáris gravitációs hullám-egyenleten:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + g\dfrac{\partial h}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial h}{\partial t} + H\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0\,; \end{cases} \qquad \text{(XIII.4.)}$$

- Az advekciót és gravitációs hullám-tagokat egyaránt tartalmazó lineáris feladaton:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + c\dfrac{\partial u}{\partial x} + g\dfrac{\partial h}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial h}{\partial t} + c\dfrac{\partial h}{\partial x} + H\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0\,. \end{cases} \qquad \text{(XIII.5.)}$$

Az előrejelzési feladatnak analitikus megoldása nem ismert, ezért numerikus módszerek segítségével oldjuk meg azt. A folytonos egyenletek diszkretizációjakor egy háromdimenziós rács rácspontjaiban tekintjük a meteorológiai állapothatározókat, s az előrejelzést (a modellintegrálást) az időtáv időlépcsőkre osztásával, lépésenként készítjük el. A diszkretizációval kapcsolatban az egyik legfontosabb kérdés, hogy az egyenletekben szereplő térbeli és időbeli differenciálást milyen numerikus módszerekkel végezzük el. A térbeli differenciáloperátorok közelítésére két módszercsaládot alkalmazhatunk: (i) a Galjorkin-módszerek esetében analitikusan integrálható függvények szerinti sorfejtéssel írjuk fel a meteorológiai változókat, míg (ii) a véges különbséges módszereknél a deriváltakat az állapothatározók rácspontbeli értékeinek segítségével állítjuk elő. A példatár jelen fejezetében a különböző véges differencia sémákon keresztül ismertetjük a numerikus módszerek legfontosabb jellemzőit.

XIII.3. Véges differencia sémák az időbeli és a térbeli deriváltak közelítésére

Az alábbiakban bemutatunk néhány, a térbeli és időbeli deriváltak közelítésére használható konkrét véges differencia sémát (l. a ***II.6. fejezetet*** is). Az egyenletekben szereplő térbeli differenciáloperátoroknak az adott j rácspontra vonatkozó diszkretizációjára a legelterjedtebben a következő módszereket alkalmazzák:

- **Bal oldali séma:**

$$u_{\bar{x},j} = \frac{u_j - u_{j-1}}{\Delta x} ; \qquad \text{(XIII.6.)}$$

- **Jobb oldali séma:**

$$u_{x,j} = \frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta x} ; \qquad \text{(XIII.7.)}$$

- **Középponti** vagy **centrált séma:**

$$u_{\overset{\circ}{x},j} = \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x} . \qquad \text{(XIII.8.)}$$

A sémák arról kapták a nevüket, hogy a j-edik rácspontbeli derivált kiszámításához melyik rácspontokat használják fel. A középponti séma magasabb, másodrendű pontossággal közelíti a folytonos differenciáloperátort, mint a bal és jobb oldali sémák. (A pontosságról bővebben a konzisztencia kapcsán ejtünk szót.)

Az időbeli deriválás esetében tekintsük a következő feladatot:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + f\left(u, t\right) = 0 \\ u(t=0) = u_0 \ . \end{cases} \qquad \text{(XIII.9.)}$$

A fenti **Cauchy-probléma** esetében a feladat tulajdonképpen $u(t)$ előrejelzése a kiindulási állapot ismeretében. Az egyenletben szereplő differenciáloperátor közelítésére explicit vagy implicit sémákat használhatunk. **Az explicit sémák** az adott időlépcsőbeli u meghatározásához csak **ismert időlépcsőbeli értékeket használnak fel**, míg **az implicit sémák a még nem ismert időlépésekből is felhasználnak értékeket**. Egy feladat implicit sémával történő megoldása ezért bonyolultabb (operátor invertálás vagy iteráció alkalmazását igényli), alkalmazásuk esetenként mégis előnyös lehet a számítási hatékonyság szempontjából (erről részletesen később).

Míg a térbeli deriváltak esetében a véges differencia sémákat a fent bemutatott differenciálhányados-alakban helyettesítjük az egyenletekbe, addig az időbeli fejlődés leírásánál a következő időlépcsőbeli u érték meghatározása a cél, ezért a diszkrét egyenleteket ennek megfelelően rendezzük át [l. a (XIII.10.)-et, ahol $\dfrac{\Delta u}{\Delta t}$ és f_Δ a diszkrét térben értelmezett időbeli deriváltat és f függvényt jelöli]. Néhány konkrét véges differencia sémát mutatunk be az alábbiakban az időbeli derivált diszkretizációjára (ahol az n index az n-edik időlépést jelöli):

- A legegyszerűbb az **explicit Euler- vagy** Euler-forward **séma**, ahol a forward elnevezés arra utal, hogy a séma a következő időlépcsőbeli értéket az ismert értékekből, tehát időben előre határozza meg:

$$\frac{\Delta u}{\Delta t}+f_{\Delta}=\frac{u_{n+1}-u_n}{\Delta t}+f(u_n,t_n)\rightarrow u_{n+1}=u_n-f(u_n,t_n)\cdot\Delta t\,; \qquad \text{(XIII.10.)}$$

- **Implicit Euler-** vagy Euler-backward **séma**:

$$u_{n+1}=u_n-f(u_{n+1},t_{n+1})\cdot\Delta t\,; \qquad \text{(XIII.11.)}$$

- **Leapfrog séma**:

$$u_{n+1}=u_{n-1}-f(u_n,t_n)\cdot 2\Delta t\,; \qquad \text{(XIII.12.)}$$

- **Másodrendű implicit séma:**

$$u_{n+1}=u_n-\left[f(u_n,t_n)+f(u_{n+1},t_{n+1})\right]\cdot\frac{\Delta t}{2}\,. \qquad \text{(XIII.13.)}$$

XIII.4. A numerikus megoldással szemben támasztott matematikai követelmények

A numerikus megoldással kapcsolatban elvárjuk, hogy a diszkretizált egyenletek elegendően nagy pontossággal közelítsék a folytonos feladatot, a megoldása konvergáljon a folytonos megoldáshoz, továbbá a számítógépes megvalósítás hatékony legyen. Az alábbiakban sorra vesszük, hogyan definiáljuk ezeket a tulajdonságokat.

XIII.4.1. Konzisztencia

Tekintsük most a következő, általános alakban felírt folytonos feladatot:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = Lu, \quad t \in \left(0, T\right] \\ u(t=0) = u_0 \ . \end{cases} \tag{XIII.14.}$$

Definiáljunk ehhez egy rácsot, az egyszerűség kedvéért ekvidisztáns Δx rácsfelbontással, továbbá osszuk fel az időtávot Δt hosszúságú időlépésekre! A folytonos feladathoz konstruáljunk egy olyan feladatot, melyet ezen a diszkrét téren értelmezünk (a továbbiakban ezt hívjuk diszkrét vagy véges differencia feladatnak). Azt szeretnénk, hogy a diszkrét feladat jól közelítse a folytonos feladatot, s ezt a „közelséget" a konzisztencia adja meg: a véges differencia feladat konzisztens a folytonos feladattal, ha $\Delta x \to 0, \Delta t \to 0$ mellett a két feladat közötti eltérés, azaz a különbségképzés után maradó **csonkítási hiba tart a 0-hoz**. A konzisztencia rendjét a csonkítási hiba vezető tagjának fokszáma adja meg, s ez minél magasabb, annál pontosabban közelíti az adott véges differencia séma a folytonos problémát.

XIII.4.2. Konvergencia

A numerikus megoldással kapcsolatban nemcsak azt várjuk el, hogy a diszkretizált egyenletek elegendően nagy pontossággal közelítsék a folytonos feladatot, de azt is, hogy (U) megoldásuk konvergáljon a(z) (u) folytonos megoldáshoz. Konvergencia esetén $\Delta x \to 0, \Delta t \to 0$ mellett **a diszkrét feladat megoldása tart a folytonos feladat megoldásához** bármely j rácspontban és $t > 0$ időpontban, azaz

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0, \Delta t \to 0, \\ j\Delta x \to x, n\Delta t \to t}} U\left(j\Delta x, n\Delta t\right) = u\left(x, t\right). \tag{XIII.15.}$$

A konvergenciának tehát az előrejelzési időtáv minden időpontjában fenn kell állnia (azaz például a határás előrejelzések esetében csakúgy, mint a kétnapos prognózisoknál). A konvergencia matematikai feltételének teljesülését azonban nehéz belátni, ezért helyette legtöbbször a stabilitás teljesülését vizsgáljuk.

XIII.4.3. Numerikus stabilitás

Egy feladat stabil, ha a megoldása „folytonosan függ" a kiindulási feltételektől: azaz kis eltérés (hiba) a kezdeti feltételben nem vezet lényegesen eltérő megoldásra. Világos, hogy a stabilitás egymástól függetlenül értelmezhető a folytonos és a diszkrét feladatban – előbbinél fizikai stabilitásról, utóbbinál számítási (numerikus) stabilitásról beszélünk. A meteorológiai problémák esetében, ahol az állapothatározók korlátos értékkészletű függvények, a stabilitást a hiba korlátosságán keresztül vizsgáljuk. Adott pontbeli és időlépésbeli $U_{j,n}$ megoldás stabilitásához szükséges, hogy rögzített Δx rácsfelbontás mellett és $\Delta t \to 0$ esetén az

$$\varepsilon_n = U(j\Delta x, n\Delta t) - u(x,t), \qquad n\Delta t = t,\, j\Delta x = x \tag{XIII.16.}$$

alakban definiált **hiba ne növekedjék az idővel**, azaz $\varepsilon_n \le \varepsilon_{n+1}$. Az alkalmazott véges különbséges módszer pedig akkor stabil, ha bármely kezdeti feltételhez tartozó megoldás kielégíti a fenti feltételt (Mesinger és Arakawa, 1976). Lényeges, hogy a fenti követelmény csak **a stabilitás szükséges feltétele, elégséges feltételt** ugyanis nehéz **megadni és csak néhány speciális esetben lehetséges**. (Mindazonáltal a legtöbb esetben a szükséges feltétel teljesülése is elegendő a stabilitáshoz; Kalnay, 2003.)

A stabilitás és a konvergencia között a **Lax-Richtmyer tétel** (1956) teremt kapcsolatot, amely kimondja, hogy **egy konzisztens véges differencia sémákkal megadott lineáris kezdetiérték-feladat akkor és csak akkor konvergens, ha stabil**. Azaz a konzisztencia és a konvergencia együttes fennállása esetén a séma stabil, illetve a konzisztens és stabil séma egyben konvergens is. A tétel gyakorlati szempontból bír nagy jelentőséggel, mert külön-külön a konzisztencia és a stabilitás fenti feltételének vizsgálata egyszerűbb, mint közvetlenül a konvergencia teljesülését ellenőrizni.

Feladatok

1. feladat:

A $\phi(x,t)$ mennyiségre vonatkozó

$$\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial t} + c\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial x} = 0 \tag{XIII.17.}$$

egydimenziós lineáris advekciós egyenlet időbeli deriváltjának közelítésére a forward, térbeli deriváltjának közelítésére a centrált sémát alkalmazzuk az alábbi módon:

$$\frac{\phi_{j,n+1} - \phi_{j,n}}{\Delta t} + c\frac{\phi_{j+1,n} - \phi_{j-1,n}}{2\Delta x} = 0\,, \tag{XIII.18.}$$

ahol a j index a j-edik rácspontot, az n index az n-edik időlépcsőt jelöli, Δt és Δx pedig az időlépcső hossza és a rácstávolság. Taylor-sorfejtés segítségével határozzuk meg a közelítés konzisztenciájának rendjét!

2. feladat:

Tekintsük a következő feladatot, ahol u_0 az $u(t)$ értéke a kiindulási időpontban:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + f(u,t) = 0 \\ u(t=0) = u_0\,. \end{cases} \tag{XIII.19.}$$

Az időbeli derivált közelítésére alkalmazzuk az explicit Euler-módszert:

$$u_{n+1} = u_n - f(u_n, t_n) \cdot \Delta t \, , \qquad \text{(XIII.20.)}$$

ahol az n index az adott időlépést jelöli és Δt a numerikus modellintegrálás időlépcsője! Végezzük el a séma stabilitási analízisét!

3. feladat:

A (XIII.19.) feladatban alkalmazzuk az időbeli derivált közelítésére az alábbi implicit Euler-módszert:

$$u_{n+1} = u_n - f(u_{n+1}, t_{n+1}) \cdot \Delta t \, , \qquad \text{(XIII.21.)}$$

ahol az n index az adott időlépést jelöli és Δt a numerikus modellintegrálás időlépcsője! Végezzük el a séma stabilitási analízisét!

4. feladat:

Tekintsük az alábbi

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\kappa \cdot u \\ u(t=0) = u_0 \end{cases} \qquad \text{(XIII.22.)}$$

súrlódási feladatot, ahol $\kappa > 0$ súrlódási együttható! Alkalmazzuk az időderivált közelítésére az explicit Euler-módszert és végezzük el a séma stabilitásvizsgálatát! Ábrázoljuk az eredményeket különböző időlépésekre! Ugyanezt tegyük meg az (implicit) Euler-backward módszerre is, ami a (XIII.19.) feladatra általánosan a következőképpen írható fel (az n index az adott időlépést jelöli és Δt a numerikus modellintegrálás időlépcsője):

$$u_{n+1} = u_n - f(u_{n+1}, t_{n+1}) \cdot \Delta t \, . \qquad \text{(XIII.23.)}$$

5. feladat:

Tekintsük az alábbi

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = i \cdot \omega \cdot u \\ u(t=0) = u_0 \end{cases} \qquad \text{(XIII.24.)}$$

oszcillációs feladatot, ahol ω a frekvencia és valós szám, $i = \sqrt{-1}$! Alkalmazzuk az időderivált közelítésére az explicit Euler-módszert és végezzük el a séma stabilitásvizsgálatát! Ugyanezt tegyük meg az (implicit) Euler-backward módszerre is!

6. feladat:

A (XIII.19.) egyenletben alkalmazzuk az időderivált közelítésére az alábbi explicit leapfrog-sémát:

$$u_{n+1} = u_{n-1} - f(u_n, t_n) \cdot 2\Delta t\,, \tag{XIII.25.}$$

ahol az n index az adott időlépést jelöli és Δt a numerikus modellintegrálás időlépcsője! Végezzük el a séma stabilitási analízisét és értelmezzük az eredményt!

Megoldások

1. feladat:

A konzisztencia rendjét a csonkítási hiba adja meg, amihez a diszkrét (XIII.18.) és a folytonos (XIII.17.) feladat különbségét kell venni. Ehhez először is alkalmazzunk Taylor-sorfejtést (XIII.18.) tagjaira a (j, n) pont körül:

$$\begin{aligned}
\phi_{j,n+1} &= \phi(j\cdot\Delta x, n\cdot\Delta t + \Delta t) = \phi(j\cdot\Delta x, n\cdot\Delta t) + \Delta t \cdot \left.\frac{\partial\phi}{\partial t}\right|_{j,n} + o\left(\Delta t^2\right),\\
\phi_{j+1,n} &= \phi(j\cdot\Delta x + \Delta x, n\cdot\Delta t) = \phi(j\cdot\Delta x, n\cdot\Delta t) + \Delta x \cdot \left.\frac{\partial\phi}{\partial x}\right|_{j,n} + \frac{\Delta x^2}{2}\cdot\left.\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right|_{j,n} + o\left(\Delta x^3\right),\\
\phi_{j-1,n} &= \phi(j\cdot\Delta x - \Delta x, n\cdot\Delta t) = \phi(j\cdot\Delta x, n\cdot\Delta t) - \Delta x \cdot \left.\frac{\partial\phi}{\partial x}\right|_{j,n} + \frac{\Delta x^2}{2}\cdot\left.\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right|_{j,n} - o\left(\Delta x^3\right).
\end{aligned} \tag{XIII.26.}$$

Mindezeket behelyettesítve (XIII.18.)-ba:

$$\begin{aligned}
\frac{\phi_{j,n+1} - \phi_{j,n}}{\Delta t} &= \frac{1}{\Delta t}\left[\Delta t \cdot \left.\frac{\partial\phi}{\partial t}\right|_{j,n} + o\left(\Delta t^2\right)\right] = \left.\frac{\partial\phi}{\partial t}\right|_{j,n} + o(\Delta t),\\
\frac{\phi_{j+1,n} - \phi_{j-1,n}}{2\Delta x} &= \frac{1}{2\Delta x}\left[2\Delta x \cdot \left.\frac{\partial\phi}{\partial x}\right|_{j,n} + 2o\left(\Delta x^3\right)\right] = \left.\frac{\partial\phi}{\partial x}\right|_{j,n} + o\left(\Delta x^2\right).
\end{aligned} \tag{XIII.27.}$$

Kivonva (XIII.18.)-ból (XIII.17.)-et (XIII.27.) felhasználásával, a következőt kapjuk a csonkítási hibára:

$$Tr = o(\Delta t) + o\left(\Delta x^2\right). \tag{XIII.28.}$$

Ez azt jelenti, hogy a **forward időbeli séma** az időderivált **elsőrendben pontos** közelítése, míg a térbeli derivált közelítésére használt **centrált séma** konzisztenciájának rendje 2, azaz **másodrendű** pontosságot biztosít.

2. feladat:

A stabilitás vizsgálatához írjuk fel (XIII.20.) hibával terhelt alakját:

$$u_{n+1}+\varepsilon_{n+1}=u_n+\varepsilon_n-f(u_n+\varepsilon_n,t_n)\cdot\Delta t\,. \qquad \text{(XIII.29.)}$$

A (XIII.29.)-ben szereplő $f(u_n+\varepsilon_n,t_n)$-t fejtsük sorba $f(u_n,t_n)$ körül:

$$f(u_n+\varepsilon_n,t_n)=f(u_n,t_n)+\varepsilon_n\cdot\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_n+o\left[(\varepsilon_n)^2\right]. \qquad \text{(XIII.30.)}$$

A (XIII.30.) felhasználásával vonjuk ki (XIII.29.)-ből (XIII.20.)-at:

$$\varepsilon_{n+1}=\varepsilon_n-\varepsilon_n\cdot\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_n\cdot\Delta t-o\left[(\varepsilon_n)^2\right]\cdot\Delta t\,. \qquad \text{(XIII.31.)}$$

Az utolsó tag elhanyagolásával:

$$\varepsilon_{n+1}=\varepsilon_n\cdot\left(1-\Delta t\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_n\right). \qquad \text{(XIII.32.)}$$

A stabilitáshoz szükséges, hogy a hiba korlátos maradjon, és ne növekedjen az idővel, azaz:

$$\varepsilon_{n+1}\le\varepsilon_n\to\varepsilon_{n+1}=g\cdot\varepsilon_n,\ \text{ahol}\ |g|\le 1\,. \qquad \text{(XIII.33.)}$$

Jelen esetben a g ún. *áttérési együtthatóra* vonatkozó feltétel így alakul:

$$\left|1-\Delta t\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_n\right|\le 1\,. \qquad \text{(XIII.34.)}$$

A $\frac{\partial f}{\partial u}$-t tekintve három eset lehetséges:

1. Ha $\frac{\partial f}{\partial u}>0$, akkor a stabilitás feltétele, hogy $-1\le 1-\Delta t\frac{\partial f}{\partial u}\to\Delta t\le\frac{2}{\frac{\partial f}{\partial u}}$.

2. Ha $\frac{\partial f}{\partial u}\le 0$, akkor a séma feltétel nélkül instabil, mert $g>1$.

3. Ha $\frac{\partial f}{\partial u}$ komplex, pl. tisztán képzetes (pl. az oszcillációs feladatnál; l. az 5. feladatot), akkor a séma instabil, ugyanis $|g|=|1-i\cdot\beta\cdot\Delta t|\to|g|=\sqrt{1+\beta^2\Delta t^2}>1$.

3. feladat:

A stabilitás vizsgálatához írjuk fel (XIII.21.) hibával terhelt alakját:

$$u_{n+1}+\varepsilon_{n+1}=u_n+\varepsilon_n-f(u_{n+1}+\varepsilon_{n+1},t_{n+1})\cdot\Delta t\,. \qquad \text{(XIII.35.)}$$

A (XIII.35.)-ben szereplő $f(u_{n+1}+\varepsilon_{n+1},t_{n+1})$ -t fejtsük sorba $f(u_{n+1},t_{n+1})$ körül:

$$f(u_{n+1}+\varepsilon_{n+1},t_{n+1})=f(u_{n+1},t_{n+1})+\varepsilon_{n+1}\cdot\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{n+1}+o\left[(\varepsilon_{n+1})^2\right]. \qquad \text{(XIII.36.)}$$

A (XIII.36.) felhasználásával vonjuk ki (XIII.35.)-ből (XIII.21.)-et:

$$\varepsilon_{n+1}=\varepsilon_n-\varepsilon_{n+1}\cdot\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{n+1}\cdot\Delta t-o\left[(\varepsilon_{n+1})^2\right]\cdot\Delta t\,. \qquad \text{(XIII.37.)}$$

Az utolsó tag elhanyagolásával:

$$\varepsilon_{n+1}\cdot\left(1+\Delta t\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{n+1}\right)=\varepsilon_n\,. \qquad \text{(XIII.38.)}$$

A stabilitás szükséges feltétele így alakul:

$$\frac{1}{|g|}=\left|1+\Delta t\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{n+1}\right|\geq 1\,. \qquad \text{(XIII.39.)}$$

A $\frac{\partial f}{\partial u}$ -t tekintve három eset lehetséges:

- Ha $\frac{\partial f}{\partial u}\geq 0$, akkor a séma feltétel nélkül stabil, mert $1+\Delta t\frac{\partial f}{\partial u}\geq 1$.
- Ha $\frac{\partial f}{\partial u}<0$, akkor a stabilitás feltétele, hogy $1+\Delta t\frac{\partial f}{\partial u}>-1\rightarrow\ \Delta t<\frac{2}{-\frac{\partial f}{\partial u}}$.
- Ha $\frac{\partial f}{\partial u}$ komplex, pl. tisztán képzetes (pl. az oszcillációs feladatnál; l. az 5. feladatot), akkor a séma feltétel nélkül stabil, ugyanis $|g|=\frac{1}{|1+i\cdot\beta\cdot\Delta t|}\rightarrow|g|<1$.

4. feladat:

A súrlódási feladat analitikus megoldása $u(t) = u_0 \cdot e^{-\kappa \cdot t}$, azaz a feladat exponenciálisan csillapodó mozgást ír le. Ha az explicit Euler-módszert alkalmazzuk az időbeli derivált közelítésére, akkor az u megoldást tetszőleges időlépcsőben a következőképpen adhatjuk meg:

$$\begin{aligned} & f = \kappa \cdot u \rightarrow \\ & u_{n+1} = u_n - f(u_n, t_n) \cdot \Delta t = \\ & \quad = u_n - \kappa \cdot u_n \cdot \Delta t = (1 - \kappa \cdot \Delta t) \cdot u_n = (1 - \kappa \cdot \Delta t)^n \cdot u_0 \, , \end{aligned} \tag{XIII.40.}$$

ahol az egyenlőség végén szereplő n értelemszerűen nem index, hanem kitevő. A 2. feladat eredményét felhasználva: mivel jelen esetben $\frac{\partial f}{\partial u} = \kappa > 0$, ezért a stabilitáshoz $\Delta t \leq 2\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^{-1} = \Delta t \leq \frac{2}{\kappa}$ szükséges. Ugyanakkor, ha nem szeretnénk a feladat fizikai értelmét sem elveszíteni (azaz a sebesség a súrlódás hatására az idővel fokozatosan csökkenjen 0-ra, ahogy a valóságban), akkor a szigorúbb $\Delta t \leq \frac{1}{\kappa}$ feltételnek kell teljesülnie Δt-re azért, hogy a megoldás ne váltson előjelet és oszcilláljon időlépésenként.

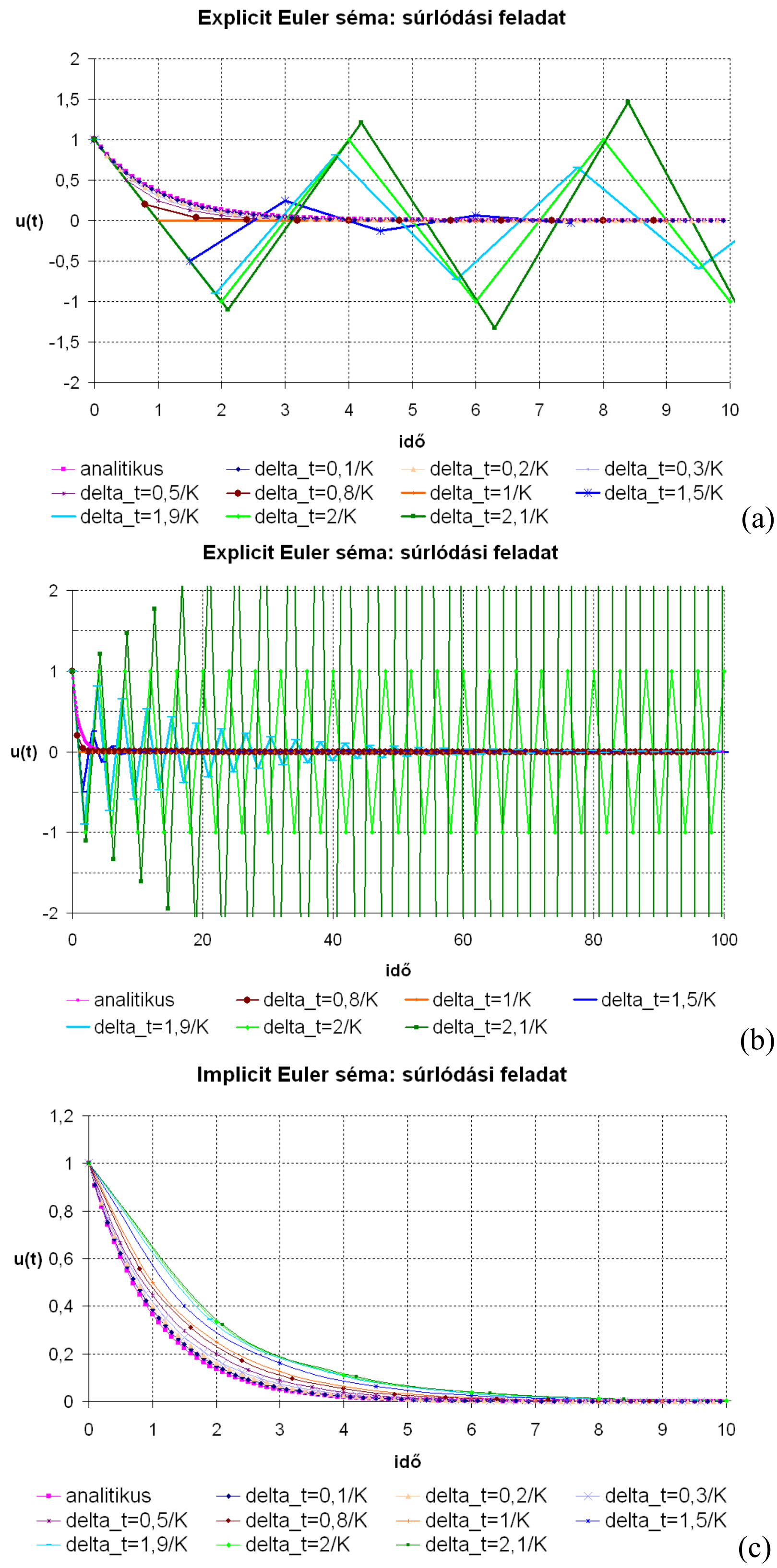
Ha az Euler-backward módszert alkalmazzuk, akkor az u megoldást tetszőleges időlépcsőben a következőképpen adhatjuk meg:

$$u_{n+1} = u_n - \kappa \cdot u_{n+1} \cdot \Delta t \rightarrow u_{n+1} = \frac{1}{(1 + \kappa \cdot \Delta t)} \cdot u_n = \frac{1}{(1 + \kappa \cdot \Delta t)^n} \cdot u_0 \, , \tag{XIII.41.}$$

ahol az egyenlőség végén szereplő n itt is kitevő. A 3. feladat eredményét felhasználva: mivel jelen esetben $\frac{\partial f}{\partial u} = \kappa > 0$, ezért a módszer feltétel nélkül stabil.

A súrlódási feladatra alkalmazott explicit és implicit Euler-módszerek különböző időlépcsők választásával számított eredményét mutatja be a ***XIII.2. ábra***. Látható, hogy ha az explicit Euler-módszer esetében a megengedett $\frac{2}{\kappa}$-nál nagyobb időlépcsőt alkalmazunk a numerikus modellintegrálás során, akkor a diszkrét megoldás a folytonos feladat megoldásától teljesen eltérően viselkedik, és a két megoldás közötti eltérés az idővel tart a végtelenhez [(a) és (b) panel]. Azt is láthatjuk, hogy ha $\frac{1}{\kappa} < \Delta t < \frac{2}{\kappa}$ hosszúságú időlépcsőt választunk, akkor a diszkrét megoldás oszcilláló viselkedést mutat, ami pedig nem jellemzi a fizikai megoldást. Ekkor a diszkretizált feladat még stabil marad (hiszen az eltérés a folytonos és a diszkrét megoldás között korlátos), de a diszkrét feladat megoldása elveszíti fizikai értelmét.

Az ábra (c) panelje azt illusztrálja, hogy ha ugyanerre a feladatra az implicit Euler-sémát alkalmazzuk, akkor tetszőlegesen hosszú időlépcsőt választhatunk, a feladat stabil, sőt, fizikailag értelmes marad.



XIII.2. ábra. A súrlódási feladatra alkalmazott explicit (a és b) és implicit (c) Euler-módszerek vizsgálata különböző időlépcső (az ábrán delta_t) értékek választásával. A rózsaszín görbék az analitikus megoldást mutatják, a többi görbe a különböző időlépcsővel számított numerikus megoldást 10 (a és c), illetve 100 (b) időegységig.

5. feladat:

Az oszcillációs feladat analitikus megoldása $u(t) = u_0 \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$, azaz a feladat oszcilláló mozgást ír le. Ha az explicit Euler-módszert alkalmazzuk az időbeli derivált közelítésére, akkor az u megoldást tetszőleges időlépcsőben a következőképpen adhatjuk meg:

$$f = -i \cdot \omega \cdot u \rightarrow u_{n+1} = u_n + i \cdot \omega \cdot u_n \cdot \Delta t = (1 + i \cdot \omega \cdot \Delta t) \cdot u_n = (1 + i \cdot \omega \cdot \Delta t)^n \cdot u_0 \,, \qquad \text{(XIII.42.)}$$

ahol az egyenlőség végén szereplő n értelemszerűen nem index, hanem kitevő. A 2. feladat eredményét felhasználva: mivel jelen esetben $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ tisztán képzetes, ezért a séma instabil.

Ha az Euler-backward módszert alkalmazzuk, akkor az u megoldást tetszőleges időlépcsőben a következőképpen adhatjuk meg:

$$u_{n+1} = u_n + i \cdot \omega \cdot u_{n+1} \cdot \Delta t \rightarrow u_{n+1} = \frac{1}{(1 - i \cdot \omega \cdot \Delta t)} \cdot u_n = \frac{1}{(1 - i \cdot \omega \cdot \Delta t)^n} \cdot u_0 \,, \qquad \text{(XIII.43.)}$$

ahol az egyenlőség végén szereplő n kitevő (és nem index). A 3. feladat eredményét felhasználva: mivel jelen esetben $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ tisztán képzetes, ezért a módszer feltétel nélkül stabil.

Összefoglalva: az oszcillációs egyenletben a derivált közelítésére az explicit Euler-módszert alkalmazva nem tudunk olyan időlépcsőt választani, mellyel a modellintegrálás stabilitása biztosítható – tehát oszcillációs feladatokra az explicit Euler-módszer alkalmazása nem javasolt. Ugyanerre a feladatra az implicit Euler-sémát alkalmazva tetszőleges időlépcsőt választhatunk, a feladat stabil marad.

6. feladat:

A stabilitás vizsgálatához írjuk fel (XIII.25.) hibával terhelt alakját:

$$u_{n+1} + \varepsilon_{n+1} = u_{n-1} + \varepsilon_{n-1} - f(u_n + \varepsilon_n, t_n) \cdot 2\Delta t \,. \qquad \text{(XIII.44.)}$$

Az ebben szereplő $f(u_n + \varepsilon_n, t_n)$-t fejtsük sorba $f(u_n, t_n)$ körül:

$$f(u_n + \varepsilon_n, t_n) = f(u_n, t_n) + \varepsilon_n \cdot \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_n + o\left[(\varepsilon_n)^2\right]. \qquad \text{(XIII.45.)}$$

Utóbbi felhasználásával vonjuk ki (XIII.44.)-ből (XIII.25.)-öt:

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n \cdot \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_n \cdot 2\Delta t - o\left[(\varepsilon_n)^2\right] \cdot 2\Delta t \,. \qquad \text{(XIII.46.)}$$

Az utolsó tag elhanyagolásával és felhasználva, hogy $\varepsilon_n = g \cdot \varepsilon_{n-1}$:

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n \cdot \left(\frac{1}{g} - 2\Delta t \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_n \right). \tag{XIII.47.}$$

Ebből:

$$g = \frac{1}{g} - 2\Delta t \frac{\partial f}{\partial u} \rightarrow K := \Delta t \frac{\partial f}{\partial u} \rightarrow g^2 + 2K \cdot g - 1 = 0\,. \tag{XIII.48.}$$

Abból eredően, hogy a leapfrog-séma három időszintet használ, g-re másodfokú egyenlet adódott, melynek két megoldása van. A másodfokú egyenlet megoldó-képlete alapján:

$$g_{1,2} = -K \pm \sqrt{K^2 + 1}\,. \tag{XIII.49.}$$

Az egyik g a folytonos feladat fizikailag értelmes megoldásához tartozik (ún. *fizikai módusz*). A másik g viszont abból ered, hogy a leapfrog sémánál két kezdeti feltételt kell megadni a séma indításakor, s ebből adódóan keletkezik az ún. *számítási módusz*. Utóbbinak nincs fizikai értelme, csupán a több-időszintes diszkretizációs módszer alkalmazása miatt jelenik meg a numerikus megoldásban. **A teljes numerikus megoldás a fizikai és a számítási módusz (lineáris) kombinációjaként áll elő**, ezért nagy jelentősége van annak, hogy a számítási módusz hogyan fejlődik az idővel.

- Ha K valós, akkor az egyik gyök (g) abszolút értéke mindig nagyobb egynél, azaz a megoldás instabil lesz.
- Ha K komplex, pl. tisztán képzetes: $K = i\beta$ és $|K| > 1$, akkor az egyik gyök (g) mindig nagyobb egynél, azaz a megoldás instabil lesz.
- Ha K komplex, pl. tisztán képzetes: $K = i\beta$ és $|K| < 1$, akkor $g = 1$ és a sémára megadható stabilitási kritérium: $\Delta t \le \dfrac{1}{\left|\dfrac{\partial f}{\partial u}\right|}$.

XIII.5. A stabilitás vizsgálata

XIII.5.1. CFL-kritérium

A stabilitás a véges differencia sémákkal kapcsolatban elvárt tulajdonságok közül a legfontosabb, mert konzisztens séma esetén teljesülése a numerikus megoldás pontos megoldáshoz való konvergenciáját is biztosítja. A stabilitást az előzőekben olyan feladatokra vizsgáltuk meg, amelyekben csak időbeli differenciálás szerepelt. Ezekben az esetekben az adott véges differencia módszerhez választható integrálási időlépcső hosszát alapvetően a folytonos feladat jellege határozza meg. A következőkben olyan – a legfontosabb légkördinamikai folyamatokat egyszerűsített formában leíró – problémákat vizsgálunk, melyekben az időbeli deriváltak mellett térbeli differenciálhányadosok is szerepelnek. Ezekben a feladatokban – és az időjárás-előrejelző modellekben – a térbeli diszkretizáció adott rácsfelbontáson történik. Ezért a továbbiakban arra keressük a választ, hogy ezekben a problémákban mi határozza meg az alkalmazható időlépcső nagyságát, s vajon a térbeli felbontás és az alkalmazható időlépcső hossza között van-e összefüggés.

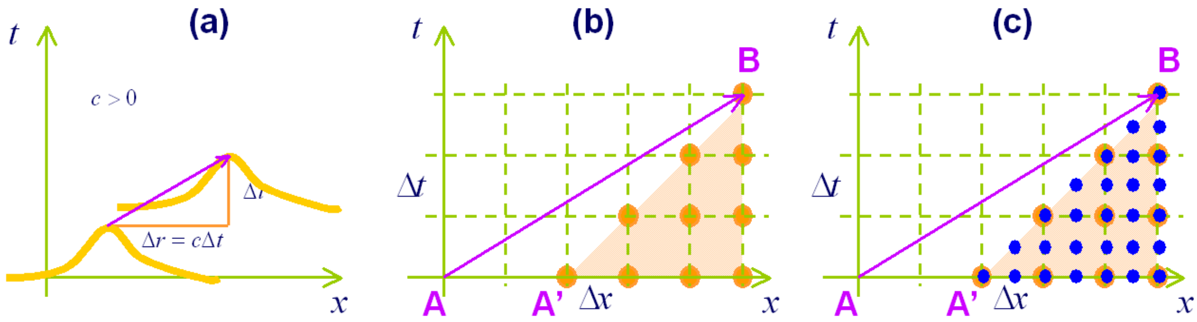
Tekintsük a (XIII.17.) egydimenziós lineáris advekciós egyenletet! Ennek analitikus megoldása $\phi(x-ct,0)$, amely a kezdeti feltételben megadott hullám c sebességgel való haladását írja le [*XIII.3. ábra* (a) panel]. Diszkretizáljuk a feladatot úgy, hogy az időbeli deriválásra explicit Euler-, a térbeli differenciálásra pedig bal oldali sémát alkalmazunk Δx rácsfelbontás és Δt időlépés mellett:

$$\frac{\phi_{j,n+1}-\phi_{j,n}}{\Delta t}+c\frac{\phi_{j,n}-\phi_{j-1,n}}{\Delta x}=0\,. \qquad \text{(XIII.50.)}$$

Tudjuk, hogy a fenti sémák konzisztensek: mind az Euler-módszer, mind a bal oldali séma elsőrendben pontos, s annál kisebb hibával közelíti a folytonos feladatot, minél finomabb a rácsfelbontás és az időlépcső. Vessük most össze a numerikus megoldást a pontos megoldással néhány időlépés után egy kiválasztott B rácspontban, amihez tekintsük a *XIII.3. ábra* (b) paneljét. A folytonos feladatban a ϕ B-beli értékét a kiindulási, azaz az A pontbeli értéke határozza meg (A nem feltétlenül rácspont és helyzete az advekciós sebességtől függ). Amennyiben a fenti sémákat alkalmazzuk a diszkretizációra, úgy a diszkretizált feladatban szintén c advekciós sebességgel számolva, ϕ B-beli értékét az ábrán körrel jelölt rácspontok értékei határozzák meg. Ha az időlépcső és a rácstávolság aránya olyan, hogy a körök által lefedett terület nem tartalmazza az A pontot (mint a *XIII.3. ábrán*), akkor a numerikus és a pontos megoldás eltérése az idővel korlátlanul megnövekedhet, azaz (a definíció alapján) a numerikus módszer nem lesz stabil. Az ábra (c) panelje illusztrálja, hogy a felbontás és az időlépés *tetszőleges* finomítása nem javít ezen: hiába alkalmazunk feleakkora rácstávolságot és időlépést, a helyzet nem változik.

Hogyan válasszuk meg tehát az adott rácsfelbontáshoz tartozó időlépést, ha szeretnénk a stabilitást garantálni? A válasz megadható a *XIII.3. ábra* alapján: úgy kell megállapítani az időlépcsőt, hogy a B pontbeli numerikus megoldást meghatározó rácspontok tartománya magában foglalja a B pontbeli folytonos megoldást meghatározó A pontot (azaz az ábrán az A pont legyen része a színezett sárga tartománynak). Ez pedig akkor teljesül, ha az $A'B$ szakasz meredeksége nem nagyobb, mint az AB szakaszé, azaz:

$$\Delta t \le \frac{\Delta x}{c}\,. \qquad \text{(XIII.51.)}$$



XIII.3. ábra. (a) Az egydimenziós lineáris advekciós egyenlet megoldásának sematikus rajza: a kezdeti feltétellel meghatározott hullám $c > 0$ sebességgel x-irányba való áthelyeződése egy időlépcső alatt. (b) Adott A pontbeli információ advekciója B pontba x-irányba mutató $c > 0$ sebességgel néhány időlépcső alatt (lila egyenes) a folytonos feladatban, valamint azok a rácspontok (sárga pontok) időlépésenként, amelyek a (XIII.50.) sémákkal, Δx rácsfelbontással és Δt időlépcsővel diszkretizált feladatban meghatározzák az érkezési pontban vett értéket. Ezek között a kiindulási időpillanatban a legszélső bal oldali rácspont az A' rácspont. (c) Ugyanaz, mint (b), csak feleakkora időlépcsővel és rácsfelbontással (kék pontok).

A (XIII.51.) feltétel tehát kimondja, hogy az időlépcsőt és a térbeli felbontást nem finomíthatjuk tetszőleges arányban. **A diszkretizált feladat stabilitásához rögzített rácstávolság mellett az alkalmazható időlépcsőt a feladat által leírt mozgásformák leggyorsabb terjedési sebessége határozza meg** (a fenti példában a c advekciós sebesség). (Ez a stabilitás szükséges feltétele.) A feltétel általánosítható más feladatokra is, s általános alakjában Courant–Friedrichs–Lewy vagy **CFL-kritériumnak** (Courant et al., 1928) nevezik. A kritériumnak a számítási hatékonyság szempontjából van jelentősége, a meteorológiai előrejelzések készítésénél a számítási műveletek és az adatok rendkívüli mennyisége miatt ugyanis az alkalmazott numerikus módszerek hatékonysága is lényeges szempont. Minél nagyobb időlépcsőt tudunk használni, annál kevesebb lépésben kell megismételni az integrálási műveleteket, s az előrejelzést annál gyorsabban tudjuk előállítani. Célunk tehát az, hogy az előrejelzési feladatot olyan numerikus sémák segítségével oldjuk meg, melyek adott felbontás mellett a lehető legnagyobb időlépcső használatát engedik meg.

XIII.5.2. Stabilitásvizsgálati módszerek

A továbbiakban két olyan stabilitásvizsgálati módszert tekintünk át, amelyek jól használhatók a különböző meteorológiai problémák megoldása során alkalmazott véges differencia sémák stabilitási és egyéb tulajdonságainak vizsgálatára.

Energia-módszer

Az energia-módszer lényege, hogy egy, a diszkrét feladathoz definiált pozitív definit mennyiségről megmutatjuk annak adott (pl. L_2-térbeli) norma szerinti korlátosságát. Amennyiben ez minden időlépcsőre teljesül, úgy a feladatban alkalmazott véges differencia séma stabil. A módszert azért nevezik energia-módszernek, mert a vizsgált mennyiség gyakran energiát reprezentál. Például az egydimenziós lineáris advekciós egyenlet esetében a diszkrét feladat által leírt rendszer energiája felírható a következő alakban (ahol j index a rácspontot, n az időlépést jelöli):

$$E_n = \frac{1}{2}\sum_j \left(\phi_{j,n}\right)^2 . \tag{XIII.52.}$$

Ha ϕ helyébe az áramlási sebességet helyettesítjük, akkor látható, hogy a fenti mennyiség a rendszer mozgási energiájával arányos. Az energia-módszer előnye, hogy nem-lineáris feladatok stabilitásának vizsgálatára is alkalmazható (Dévényi et al., 1998). Hátránya ugyanakkor, hogy bizonyos feladatoknál nehéz a stabilitási feltételt kinyerni a segítségével.

Feladat

7. feladat:

Tekintsük a $\phi(x,t)$ mennyiségre vonatkozó

$$\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial t} + c\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial x} = 0 \tag{XIII.53.}$$

egydimenziós lineáris advekciós egyenletet, ahol c konstans advekciós sebesség. Ha az időbeli deriváltat közelítésére a forward, a térbeli derivált közelítésére pedig a bal oldali sémát alkalmazzuk, akkor a következőt kapjuk:

$$\frac{\phi_{j,n+1} - \phi_{j,n}}{\Delta t} + c\frac{\phi_{j,n} - \phi_{j-1,n}}{\Delta x} = 0 , \tag{XIII.54.}$$

ahol a j index a j-edik rácspontot, az n index az n-edik időlépcsőt jelöli, Δt és Δx pedig az időlépcső hossza és a rácstávolság. Végezzük el (XIII.54) stabilitási analízisét az energia-módszer segítségével!

Megoldás

7. feladat:

Vezessük be $\alpha = c\frac{\Delta t}{\Delta x}$ -et és rendezzük át (XIII.54.)-et a következő módon:

$$\phi_{j,n+1} - \phi_{j,n} = -\alpha \cdot \left(\phi_{j,n} - \phi_{j-1,n}\right). \tag{XIII.55.}$$

(A sémát egyébként *upstream* vagy *upwind* sémának is nevezik, mivel ha megfigyeljük, $c > 0$ esetén a $\phi_{j,n+1}$ meghatározásához csak abból a – jelen esetben bal oldali – térbeli irányból használunk fel rácspontokat, ahonnan az áramlás és azzal az információ érkezik. A *downstream* vagy *downwind* sémák esetében olyan rácspontok értékeit is felhasználjuk, melyek az áramlás irányába esnek, és ahonnan fizikailag nem történhetne információterjedés.)

Szorozzuk be mindkét oldalt $\left(\phi_{j,n+1} + \phi_{j,n}\right)$-nel:

$$\phi_{j,n+1}^2 - \phi_{j,n}^2 = -\alpha \cdot \left(\phi_{j,n} - \phi_{j-1,n}\right) \cdot \left(\phi_{j,n+1} + \phi_{j,n}\right), \tag{XIII.56.}$$

s a jobb oldalon helyettesítsünk $\phi_{j,n+1}$ helyére $\phi_{j,n+1} = \phi_{j,n} - \alpha \cdot (\phi_{j,n} - \phi_{j-1,n})$-et:

$$\begin{aligned}\phi_{j,n+1}^2 - \phi_{j,n}^2 &= -\alpha \cdot (\phi_{j,n} - \phi_{j-1,n}) \cdot [2\phi_{j,n} - \alpha \cdot (\phi_{j,n} - \phi_{j-1,n})] = \\ &= -2\alpha \cdot \phi_{j,n}^2 + 2\alpha \cdot \phi_{j,n} \cdot \phi_{j-1,n} + \alpha^2 \cdot (\phi_{j,n} - \phi_{j-1,n})^2 = \\ &= -\alpha \cdot (\phi_{j,n} - \phi_{j-1,n})^2 - \alpha \cdot \phi_{j,n}^2 + \alpha \cdot \phi_{j-1,n}^2 + \alpha^2 \cdot (\phi_{j,n} - \phi_{j-1,n})^2 = \\ &= -\alpha \cdot (\phi_{j,n}^2 - \phi_{j-1,n}^2) - \alpha(1-\alpha)(\phi_{j,n} - \phi_{j-1,n})^2.\end{aligned} \qquad \text{(XIII.57.)}$$

Összegezzük mindkét oldalt minden j rácspontra (J+1 a rácspontok száma a tartományon):

$$\sum_{j=1}^{J+1} \phi_{j,n+1}^2 - \sum_{j=1}^{J+1} \phi_{j,n}^2 = -\sum_{j=2}^{J+1} \alpha \cdot (\phi_{j,n}^2 - \phi_{j-1,n}^2) - \sum_{j=2}^{J+1} \alpha(1-\alpha)(\phi_{j,n} - \phi_{j-1,n})^2. \qquad \text{(XIII.58.)}$$

Vegyük észre, hogy a bal oldalon az (n + 1)-edik és az n-edik időlépés energiájának különbsége áll! Továbbá a jobb oldali első tagban minden rácspontbeli érték kétszer szerepel, ellentétes előjellel, tehát az összegzésnél ez a tag eltűnik, amennyiben periodikus határfeltételeket tételezünk fel (azaz $\phi_{1,n} = \phi_{N+1,n}$). A következő marad:

$$E_{n+1} - E_n = -\alpha(1-\alpha) \cdot \sum_{j=2}^{N+1} (\phi_{j,n} - \phi_{j-1,n})^2. \qquad \text{(XIII.59.)}$$

Az energia-módszer értelmében a stabilitás szükséges feltétele, hogy a rendszer energiája korlátos maradjon, s ne növekedjen az idővel, azaz a fenti kifejezés nem lehet pozitív. Mivel az összegzésben szereplő négyzetösszegek mindig nem-negatívak, ezért az összegzés előtt álló együtthatónak szintén nem-negatívnak kell lennie, azaz:

$$\alpha(1-\alpha) \geq 0\,. \qquad \text{(XIII.60.)}$$

Ez a feltétel akkor teljesül, ha érvényes a következő:

$$0 < \alpha = c\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \rightarrow c > 0,\ \Delta t \leq \frac{\Delta x}{c}. \qquad \text{(XIII.61.)}$$

Itt szükséges megjegyezni, hogy ha $\alpha < 1,$ akkor a diszkrét feladatban az energia időlépésenként csökken (szemben a tényleges megoldás energiájával).

Neumann-módszer

A Neumann-módszer lineáris (vagy linearizált) problémák numerikus stabilitásának vizsgálatára alkalmazható. A módszert az advekciós egyenlet példáján keresztül mutatjuk be. Tekintsük a $\phi(x, t)$ mennyiségre vonatkozó egydimenziós lineáris advekciós egyenlet és az erre vonatkozó kezdeti feltétel által meghatározott Cauchy-feladatot:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\phi(x,t)}{\partial t} + u_0 \cdot \dfrac{\partial\phi(x,t)}{\partial x} = 0, \quad x \in [0, L] \\ \\ \phi(x, t=0) = f(x) \quad \rightarrow \text{ kezdeti feltétel} \\ \phi(x=0,t) = \phi(x=L,t) \quad \rightarrow \text{ periodikus határfeltételek} \end{cases} \tag{XIII.62.}$$

ahol u_0 a konstans advekciós sebesség (az advekciós sebesség jelölésénél a továbbiakban áttérünk az u_0 használatára, mert a c változót másra fogjuk használni). A (XIII.62.) feladat analitikus megoldása ismert:

$$\phi(x,t) = \phi(x - u_0 \cdot t, 0) = f(x - u_0 \cdot t). \tag{XIII.63.}$$

A lineáris differenciálegyenletek megoldása kifejezhető függvénysorok segítségével, a Neumann-módszer alkalmazásánál a kezdeti feltételt és a megoldást Fourier-sor alakban keressük (ezért a módszert Fourier-sor módszernek is nevezik). Ennek alapján tehát a kezdeti feltételt a következőképpen írhatjuk fel:

$$\phi(x, t=0) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot e^{ikx}, \tag{XIII.64.}$$

ahol k az adott hullámhoz tartozó hullámszám, c_k az ahhoz tartozó együttható. Ennek a (XIII.63.) analitikus megoldásba való behelyettesítésével a (XIII.62.) folytonos feladat megoldása a következő alakot ölti:

$$\phi(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot e^{ik(x - u_0 \cdot t)} = \sum_{k=1}^{\infty} \phi(x, 0) \cdot e^{ik \cdot (-u_0 \cdot t)}. \tag{XIII.65.}$$

Látható, hogy a fenti kifejezés olyan megoldást ír le, ami az adott k hullámszámú hullámot u_0 sebességgel x irányba advektálja anélkül, hogy annak kezdeti amplitúdóját megváltoztatná. Lineáris feladat esetében a Fourier-sor minden tagja megoldás, így elegendő egyetlen (jelen esetben a k-adik) Fourier-komponenst tekinteni. A kezdeti feltétel és a hozzá tartozó megoldás ekkor tehát egyetlen hullámot ír le:

$$\begin{aligned} \phi(x, t=0) &= c_k \cdot e^{ikx}, \\ \phi(x,t) &= c_k \cdot e^{ik(x - c \cdot t)} = \phi(x, 0) \cdot e^{ik \cdot (-c \cdot t)}. \end{aligned} \tag{XIII.66.}$$

Tekintsük most a (XIII.62.) feladathoz konstruált diszkrét feladatot, amelyben a térbeli és az időbeli deriváltak közelítésére különböző véges differencia sémákat alkalmazunk. A diszkrét feladat kezdeti feltétele a folytonos feladattal analóg módon írható fel:

$$\phi(x_j, t=0) = \phi_{j,0} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot e^{ikx_j}, \tag{XIII.67.}$$

ahol a j index a j-edik rácspontot, az időre vonatkozó 0 index pedig a kezdeti időpontot jelöli. A kezdeti feltétel ismeretében a diszkrét feladat megoldása adott rácspontban és időlépésben a következőképpen adható meg:

$$\phi(x_j, t_n) = \phi_{j,n} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^n \cdot c_k \cdot e^{ikx_j} , \tag{XIII.68.}$$

ahol λ a k hullámhoz tartozó és a numerikus sémától függő komplex-értékű, amplitúdó-jellegű mennyiség, a j index az adott rácspontot, az n kitevő pedig az adott időlépést jelöli. A diszkrét feladat esetében is igaz, hogy lineáris esetben a Fourier-sor minden tagja megoldása a feladatnak, s elegendő egyetlen hullámmóduszra vizsgálódni:

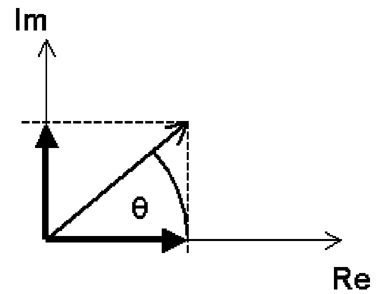
$$\begin{aligned} \phi_{j,0} &= c_k \cdot e^{ikx_j} , \\ \phi_{j,n} &= \lambda_k^n \cdot c_k \cdot e^{ikx_j} . \end{aligned} \tag{XIII.69.}$$

A fenti összefüggésben tehát a numerikus megoldás úgy áll elő, hogy a kezdeti feltétel minden időlépésben egy amplitúdó-jellegű mennyiséggel szorzódik. Könnyen belátható, hogy ahhoz, hogy a megoldás korlátos maradjon, szükséges, hogy $|\lambda_k|$ ne legyen nagyobb 1-nél – ez a stabilitás (és a konvergencia) szükséges feltétele. (Említettük, hogy a stabilitás elégséges feltételét nehéz meghatározni, ezért általában csupán a szükséges feltétel teljesülését vizsgálják.) Amennyiben $|\lambda_k| > 1$, úgy a kezdeti feltételt leíró hullám minden időlépésben gerjesztődik és a diszkrét feladat nem lesz stabil. Ha $|\lambda_k| < 1$, akkor a véges differencia séma fiktív csillapítást vezet be, azaz a kezdeti feltételhez tartozó hullámmegoldás az idővel folyamatosan csillapodik, szélsőséges esetben bizonyos (különösen a rövid hullámhosszú) hullámok teljesen el is tűnhetnek. Ideálisan $|\lambda_k|$ pontosan 1-gyel egyenlő, akkor a véges differencia séma nem változtatja meg a kezdeti feltételt leíró hullámot.

A hullám-megoldás amplitúdóján kívül a véges differencia séma a folytonos feladatban jellemző u_0 fázissebességet is módosíthatja: gyorsíthatja illetve lassíthatja azt. A diszkrét feladatbeli fázissebesség megadásához először is tekintsük a λ_k komplex mennyiséget következő alakban:

$$\lambda_k = |\lambda_k| \cdot e^{i \cdot \theta} , \tag{XIII.70.}$$

ahol θ a λ_k képzetes és valós része által bezárt szög (*XIII.4. ábra*)!



XIII.4. ábra. A λ_k valós és képzetes része által bezárt szög.

Ekkor a diszkrét feladat megoldása az alábbi módon írható fel:

$$\phi_{j,n} = (\lambda_k)^n \cdot c_k \cdot e^{ikx_j} = |\lambda_k|^n \cdot c_k \cdot e^{ik(x_j + n\theta / k)}. \qquad \text{(XIII.71.)}$$

A folytonos feladat analógiájára a fázissebesség a diszkrét feladatban:

$$c' = -\frac{n \cdot \theta}{k \cdot n \cdot \Delta t} = -\frac{\theta}{k\Delta t}. \qquad \text{(XIII.72.)}$$

A fázishiba megmutatja, hogy a folytonos feladatbeli u_0 és a diszkrét feladatbeli c' fázissebességek hogyan viszonyulnak egymáshoz:

$$R = \frac{c'}{u_0}. \qquad \text{(XIII.73.)}$$

Amennyiben $R > 1$, a véges differencia séma gyorsítja a folytonos feladatbeli k hullámot; ha $R < 1$, akkor a séma lassítja a k hullámot; s ha $R = 1$, akkor a séma nem változtatja meg a hullám fázissebességét. Bár az utóbbi eset tűnik ideálisnak, mégis alkalmasan megválasztott véges differencia séma esetében bizonyos hullámok „lassúbbá torzítása" előnyös is lehet (Radnóti, 2003). Tekintsünk például egy olyan feladatot, amelynek a meteorológiai szempontból kevéssé releváns gyorsan terjedő gravitációs hullámok is megoldásai! Ha erre explicit véges differencia sémát alkalmazunk, amely a hullámok fázissebességét lényegesen nem változtatja meg, akkor meglehetősen szigorú feltételt kell a numerikus stabilitás teljesítéséhez kielégíteni, amiben a vezető tag a feladat által leírt leggyorsabban terjedő mozgásforma (jelen esetben a gravitációs hullámok) fázissebessége. Implicit séma alkalmazásával azonban egy kedvezőbb feltétel nyerhető vagy éppen feltétel nélküli stabilitással tudunk dolgozni, mégpedig azáltal, hogy az implicit séma ezeknek a hullámoknak a fázissebességét csökkenti. A megoldás fizikai értelmezésénél ez nem okoz problémát, mert amint már említettük, ezek a hullámok a meteorológiai folyamatok szempontjából nem lényegesek, viszont a gyorsan terjedő hullámok lassításával stabilizálható a feladat ezekért felelős része.

Összefoglalva

A véges differencia séma a k hullámszámú hullámra

- stabil, ha $|\lambda_k| \le 1$,
- instabil, ha $|\lambda_k| > 1$.

A véges differencia séma a k hullámszámú hullámra

- neutrális, ha $|\lambda_k| = 1$,
- fiktív csillapítást vezet be, ha $|\lambda_k| < 1$,
- gerjesztést vezet be, ha $|\lambda_k| > 1$.

A véges differencia séma a k hullámszámú hullám fázissebességét

- nem változtatja meg, ha R=1,
- lassítja, ha R<1,
- gyorsítja, ha R>1.

Feladatok

8. feladat:

Lássuk be a Neumann stabilitásvizsgálati módszer alkalmazásával, hogy a $\phi(x,t)$ mennyiségre vonatkozó

$$\frac{\partial\phi(x,t)}{\partial t}+u_0\cdot\frac{\partial\phi(x,t)}{\partial x}=0 \qquad \text{(XIII.74.)}$$

egydimenziós lineáris advekciós egyenlet időbeli és a térbeli deriváltjainak közelítésére használt forward illetve centrált sémák alkalmazása esetén a

$$\frac{\phi_{j,n+1}-\phi_{j,n}}{\Delta t}+u_0\cdot\frac{\phi_{j+1,n}-\phi_{j-1,n}}{2\Delta x}=0 \qquad \text{(XIII.75.)}$$

diszkrét feladat **abszolút instabil** (a j index a j-edik rácspontot, az n index az n-edik időlépcsőt jelöli, Δt és Δx pedig az időlépcső hossza és a rácstávolság)!

9. feladat:

Lássuk be a Neumann stabilitásvizsgálati módszer alkalmazásával, hogy a $\phi(x,t)$ mennyiségre vonatkozó (XIII.74.) egydimenziós lineáris advekciós egyenlet időbeli deriváltjának közelítésére a forward séma, illetve térbeli deriváltjának közelítésére két időszintbeli centrált séma átlagának (azaz a hatpontos Crank-Nicholson séma) alkalmazása esetén a

$$\frac{\phi_{j,n+1}-\phi_{j,n}}{\Delta t}+u_0\cdot\frac{\dfrac{\phi_{j+1,n}-\phi_{j-1,n}}{2\Delta x}+\dfrac{\phi_{j+1,n+1}-\phi_{j-1,n+1}}{2\Delta x}}{2}=0 \qquad \text{(XIII.76.)}$$

diszkrét feladat **feltétel nélkül stabil** (a j index a j-edik rácspontot, az n index az n-edik időlépcsőt jelöli, Δt és Δx pedig az időlépcső hossza és a rácstávolság)!

10. feladat:

Adjuk meg a Crank-Nicholson sémával diszkretizált (XIII.76.) egyenletben érvényes fázissebességet! Értelmezzük az eredményt, összehasonlítva a (XIII.74.) folytonos feladatbeli fázissebességgel!

11. feladat:

Lássuk be, hogy a $\phi(x,t)$ mennyiségre vonatkozó (XIII.74.) egydimenziós lineáris advekciós egyenlet időbeli és térbeli deriváltjainak közelítésére használt leapfrog illetve centrált sémák esetén a

$$\frac{\phi_{j,n+1}-\phi_{j,n-1}}{2\Delta t}+u_0\cdot\frac{\phi_{j+1,n}-\phi_{j-1,n}}{2\Delta x}=0 \qquad \text{(XIII.77.)}$$

diszkrét feladatból (a j index a j-edik rácspontot, az n index az n-edik időlépcsőt jelöli, Δt és Δx pedig az időlépcső hossza és a rácstávolság) a Neumann stabilitásvizsgálati módszer alkalmazásával a következő adódik:

$$\lambda_k{}^2 + 2 \cdot i \cdot \alpha \cdot \sin(k\Delta x) \cdot \lambda_k - 1 = 0\,, \tag{XIII.78.}$$

ahol $\alpha = u_0 \dfrac{\Delta t}{\Delta x}$! Értelmezzük az eredményt!

12. feladat:

Lássuk be, hogy az $u(x,t)$ zonális sebességre és a $h(x,t)$ hullámmagasságra vonatkozó

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} + g \dfrac{\partial h(x,t)}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial h(x,t)}{\partial t} + H \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0 \end{cases} \tag{XIII.79.}$$

egydimenziós lineáris gravitációs hullám egyenlet időbeli és térbeli deriváltjainak közelítésére használt leapfrog illetve centrált sémák esetén a

$$\begin{cases} \dfrac{u_{j,n+1} - u_{j,n-1}}{2\Delta t} + g \dfrac{h_{j+1,n} - h_{j-1,n}}{2\Delta x} = 0 \\ \dfrac{h_{j,n+1} - h_{j,n-1}}{2\Delta t} + H \dfrac{u_{j+1,n} - u_{j-1,n}}{2\Delta x} = 0 \end{cases} \tag{XIII.80.}$$

diszkrét feladatra [ahol g a gravitációs gyorsulás, H a folyadék átlagos magassága (vagy mélysége; pl. az óceán vagy a légkör esetében), a j index a j-edik rácspontot, az n index az n-edik időlépcsőt jelöli, Δt és Δx pedig az időlépcső hossza és a rácstávolság] a Neumann stabilitásvizsgálati módszer alkalmazásával a következő stabilitási kritérium adódik:

$$\Delta t \le \frac{\Delta x}{\sqrt{g \cdot H}}\,. \tag{XIII.81.}$$

Értelmezzük az eredményt!

Megoldások

8. feladat:

A Neumann-módszer alkalmazásával a diszkrét megoldást adott rácspontban és időlépcsőben az alábbi alakban írjuk fel:

$$\phi_{j,n} = \lambda_k^n \cdot c_k \cdot e^{ikx_j}\,, \tag{XIII.82.}$$

ahol λ komplex-értékű szám, k az adott hullámhoz tartozó hullámszám, c_k a hullámhoz tartozó együttható, a j index az adott rácspontot, az n kitevő pedig az adott időlépést jelöli. Ezt behelyettesítve a (XIII.75.) egyenletbe, a következőt kapjuk:

$$\frac{\lambda_k^{n+1}\cdot c_k\cdot e^{ikx_j}-\lambda_k^n\cdot c_k\cdot e^{ikx_j}}{\Delta t}+u_0\cdot\frac{\lambda_k^n\cdot c_k\cdot e^{ikx_{j+1}}-\lambda_k^n\cdot c_k\cdot e^{ikx_{j-1}}}{2\Delta x}=0. \qquad \text{(XIII.83.)}$$

Egyszerűsítve $\lambda_k^n\cdot c_k$-val és bevezetve az $\alpha=u_0\dfrac{\Delta t}{\Delta x}$ mennyiséget:

$$\lambda_k\cdot e^{ikx_j}-e^{ikx_j}+\frac{\alpha}{2}\left(e^{ikx_{j+1}}-e^{ikx_{j-1}}\right)=0. \qquad \text{(XIII.84.)}$$

Ezt elosztva e^{ikx_j}-vel és kihasználva, hogy $x_{j\pm1}=(j\pm1)\cdot\Delta x$:

$$\lambda_k-1+\frac{\alpha}{2}\left(e^{ik\Delta x}-e^{-ik\Delta x}\right)=0. \qquad \text{(XIII.85.)}$$

Felismerve a zárójelben szereplő Euler-formulát, kapjuk az alábbit:

$$\lambda_k-1+\frac{\alpha}{2}\cdot 2\cdot i\cdot\sin(k\Delta x)=0\rightarrow\lambda_k=1-\alpha\cdot i\cdot\sin(k\Delta x). \qquad \text{(XIII.86.)}$$

Az $a=x+i\cdot y$ komplex szám abszolútértékének négyzete $|a|^2=a\cdot\overline{a}=x^2+y^2$, ennek ismeretében a λ_k abszolútértékének négyzete:

$$|\lambda_k|^2=1+\alpha^2\cdot\sin^2(k\Delta x). \qquad \text{(XIII.87.)}$$

Mivel mind az α, mind a $\sin^2$ függvény pozitív értékűek, ezért a $|\lambda_k|^2$ minden esetben 1-nél nagyobb értéket vesz fel. **Azaz a Neumann-módszer stabilitási kritériumából következően a két séma együttes alkalmazásával nem tudunk olyan időlépcsőt választani, amellyel a diszkrét feladat stabil lesz.**

9. feladat:

A Neumann-módszert (l. a 8. feladatnál) alkalmazva a (XIII.76.) egyenletre, a következőt kapjuk:

$$\frac{\lambda_k^{n+1}\cdot c_k\cdot e^{ikx_j}-\lambda_k^n\cdot c_k\cdot e^{ikx_j}}{\Delta t}+$$
$$+\frac{u_0}{2}\left(\lambda_k^n\cdot c_k\frac{e^{ikx_{j+1}}-e^{ikx_{j-1}}}{2\Delta x}+\lambda_k^{n+1}\cdot c_k\frac{e^{ikx_{j+1}}-e^{ikx_{j-1}}}{2\Delta x}\right)=0. \qquad \text{(XIII.88.)}$$

Egyszerűsítve $\lambda_k^n \cdot c_k \cdot e^{ikx_j}$ -vel és bevezetve az $\alpha = u_0 \dfrac{\Delta t}{\Delta x}$ mennyiséget:

$$\lambda_k - 1 + \frac{\alpha}{4}(1+\lambda_k)\cdot\left(e^{ik\Delta x} - e^{-ik\Delta x}\right) = 0\,. \qquad \text{(XIII.89.)}$$

Felismerve a zárójelben szereplő Euler-formulát, kapjuk az alábbit:

$$\lambda_k - 1 + \frac{\alpha}{2}\cdot(1+\lambda_k)\cdot i\cdot\sin(k\Delta x) = 0\,. \qquad \text{(XIII.90.)}$$

Ebből kifejezve λ_k -t:

$$\lambda_k = \frac{1 - \frac{\alpha}{2}\cdot i\cdot\sin(k\Delta x)}{1 + \frac{\alpha}{2}\cdot i\cdot\sin(k\Delta x)}\,. \qquad \text{(XIII.91.)}$$

Tovább alakítva ezt a kifejezést és kihasználva, hogy $i^2 = -1$:

$$\lambda_k = \frac{1 - \frac{\alpha}{2}\cdot i\cdot\sin(k\Delta x)}{1 + \frac{\alpha}{2}\cdot i\cdot\sin(k\Delta x)}\cdot\frac{1 - \frac{\alpha}{2}\cdot i\cdot\sin(k\Delta x)}{1 - \frac{\alpha}{2}\cdot i\cdot\sin(k\Delta x)} = \frac{1 - \frac{\alpha^2}{4}\cdot\sin^2(k\Delta x) - \alpha\cdot i\cdot\sin(k\Delta x)}{1 + \frac{\alpha^2}{4}\cdot\sin^2(k\Delta x)}\,. \qquad \text{(XIII.92.)}$$

Ebből a λ_k komplex mennyiség abszolútértékének négyzetét kifejezve:

$$|\lambda_k|^2 = \frac{\left[1 - \frac{\alpha^2}{4}\sin^2(k\Delta x)\right]^2 + \alpha^2\cdot\sin^2(k\Delta x)}{\left[1 + \frac{\alpha^2}{4}\sin^2(k\Delta x)\right]^2} = \frac{1 + \frac{\alpha^4}{16}\sin^2(k\Delta x) + \frac{\alpha^2}{2}\sin^2(k\Delta x)}{\left[1 + \frac{\alpha^2}{4}\sin^2(k\Delta x)\right]^2} = 1\,. \qquad \text{(XIII.93.)}$$

Megállapíthatjuk tehát, hogy az egydimenziós lineáris advekciós egyenletre alkalmazott **implicit séma feltétel nélkül stabil lesz** (azaz adott horizontális felbontáshoz bármekkora időlépcsőt választhatunk), ráadásul **a kezdeti hullámok amplitúdója nem változik** (nem nő – gerjesztődik – vagy csökken – csillapodik) **az idővel**. A séma hátránya ugyanakkor, hogy jelentős fázishibát okoz (l. a 10. feladatot is), illetve gyakorlati megvalósítása – az implicit tulajdonsága miatt – bonyolult.

10. feladat:

A diszkrét feladatbeli fázissebesség kifejezéséhez tekintsük λ_k -ra a $\lambda_k = |\lambda_k|\cdot e^{i\cdot\theta}$ alakot és használjuk fel a (XIII.92.) összefüggést:

$$\mathrm{tg}\,\theta=\frac{\mathrm{Im}_{\lambda_k}}{\mathrm{Re}_{\lambda_k}}=\frac{-\alpha\cdot\sin(k\Delta x)}{1-\frac{\alpha^2}{4}\cdot\sin^2(k\Delta x)}\to\theta=\mathrm{arctg}\frac{-\alpha\cdot\sin(k\Delta x)}{1-\frac{\alpha^2}{4}\cdot\sin^2(k\Delta x)}. \qquad \text{(XIII.94.)}$$

Ebből a diszkrét feladatbeli fázissebesség:

$$c'=-\frac{\theta}{k\Delta t}=\frac{1}{k\Delta t}\mathrm{arctg}\frac{\alpha\cdot\sin(k\Delta x)}{1-\frac{\alpha^2}{4}\cdot\sin^2(k\Delta x)}. \qquad \text{(XIII.95.)}$$

A fenti kifejezés tovább alakítható, ha kihasználjuk az $\mathrm{arctg}(x)+\mathrm{arctg}(y)=\mathrm{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$ összefüggést, melyben jelen esetben $x=y=\frac{\alpha}{2}\sin(k\Delta x)$. Ekkor a fázissebességre a következő adódik:

$$c'=\frac{2}{k\Delta t}\mathrm{arctg}\frac{\alpha\cdot\sin(k\Delta x)}{2}. \qquad \text{(XIII.96.)}$$

Az eredményt megvizsgálva láthatjuk, hogy a folytonos feladatbeli fázissebesség növekedése ($u_0\to\infty$, azaz $\alpha\to\infty$) esetén a diszkrét feladatbeli c' fázissebesség korlátos marad (az arctg-függvény felülről korlátos π/2-vel). Azaz **az implicit séma lassítja a gyorsan terjedő hullám-megoldásokat,** ezáltal ezek kielégítik a CFL-kritériumot, s így tudja a séma a feltétel nélküli stabilitást garantálni.

11. feladat:

A Neumann-módszert (l. a 8. feladatnál) alkalmazva a (XIII.77.) egyenletre, a következőt kapjuk:

$$\frac{\lambda_k^{n+1}\cdot c_k\cdot e^{ikx_j}-\lambda_k^{n-1}\cdot c_k\cdot e^{ikx_j}}{2\Delta t}+u_0\cdot\lambda_k^n\cdot c_k\frac{e^{ikx_{j+1}}-e^{ikx_{j-1}}}{2\Delta x}=0. \qquad \text{(XIII.97.)}$$

Egyszerűsítve $\lambda_k^{n-1}\cdot c_k\cdot e^{ikx_j}$-vel és bevezetve az $\alpha=u_0\frac{\Delta t}{\Delta x}$ mennyiséget:

$$\lambda_k{}^2-1+\alpha\cdot\lambda_k\cdot\left(e^{ik\Delta x}-e^{-ik\Delta x}\right)=0. \qquad \text{(XIII.98.)}$$

Felismerve a zárójelben szereplő Euler-formulát, kapjuk az alábbit:

$$\lambda_k{}^2+\alpha\cdot\lambda_k\cdot 2i\cdot\sin(k\Delta x)-1=0. \qquad \text{(XIII.99.)}$$

Amiatt, hogy a leapfrog séma nem kettő, hanem három időszintet használ, (XIII.99.)-cel λ_k-ra másodfokú egyenletet kaptunk, aminek két megoldása van. Ha alkalmazzuk a másodfokú egyenlet megoldó-képletét, és bevezetjük $p = \alpha \cdot \sin(k\Delta x)$-et, akkor λ_k -ra a következő két megoldás (módusz) adódik:

$$\lambda_{k1,2} = -i \cdot p \pm \sqrt{1 - p^2}. \qquad \text{(XIII.100.)}$$

Ha $\alpha > 1$, akkor lesz olyan hullámszám, amire $p > 1$ és ebben az esetben a gyökjel alatt lévő mennyiség negatív. Ekkor a λ_k tisztán képzetes, s $|\lambda_k|^2$ az egyik gyökre mindenképpen 1-nél nagyobb. Viszont ha $\alpha \le 1$, azaz $\Delta t \le \frac{\Delta x}{u_0}$, akkor $|\lambda_k|^2 = p^2 + 1 - p^2 = 1$, tehát a séma neutrálisan stabil. **Neutralitása, valamint másodrendű pontossága miatt ez az explicit séma kedvelt a meteorológiában annak ellenére, hogy a három időszint használata a korábban már bemutatott hátrányokkal jár.**

12. feladat:

A Neumann-módszert (l. a 8. feladatnál) alkalmazva a megoldást a következő alakban keressük:

$$\begin{aligned} u_{j,n} &= \overline{u} \cdot \lambda_k^n \cdot e^{ikx_j}, \\ h_{j,n} &= \overline{h} \cdot \lambda_k^n \cdot e^{ikx_j}, \end{aligned} \qquad \text{(XIII.101.)}$$

ahol $\overline{u}, \overline{h}$ a k hullámszámhoz tartózó együtthatók. Behelyettesítve (XIII.101.)-et a (XIII.80.) egyenletbe, a következőt kapjuk:

$$\begin{cases} \dfrac{\lambda_k^{n+1} \cdot \overline{u} \cdot e^{ikx_j} - \lambda_k^{n-1} \cdot \overline{u} \cdot e^{ikx_j}}{2\Delta t} + g \dfrac{\lambda_k^n \cdot \overline{h} \cdot e^{ikx_{j+1}} - \lambda_k^n \cdot \overline{h} \cdot e^{ikx_{j-1}}}{2\Delta x} = 0 \\ \dfrac{\lambda_k^{n+1} \cdot \overline{h} \cdot e^{ikx_j} - \lambda_k^{n-1} \cdot \overline{h} \cdot e^{ikx_j}}{2\Delta t} + H \dfrac{\lambda_k^n \cdot \overline{u} \cdot e^{ikx_{j+1}} - \lambda_k^n \cdot \overline{u} \cdot e^{ikx_{j-1}}}{2\Delta x} = 0. \end{cases} \qquad \text{(XIII.102.)}$$

Ha az $\overline{u}, \overline{h}$ együtthatókat úgy választjuk meg, hogy eleget tegyenek az alábbinak:

$$\frac{\overline{h}}{\overline{u}} = \sqrt{\frac{H}{g}}, \qquad \text{(XIII.103.)}$$

akkor a (XIII.102)-beli két csatolt egyenlet egy egyenletre redukálódik, mégpedig:

$$\frac{\lambda_k^{n+1} \cdot e^{ikx_j} - \lambda_k^{n-1} \cdot e^{ikx_j}}{2\Delta t} + \sqrt{gH} \cdot \frac{\lambda_k^n \cdot e^{ikx_{j+1}} - \lambda_k^n \cdot e^{ikx_{j-1}}}{2\Delta x} = 0. \qquad \text{(XIII.104.)}$$

Vegyük észre, hogy ez az egyenlet annyiban tér el a 11. feladatbeli (XIII.97.)-től, hogy az u_0 advekciós sebesség helyett $\sqrt{gH}$ szerepel benne! Ez pedig nem más, mint a gravitációs hullám terjedési sebessége, ugyanis a (XIII.79.) feladat átírható a következő módon:

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u \\ h \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -g \\ -H & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} u \\ h \end{pmatrix}, \tag{XIII.105.}$$

ahol a jobb oldalon szereplő mátrix sajátértéke $\pm\sqrt{gH}$, azaz a k hullámszámhoz két, ellentétes irányban $\sqrt{gH}$ fázissebességgel haladó hullám tartozik. Az egyszerűsítéseket elvégezve (XIII.104.)-en a következőket kapjuk:

$$\begin{gathered} \lambda_k^{\ 2} + \alpha \cdot \lambda_k \cdot 2i \cdot \sin(k\Delta x) - 1 = 0\,, \\ \lambda_{k1,2} = -i \cdot p \pm \sqrt{1 - p^2}\,, \end{gathered} \tag{XIII.106.}$$

ahol $p = \alpha \cdot \sin(k\Delta x)$ és $\alpha = \sqrt{gH}\,\frac{\Delta t}{\Delta x}$. A 11. feladattal analóg módon tehát a stabilitási kritérium ebben az esetben a következőképpen alakul:

$$\alpha \le 1 \rightarrow \Delta t \le \frac{\Delta x}{\sqrt{gH}}\,. \tag{XIII.107.}$$

Ez azt jelenti, hogy az egydimenziós lineáris gravitációs hullám-egyenlet diszkretizációjára a leapfrog és a centrált sémákat használva, az adott felbontás esetén alkalmazható **időlépcső hosszára a gravitációs hullám terjedési sebessége szab korlátot**. A tropopauza átlagos magasságát (H-t) 10 km-nek, a gravitációs gyorsulás (g) átlagos értékét $10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$-nak véve, ez a sebesség $300\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ nagyságúnak adódik, s így a 10 km-es rácsfelbontásnál alkalmazható időlépcső nem nagyon haladhatja meg a 30 másodpercet. Ezzel szemben a 11. feladatban szereplő advekciós sebesség még a nagy magasságokban sem nagyobb $100\,\mathrm{m\,s^{-1}}$-nál, ekkor az integrálási időlépés 10 km-es felbontás mellett 100 s is lehet. Látható tehát, hogy a most kapott (XIII.107.) stabilitási kritérium **szigorúbb korlátot jelent** az időlépcső hosszára, mint amit az advekciós egyenlet esetében kaptunk. Azaz egy olyan feladatban, amely a gravitációs hullámok terjedését is leírja, adott felbontáshoz rövidebb integrálási időlépcsőt tudunk csak alkalmazni (az integrálást több kisebb lépésben kell elvégeznünk), hogy a feladat numerikus stabilitása megmaradjon.

XIII.6. Hatékony numerikus sémák

Az előző alfejezetben az egydimenziós lineáris advekciós valamint lineáris gravitációs hullám egyenletekre vizsgáltuk meg a különböző véges differencia sémák numerikus stabilitását. Láttuk, hogy az explicit sémák alkalmazásával a numerikus stabilitás csak akkor teljesülhet, ha eleget teszünk a CFL-kritériumnak – azaz ha az integrálási időlépcső megválasztásánál tekintettel vagyunk a térbeli felbontás és a feladat által leírt leggyorsabban terjedő mozgásforma sebességének a hányadosára. (Ugyanakkor a 8. feladatban mutattunk példát olyan explicit véges differencia sémára is, amelynél a stabilitás még a CFL-feltétel betartásával sem garantálható.) Ezenkívül megállapítottuk, hogy az implicit sémák esetében tetszőlegesen hosszú időlépcső választható (l. a 9. feladatot), mégpedig azért, mert az implicit sémák a feladatban érvényes fázissebességet lassítják (l. a 10. feladatot), s ezáltal a gyorsan terjedő hullámmegoldásokra is stabil megoldást biztosítanak. Az általuk okozott fázishiba ugyanakkor nem minden hullám esetében kívánatos, ezért, valamint bonyolult megvalósításuk miatt a meteorológiai gyakorlatban nem alkalmaznak tisztán implicit sémákat.

A meteorológiai előrejelzések készítésénél a számítási műveletek és az adatok rendkívüli mennyisége miatt az alkalmazott numerikus módszerek pontossága mellett elsődleges szempont azok hatékonysága. Tehát **a cél olyan diszkretizációs módszerek alkalmazása, melyekkel a numerikus stabilitás tetszőlegesen hosszú integrálási időlépcső használata mellett sem sérül**. A továbbiakban az előrejelzési feladatot reálisabban közelítő, advekciós és gravitációs hullám tagokat egyaránt tartalmazó egyenleteken fogjuk bemutatni azokat a numerikus sémákat, melyekkel ez teljesül és ezért a gyakorlatban is elterjedtek.

Tekintsük a következő egydimenziós lineáris egyenletrendszert az $u(x, t)$ zonális sebességre és a $h(x, t)$ hullámmagasságra vonatkozóan:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} + u_0 \cdot \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x} + g\dfrac{\partial h(x,t)}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial h(x,t)}{\partial t} + u_0 \cdot \dfrac{\partial h(x,t)}{\partial x} + H\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0\,, \end{cases} \qquad \text{(XIII.108.)}$$

melyben az egyenletek középső tagjai a (lineáris) advekciót, az utolsó tagok pedig a (szintén lineáris) gravitációs hullámokat reprezentálják. A 11–12. feladat alapján a Neumann stabilitásvizsgálati módszer segítségével levezethető, hogy ha az időbeli deriváltak közelítésére a leapfrog, a térbeli deriváltak közelítésére a centrált sémát alkalmazzuk, akkor a diszkrét feladatra a stabilitás szükséges feltétele a következő lesz:

$$\Delta t \le \frac{\Delta x}{u_0 + \sqrt{gH}}\,. \qquad \text{(XIII.109.)}$$

Tehát a fenti explicit sémát használva (XIII.108.)-ra, az adott felbontás esetén alkalmazható időlépcső hosszára az advekció és a gravitációs hullám terjedési sebességének összege szab korlátot. Mivel az előzőekben láttuk, hogy utóbbi lényegesen nagyobb az előbbinél, ezért kijelenthetjük, hogy a stabilitás szükséges feltételénél gyakorlatilag a gravitációs hullámok terjedési sebessége a meghatározó.

XIII.6.1. Szemi-implicit séma

Alkalmazzunk most (XIII.108.)-ra olyan ún. *szemi-implicit* diszkretizációt, ami az advekciós tagok esetében megtartja az explicit sémát, a gravitációs hullám tagokat viszont implicit módon kezeli (Robert, 1981). Például a második tagok esetében az explicit középponti sémát használjuk, a harmadik tagok esetében pedig centrált sémák átlagát vesszük két időszintre a korábban már látott módon:

$$\begin{cases} \dfrac{u_{j,n+1}-u_{j,n-1}}{2\Delta t}+u_0\dfrac{u_{j+1,n}-u_{j-1,n}}{2\Delta x}+g\dfrac{\dfrac{h_{j+1,n}-h_{j-1,n}}{2\Delta x}+\dfrac{h_{j+1,n+1}-h_{j-1,n+1}}{2\Delta x}}{2}=0 \\ \dfrac{h_{j,n+1}-h_{j,n-1}}{2\Delta t}+u_0\dfrac{h_{j+1,n}-h_{j-1,n}}{2\Delta x}+H\dfrac{\dfrac{u_{j+1,n}-u_{j-1,n}}{2\Delta x}+\dfrac{u_{j+1,n+1}-u_{j-1,n+1}}{2\Delta x}}{2}=0\,. \end{cases} \tag{XIII.110.}$$

A Neumann-módszer segítségével belátható, hogy a szemi-implicit módszer alkalmazása esetén a következő adódik:

$$u_0{}^2\cdot\Delta t^2\le\Delta x^2+gH\cdot\Delta t^2\,, \tag{XIII.111.}$$

ez pedig minden esetben teljesül, amikor az advekciós egyenletnél kapott stabilitási feltétel teljesül, azaz amikor:

$$\Delta t\le\frac{\Delta x}{u_0}\,. \tag{XIII.112.}$$

Tehát a szemi-implicit módszer alkalmazásával elértük, hogy ne a feladat által leírt leggyorsabban terjedő mozgásforma, azaz a gravitációs hullámok terjedési sebessége legyen a meghatározó az időlépcső megválasztásánál, hanem az annál jóval kisebb advekciós sebesség, lehetővé téve a nagyobb időlépésekben történő stabil modellintegrálást.

A szemi-implicit séma szépsége abban áll, hogy az implicit kezelést az egyenlet lineáris részére alkalmazza, s ezek a tagok felelősek egyben azokért a hullám-megoldásokért, melyek gyorsan terjednek, de jelentőségük meteorológiai szempontból kicsi. Az implicit módszer ezeket a hullámokat lelassítja, ezáltal stabilizálva a feladat lineáris részét és érintetlenül hagyva a meteorológiailag releváns, lassúbb mozgásformákat. Általánosan a szemi-implicit módszer a következő alakban írható fel:

$$\frac{\partial\Psi^0}{\partial t}=L\left(\frac{\Psi^++\Psi^-}{2}\right)+N\left(\Psi^0\right), \tag{XIII.113.}$$

ahol a teljes nem-lineáris modellt linearizáljuk egy referencia-állapot körül, ami legtöbbször az izoterm, nyugvó légkör (ez gyakran távol esik a valós légköri állapottól): az L operátor a modell linearizált része, az N operátor a nem-lineáris maradéktag. A 0,+,- indexek pedig az aktuális, a későbbi és a korábbi időlépcsőket reprezentálják, jelölve, hogy **a szemi-implicit módszerben a linearizált tagokra implicit kezelést, a nem-lineáris tagokra explicit kezelést alkalmazunk**.

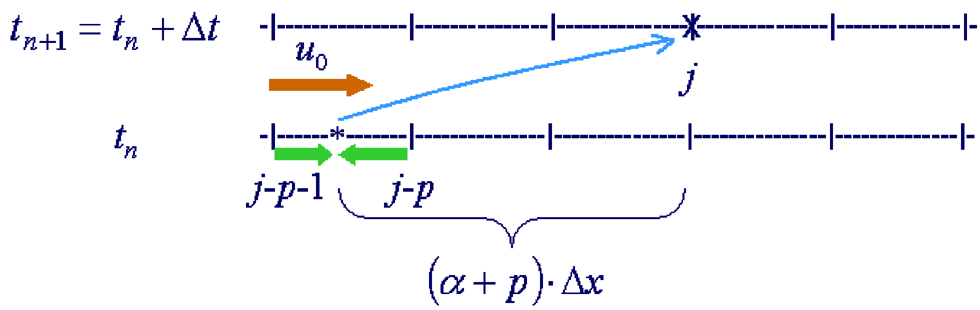
XIII.6.2. Szemi-Lagrange módszer

A nem-lineáris egyenletrendszer teljes implicit kezelése (ami biztosíthatná a feltétel nélküli stabilitást) nem lehetséges (reális), mert nem-lineáris operátor invertálását igényelné. Ezért hogy az advekciós sebesség által meghatározott stabilitási feltételt tovább tudjuk enyhíteni, a szemi-implicit sémát ötvözni kell egy másik hatékony módszerrel.

A hidro-termodinamikai egyenletrendszerben a legdominánsabb nem-lineáris tag a nem-lineáris advekció, ennek kezelésére segítségül hívjuk a Lagrange-módszert. A Lagrange-szemléletben nem egy térben rögzített koordináta-rendszer pontjaiban tekintjük az állapothatározók változását, hanem a részecskékhez (légelemekhez) rögzített lokális koordináta-rendszerekkel dolgozunk: a részecskék trajektóriáját követjük, ami mentén magukkal viszik kiindulási tulajdonságaikat. Adott ϕ tulajdonság trajektória-menti megmaradását fejezi ki az egydimenziós lineáris advekciós egyenlet alábbi Lagrange-alakja:

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = 0, \quad \text{ahol} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} \ . \qquad \text{(XIII.114.)}$$

Tehát az állapothatározók adott időpontban vett térbeli eloszlásának és pályájának ismeretében meghatározható jövőbeli eloszlásuk. A numerikus számítások során azonban szeretnénk az Euler-szemléletnek azt a kényelmes tulajdonságát megtartani, hogy a légköri változókat egy szabályos rács rácspontjaiban tekintjük (egyrészt mert egyéb műveleteket is rácson kell elvégezni, másrészt mert ezáltal biztosítható az egyenletes térbeli lefedettség). Ez a tiszta Lagrange-módszer segítségével nem lehetséges, hiszen azok a részecskék, melyek kiinduláskor még szabályosan helyezkedtek el, már egy időlépés után is szabálytalan és térben inhomogén elrendeződést vehetnek fel. Ezért az ún. ***szemi-Lagrange módszerben* minden időlépésben egy backward (visszafelé) trajektória számításával és térbeli interpoláció alkalmazásával állítjuk elő az állapothatározók értékét az általunk kívánt rácspontokban** (*XIII.5. ábra*). Világos, hogy így az időbeli integrálás során nem ugyanazokat a részecskét követjük, hanem a rácspontok elhelyezkedése alapján **minden időlépésben új részecskehalmazt definiálunk**.



XIII.5. ábra. A szemi-Lagrange módszer sematikus rajza.

A trajektória kiindulási pontját (melyet az ábrán * jelöl) az advekciós sebesség ismeretében tudjuk meghatározni, amit az egyszerűség kedvéért most tekintsünk állandónak: a részecske ekkor Δt idő alatt u_0 sebességgel advektálódik, mialatt $(\alpha + p)\cdot\Delta x$ távolságot tesz meg. A korábbi időszintről való indulás nem feltétlenül rácspontból történik, ezért a megtett utat két részre oszthatjuk: a Δt idő alatt bejárt rácspontok számát p-vel jelöljük, ahol p egész szám, a maradék út pedig a rácstávolság α-szorosa, ahol α értelemszerűen 0 és 1 közé eső törtszám, azaz:

$$(p + \alpha)\cdot \Delta x = u_0 \cdot \Delta t \ . \qquad \text{(XIII.115.)}$$

Az (n+1)-edik időlépésben a ϕ állapothatározó értéke a konzervativitás miatt meg fog egyezni a ϕ n-edik időlépésben és * pontban felvett értékével. Mivel az n-edik időszinten a ϕ eloszlását csak a rácspontokban ismerjük, ezért a * pontbeli értéket térbeli interpolációval tudjuk előállítani. Az egyszerűség kedvéért tekintsük most a legegyszerűbb lineáris interpolációt, amivel a következőt kapjuk:

$$\phi_{j,n+1} = \phi_{*,n} = (1-\alpha)\cdot\phi_{j-p,n} + \alpha\cdot\phi_{j-p-1,n}. \qquad \text{(XIII.116.)}$$

A Neumann-módszer segítségével belátható, hogy

$$|\lambda_k|^2 = 1 - 2\alpha\cdot(1-\alpha)\cdot(1-\cos k\Delta x) \qquad \text{(XIII.117.)}$$

mellett a séma stabilitásának feltétele, hogy α-ra fennálljon az alábbi:

$$0 \le \alpha \le 1. \qquad \text{(XIII.118.)}$$

Ez azonban a séma konstrukciójából eredően teljesül (hiszen α-t pontosan így választottuk meg), így **a séma feltétel nélkül stabil**. A szemi-Lagrange módszer alkalmazásával tehát nem kell tekintettel lennünk a CFL-kritériumra, az abban megengedettnél hosszabb időlépcsőt is választhatunk. Ez az időlépcső azonban továbbra sem lehet tetszőlegesen nagy: **teljesülnie kell a Lipschitz-feltételnek**, mely szerint **a trajektóriák egy időlépcső alatt nem metszhetik egymást** – ellenkező esetben nem lehetséges a részecskék pályáját egyértelműen meghatározni. Mindazonáltal numerikus kísérletekkel igazolták, hogy mezoskálájú modellek esetén a szemi-Lagrange séma az időlépcső mintegy hatszoros növelését teszi lehetővé az euleri sémákkal szemben (Staniforth és Côté, 1991), továbbá a szemi-implicit sémával való kombinálása esetén az integrálás hatékonysága további hatszorosával nő (Robert et al., 1985).

Feladatok

13. feladat:

A ϕ mennyiségre vonatkozó egydimenziós lineáris advekciós egyenletre a szemi-Lagrange módszert alkalmazva, ϕ értékét tetszőleges j rácspontban és (n + 1)-edik időlépésben a következőképpen határozhatjuk meg:

$$\phi_{j,n+1} = \phi_{*,n} = (1-\alpha)\cdot\phi_{j-p,n} + \alpha\cdot\phi_{j-p-1,n}\ , \qquad \text{(XIII.119.)}$$

ahol a p egész szám a Δt idő alatt bejárt rácspontok száma, α pedig 0 és 1 közé eső törtszám, ami azt fejezi ki, hogy a maradék út a rácstávolságnak hanyadrésze. Neumann-módszer segítségével végezzük el (XIII.119.) stabilitási analízisét!

14. feladat:

Lássuk be, hogy a ϕ mennyiségre vonatkozó egydimenziós lineáris advekciós egyenletre a szemi-Lagrange módszert alkalmazva, a folytonos feladatban lévő (u_0) és a diszkretizált feladatban uralkodó (c') fázissebességek viszonyát jellemző fázishibára a következő adódik:

$$R=\frac{c'}{u_0}=\frac{p\cdot k\cdot\Delta x+\operatorname{arctg}\left[\dfrac{\alpha\cdot\sin k\Delta x}{1-\alpha(1-\cos k\Delta x)}\right]}{k\cdot\Delta x\cdot(p+\alpha)}, \tag{XIII.120.}$$

ahol a p egész szám a Δt idő alatt bejárt rácspontok száma, α pedig 0 és 1 közé eső törtszám, ami azt fejezi ki, hogy a maradék út a rácstávolságnak hanyadrésze! Értelmezzük az eredményt!

Megoldások

13. feladat:

A Neumann-módszert (l. a 8. feladatnál) alkalmazva (XIII.119.)-re:

$$\lambda_k^{n+1}\cdot c_k\cdot e^{ikx_j}=(1-\alpha)\cdot\lambda_k^n\cdot c_k\cdot e^{ikx_{j-p}}+\alpha\cdot\lambda_k^n\cdot c_k\cdot e^{ikx_{j-p-1}}. \tag{XIII.121.}$$

Egyszerűsítve $\lambda_k^n\cdot c_k\cdot e^{ikx_j}$ -vel:

$$\lambda_k=(1-\alpha)\cdot e^{-ik\cdot p\Delta x}+\alpha\cdot e^{-ik\cdot(p+1)\Delta x}. \tag{XIII.122.}$$

Ezt kifejtve:

$$\begin{aligned}\lambda_k&=(1-\alpha)[\cos(pk\Delta x)-i\cdot\sin(pk\Delta x)]+\\&\quad+\alpha\{\cos[(p+1)k\Delta x]-i\cdot\sin[(p+1)k\Delta x]\}=\\&=(1-\alpha)\cdot\cos(pk\Delta x)+\alpha\cdot\cos[(p+1)k\Delta x]-\\&\quad-i\cdot(1-\alpha)\cdot\sin(pk\Delta x)-i\cdot\alpha\cdot\sin[(p+1)k\Delta x].\end{aligned} \tag{XIII.123.}$$

Kifejezve λ_k abszolútértékének négyzetét:

$$\begin{aligned}|\lambda_k|^2&=\mathrm{Re}^2+\mathrm{Im}^2=\\&=(1-\alpha)^2\cdot\cos^2(pk\Delta x)+\alpha^2\cdot\cos^2[(p+1)k\Delta x]+\\&\quad+2(1-\alpha)\cdot\alpha\cdot\cos(pk\Delta x)\cdot\cos[(p+1)k\Delta x]+\\&\quad+(1-\alpha)^2\cdot\sin^2(pk\Delta x)+\alpha^2\cdot\sin^2[(p+1)k\Delta x]+\\&\quad+2(1-\alpha)\cdot\alpha\cdot\sin(pk\Delta x)\cdot\sin[(p+1)k\Delta x].\end{aligned} \tag{XIII.124.}$$

Felismerve a $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ és a $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$ azonosságokat, a fentit egyszerűbb alakra hozhatjuk:

$$|\lambda_k|^2=(1-\alpha)^2+\alpha^2+2(1-\alpha)\cdot\alpha\cdot\cos(k\Delta x). \tag{XIII.125.}$$

Átrendezés után az alábbit kapjuk:

$$\left|\lambda_k\right|^2 = 1 - 2(1-\alpha)\cdot\alpha\cdot\left[1-\cos(k\Delta x)\right]. \tag{XIII.126.}$$

A stabilitáshoz a következőnek kell teljesülnie:

$$\begin{gathered}\left|\lambda_k\right|^2 = 1 - 2(1-\alpha)\cdot\alpha\cdot\left[1-\cos(k\Delta x)\right] \le 1, \\ 0 \le (1-\alpha)\cdot\alpha\cdot\left[1-\cos(k\Delta x)\right].\end{gathered} \tag{XIII.127.}$$

Mivel a harmadik tényező nem-negatív, így az első két tényező szorzatának is annak kell lennie a feltétel teljesüléséhez. Ez pedig úgy lehetséges, ha $0 \le \alpha \le 1$, ami eleve adódik a séma konstrukciójából. A szemi-Lagrange módszer tehát feltétel nélkül stabil.

14. feladat:

A 13. feladatban λ_k -ra a következőt kaptuk:

$$\lambda_k = (1-\alpha)\cdot e^{-ik\cdot p\Delta x} + \alpha\cdot e^{-ik\cdot(p+1)\Delta x}. \tag{XIII.128.}$$

A diszkrét feladatbeli fázissebesség kifejezéséhez tekintsük λ_k -ra a $\lambda_k = \left|\lambda_k\right|\cdot e^{i\cdot\theta}$ alakot és használjuk fel a (XIII.128.) összefüggést:

$$\lambda_k = \left|\lambda_k\right|\cdot e^{i\theta} = e^{-ik\cdot p\Delta x}\left[1-\alpha\cdot\left(1-e^{-ik\Delta x}\right)\right]. \tag{XIII.129.}$$

Rendezzük át a kapott egyenletet a következőképpen:

$$\left|\lambda_k\right|\cdot e^{i\theta}\cdot e^{ik\cdot p\Delta x} = 1-\alpha\cdot\left(1-e^{-ik\Delta x}\right). \tag{XIII.130.}$$

Felismerve és ismét felhasználva a $\lambda_k = \left|\lambda_k\right|\cdot e^{i\cdot\theta}$ alakot:

$$\left|\lambda_k\right|\cdot e^{i(\theta+kp\Delta x)} = \underbrace{1-\alpha+\alpha\cdot\cos(k\Delta x)}_{\mathrm{Re}}\underbrace{-i\cdot\alpha\cdot\sin(k\Delta x)}_{\mathrm{Im}}. \tag{XIII.131.}$$

Ebből $\theta' = \theta + kp\Delta x$ helyettesítéssel élve:

$$\theta' = \theta + kp\Delta x = \mathrm{arctg}\frac{\mathrm{Im}}{\mathrm{Re}} = \mathrm{arctg}\frac{-\alpha\cdot\sin(k\Delta x)}{1-\alpha+\alpha\cdot\cos(k\Delta x)}. \tag{XIII.132.}$$

Kifejezve a θ fázisszöget:

$$\theta = \mathrm{arctg}\frac{-\alpha\cdot\sin(k\Delta x)}{1-\alpha+\alpha\cdot\cos(k\Delta x)} - kp\Delta x, \tag{XIII.133.}$$

amiből a fázishiba (XIII.115.) felhasználásával a következőnek adódik:

$$R=\frac{c'}{u_0}=-\frac{\theta}{u_0 \cdot k\Delta t}=\frac{p\cdot k\cdot \Delta x+\operatorname{arctg}\left[\frac{\alpha\cdot\sin k\Delta x}{1-\alpha(1-\cos k\Delta x)}\right]}{k\cdot\Delta x\cdot(p+\alpha)}. \qquad \text{(XIII.134.)}$$

A fázishibára kapott kifejezés alapján látható, hogyha a kiindulási pont rácspontba esik, azaz α értéke 0 vagy 1, akkor a szemi-Lagrange módszer nem változtat a megoldás terjedési sebességén (R = 1). A hosszú hullámoknál (amikor $k\Delta x \rightarrow 0$) a fázishiba szintén 1-hez közeli értéket vesz fel, továbbá akkor is, amikor a p nagy, tehát egy időlépés alatt a részecske nagy távolságot tesz meg.

XIII.7. Kitekintés

A példatár jelen fejezetében a numerikus prognosztika számos területe közül a különböző diszkretizációs eljárások pontosságát és stabilitását elemeztük gyakorlati feladatokon keresztül, külön hangsúlyt fektetve az ún. *rácsponti modellekben* a differenciáloperátorok közelítésére használt véges különbséges sémákra. Az alábbiakban röviden áttekintést adunk azokról a témákról, amelyek a jelen jegyzetben nem szerepeltek, de a numerikus előrejelzés kulcsfontosságú módszereiként részletesen tárgyaljuk őket az „Alkalmazott számszerű előrejelzés – numerikus időjárási és csatolt modellek a gyakorlatban" című jegyzet II. fejezetében, esetenként gyakorlati példákkal kiegészítve:

- A véges differencia sémák mellett az egyenletekben szereplő horizontális térbeli differenciáloperátorokat közelíthetjük olyan folytonos függvények lineáris kombinációjaként, melyek analitikusan deriválhatók, s így elvben segítségükkel a deriváltak végtelen rendű pontossággal meghatározhatók. Ezt a technikát Galjorkin-módszernek nevezzük és ezen belül a függvényrendszer megválasztásától függően beszélhetünk végeselem, illetve spektrális módszerről.
- A numerikus előrejelzés során olyan folyamatokat is figyelembe kell vennünk, amelyeket nem tudunk explicit módon származtatni – vagy azért, mert túl bonyolultak, vagy azért, mert karakterisztikus méretük kisebb a modell térbeli rácsának felbontásánál. Ezeket ún. *parametrizációs eljárások* segítségével írjuk le a numerikus modellekben.
- A modellintegrálás megkezdéséhez szükséges kezdeti feltétel meghatározása az előrejelzés elkészítésének egyik legkritikusabb lépése, hiszen minél pontosabban ismerjük a légkör kiindulási állapotát leíró meteorológiai elemek eloszlását, annál megbízhatóbban tudjuk előrejelezni ezek változását. Az ún. *adatasszimiláció* során az előrejelzési tartományt lefedő háromdimenziós rács minden pontjában előállítjuk az állapotváltozók kezdeti értékeit, amihez minden létező meteorológiai információt felhasználunk: különböző típusú megfigyelési adatokat, korábbi időpontból indított modell-előrejelzéseket, valamint ezek egyes jellemzőit.
- A numerikus prognosztika dinamikusan fejlődő területe az éghajlati modellezés, ami hasonló numerikus módszerekre támaszkodik, mint a rövidtávú előrejelzések. Lényeges különbség az időjárás előrejelzéséhez képest, hogy az éghajlati rendszer fejlődését nemcsak a légkör, hanem a teljes földi rendszer folyamatai kormányozzák, ezért az éghajlati szimulációkban a légköri modellekhez óceáni és egyéb numerikus modelleket is csatolnak, ami egyben az előrejelezhetőség fogalmát is átértelmezi.
- A meteorológiai előrejelzések bizonytalansággal terheltek, melyek több forrásból erednek. A rövidtávú előrejelzések esetében elsősorban a kezdeti feltételek bizonytalanságából, valamint az időjárási modellek pontatlanságaiból származnak, éghajlati skálán pedig a klímamodellek közelítő jellegéből és a jövőbeli emberi tevékenység előrejelezhetetlenségéből (kiszámíthatatlanságából) adódnak. A különböző bizonytalanságokat az ún. *ensemble technika* segítségével számszerűsíthetjük, amelynek során nem egyetlen modellkísérletet tekintünk, hanem több szimuláció együttesét.

Köszönetnyilvánítás

Köszönet illeti *Horányi Andrást* javaslataiért és észrevételeiért, melyek mindig további gondolkodásra késztetnek.

Irodalom

Courant, R., Friedrichs, K.O., Lewy, H., 1928: Über die Partielen Differenzengleichungen der Mathematischen Physik. Math. Annalen 100, 32–74.

Courant, R., Hilbert, D., 1962: Partial differential equations. Methods of mathematical physics, Vol. II, Interscience, New York, pp. 561.

Dévényi D., Horányi A., Radnóti G.,1998: Numerikus módszerek az időjárás előrejelzésben. Országos Meteorológiai Szolgálat, Budapest.

Kalnay, E., 2003: Atmospheric modelling, data assimilation and predictability. Cambridge University Press, Cambridge.

Horányi A., Ihász I., Radnóti G., 1998: Az időjárás számszerű előrejelzése. Természet Világa 129, különszám, 39–42.

Lax, P.D., Richtmyer, R.D., 1956: Survey of the stability of linear finite difference equations. Comm. Pure Appl. Math. 9, 267–293.

Mesinger, F., Arakawa, A., 1976: Numerical Methods Used in Atmospheric Models, Volume 1. GARP Publications Series 17.

Radnóti G., 2003: A numerikus előrejelzés alapjai, numerikus módszerek. 29. Meteorológiai Tudományos Napok, beszámolókötet, 25–40.

Robert, A.J., 1981: A stable numerical integration scheme for the primitive meteorological equations. Atmosphere–Ocean 19, 35–46.

Robert, A., Yee, T.L., Ritchie, H., 1985: A semi-Lagrangian and semi-implicit numerical integration scheme for multilevel atmospheric models. Mon. Wea. Rev. 113, 388–394.

Staniforth, A., Côté, J., 1991: Semi-Lagrangian Integration Schemes for Atmospheric Models – A Review. Mon. Wea. Rev. 119, 2206–2223.