F.2. A vonal-, felületi és térfogati integrálokkal kapcsolatos legfontosabb összefüggések

Legyen $\rho(x,y,z)=\rho(\mathbf{r})$ folytonos és differenciálható skalár-vektor függvény; $\mathbf{v}(x,y,z)=\mathbf{v}(\mathbf{r})$ folytonos és differenciálható vektor-vektor függvény; ρ_0 és $\mathbf{v_0}$ egy-egy skalár- és vektorállandó; $\mathbf{r}(x,y,z)$ pedig a helyvektor.

Tekintsünk egy ΔV térfogatú zárt felületet. Tudjuk, hogy a ΔF zárt felület vektora nulla, azaz

$$\oint\limits_{\Delta F} \mathbf{dF}=0 .$$

Skalár-, vagy vektorállandó zárt felületi integrálja is nulla.

$$\oint\limits_{\Delta F} \rho_0 \cdot \mathbf{dF}=0 , \qquad \oint\limits_{\Delta F} \mathbf{v_0} \cdot \mathbf{dF}=0 , \qquad \oint\limits_{\Delta F} \mathbf{v_0} \times \mathbf{dF}=\mathbf{v_0} \times \oint\limits_{\Delta F} \mathbf{dF}=0 .$$

Természetesen egy skalár-, illetve vektorállandó zárt görbére (ΔG) vonatkozó integrálja is nulla. Elemi geometriai megfontolások alapján belátható, hagy a ΔV térfogatú térrészt körülvevő ΔF zárt felületen vett integrálok értéke:

$$\oint\limits_{\Delta F} \mathbf{r} \cdot \mathbf{dF}=3\Delta V , \qquad \oint\limits_{\Delta F} \mathbf{r} \times \mathbf{dF}=0 ,$$

hiszen

$$\oint\limits_{\Delta F} x \cdot \mathrm{d}F_x=\Delta V , \qquad \oint\limits_{\Delta F} y \cdot \mathrm{d}F_y=\Delta V , \qquad \oint\limits_{\Delta F} z \cdot \mathrm{d}F_z=\Delta V .$$

Teljesül továbbá, hogy

$$\oint\limits_{\Delta F} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{r} \ \mathrm{d}F=\mathbf{a}\ \Delta V , \qquad \oint\limits_{\Delta F} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} \ \mathrm{d}F=\mathbf{a} \cdot \Delta V ,$$

ahol $\mathbf{n}$ a felületelem külső (normális irányú) egységvektora. Az $\mathbf{a}$ vektorállandó alakja a Descartes-féle koordináta-rendszerben:

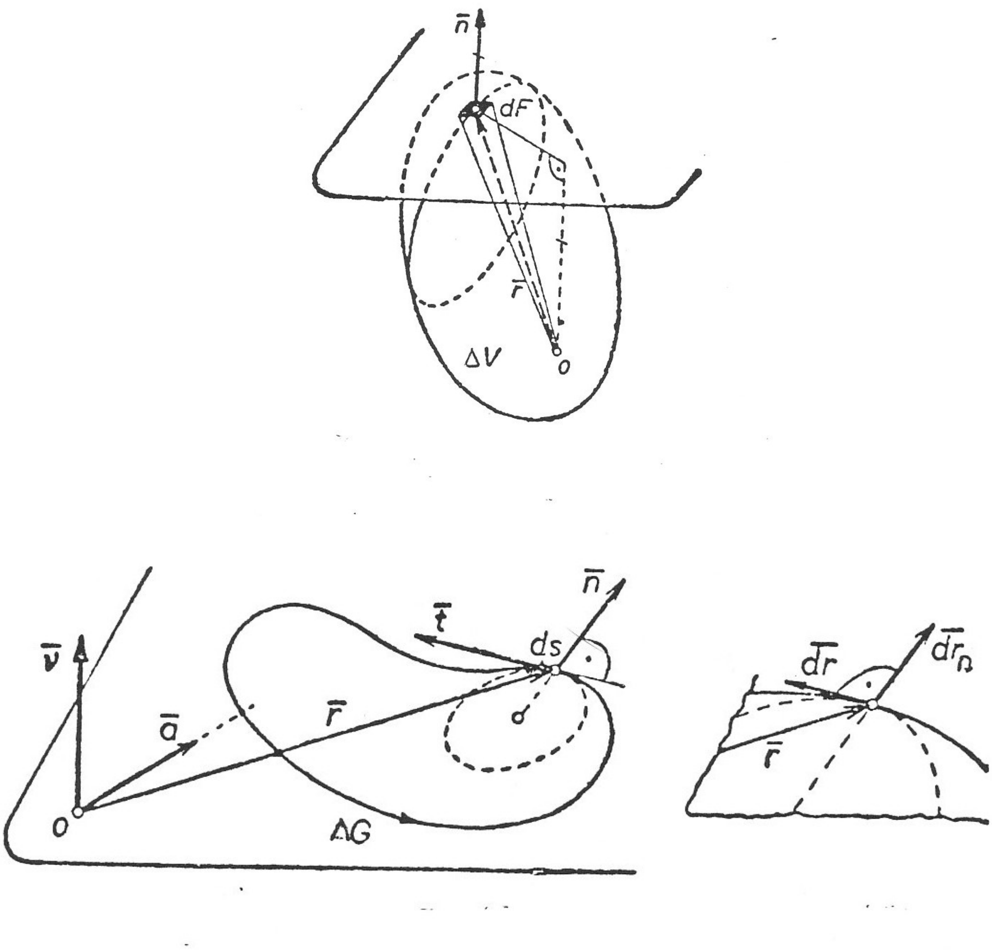
$$\mathbf{a}=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k} .$$

A fenti formulák analógjai megadhatók a $\mathbf{\Delta F}$ felületet körülvevő ΔG zárt síkgörbére is:

$$\oint_{\Delta G} \mathbf{r}\cdot d\mathbf{r}_{\mathrm{n}} = 2\Delta F \,, \qquad \oint_{\Delta G} \mathbf{r}\times d\mathbf{r} = 2\Delta\mathbf{F} \,, \qquad \oint_{\Delta G} \mathbf{r}\times d\mathbf{r}_{\mathrm{n}} = 0 \,,$$

$$\oint_{\Delta G} (\mathbf{a}\cdot\mathbf{n})\cdot\mathbf{r}\ \mathrm{d}s = \mathbf{a}\cdot\Delta F \,, \qquad \oint_{\Delta G} (\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\cdot\mathbf{n}\ \mathrm{d}s = \mathbf{a}\Delta F \,,$$

ahol $\mathbf{dr}_{\mathrm{n}} = \mathbf{n}\cdot \mathrm{d}s$ a (külső) normális irányú megváltozás, $\mathbf{dr}$ pedig az óramutató járásával ellentétes, pozitív körüljárású érintővektor az északi féltekén.



1. ábra. Térfogati, felületi és görbe menti integrálok szemléltetése a Descartes-féle koordináta-rendszerben.

A $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektor-vektor függvény nyílt vagy zárt ΔF felületen vett

$$\int_{\Delta F} \mathbf{v}\cdot\mathbf{dF} \,, \qquad \text{illetve} \qquad \oint_{\Delta F} \mathbf{v}\cdot\mathbf{dF}$$

alakú integrálja a $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektortér ΔF felületre vonatkozó teljes fluxusa. A fluxus fontos fogalom a meteorológiában, legyen az a tömeg, a sugárzás, a szenzibilis illetve a latens hő vagy a nyomanyagok árama (pontosabban áramsűrűsége). A teljes fluxus nem más, mint az adott mennyiség (skalár, vagy vektor) adott felületen időegység alatt átáramló mennyisége. (A fluxus alatt általában az egységnyi felületen időegység alatt áthaladó tulajdonság mennyiségét értjük.)

A $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektor-vektor függvény ΔG zárt görbe mentén vett

$$\Delta C = \oint_{\Delta G} \mathbf{v} \cdot \mathbf{dr}$$

alakú integrálját a $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektortér ΔG görbe menti cirkulációjának nevezzük. A cirkuláció megadja a ΔG zárt görbe menti forgás, örvénylés intenzitását, ami nem más, mint a ΔG zárt görbe menti átlagos tangenciális sebesség és a ΔG ívhosszának a szorzata.

F.2.1. Integráltételek

Elsőként írjuk fel *Hamilton-féle* ∇ *differenciáloperátor* integrál-előállítását. Definíció szerint: a nabla (∇) differenciáloperátor adott pontbeli vektorán a pont körüli zárt felület vektora és a körülzárt térfogat hányadosának határértékét értjük, miközben e térrész az adott pontra zsugorodik. A nabla szimbolikus vektor csak valamilyen skalár-, vagy vektor-mennyiséggel szorozva bír értelemmel.

$$\nabla ... = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{\Delta F} \mathbf{dF} ...$$

F.2.1.1 Gauss-Osztogradszkij–tétel

$$\oint_{\Delta F} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \cdot \mathrm{d}F = \oiiint_{\Delta V} \nabla \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}V = \oiiint_{\Delta V} \mathrm{div}\,\mathbf{v} \cdot \mathrm{d}V,$$

ahol ΔV a légrész térfogata. Abban az esetben, ha a vizsgált térfogatnak nincsenek határai, vagy a határokon keresztül nincs áramlás, akkor a közeg forrásmentes:

$$\oiiint_{\Delta V} \nabla \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}V = 0.$$

Ez az eset áll fenn akkor, amikor a $\mathbf{v}$ mennyiségre vonatkozó parciális differenciálegyenletben a peremfeltételek ciklikusak, vagy a peremeket áthatolhatatlan falnak tekintjük. A dinamikus meteorológiában az előbbi helyzet akkor lép fel, amikor a légköri mozgásokat a teljes földfelszín felett elhelyezkedő, s a légkör „felső határáig” terjedő tartományban vizsgáljuk. Ez röviden azt jelenti, hogy globális problémák esetén bármely vektormező divergenciájára vonatkozó térfogati integrál nulla.

F.2.1.2. A Stokes-tétel

A Stokes-tétel lehetővé teszi a rotáció,

$$\oint_{\Delta F} \mathrm{d}\mathbf{F} \times \mathbf{v} = \int_{\Delta V} (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathrm{d}V = \int_{\Delta V} \mathbf{rot}\, \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}V ,$$

illetve kétdimenziós (2D) esetben az örvényesség szemléletes leírását.

$$\oint_{\Delta G} \mathbf{v} \cdot \mathbf{dr} = \int_{\Delta F} (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{dF} = \int_{\Delta F} \mathbf{rot}\, \mathbf{v} \cdot \mathbf{dF} .$$

Hasonló integráltételek írhatók fel a gradiens szemléltetésére is. Háromdimenziós esetben:

$$\oint_{\Delta F} \rho \cdot \mathbf{dF} = \int_{\Delta V} \nabla \rho \cdot \mathrm{d}V = \int_{\Delta V} \mathbf{grad}\, \rho \cdot \mathrm{d}V ,$$

kétdimenziós esetben pedig a vonal és a felületi integrálok közötti kapcsolat alapján:

$$\oint_{\Delta G} \rho \cdot \mathrm{d}r = \int_{\Delta F} \nabla \rho \, \mathbf{dF} = \int_{\Delta F} \mathbf{grad}\, \rho \cdot \mathbf{dF} .$$

F.2.1.3. A Green-formulák

Legyen $\chi(\mathbf{r})$ és $\psi(\mathbf{r})$ a ΔF zárt felület határolta ΔV térrészben legalább kétszer folytonosan differenciálható függvény! A belőlük képzett $\mathbf{v} = \chi\, \mathbf{grad}\psi$ vektor divergenciája:

$$\mathrm{div}(\chi\, \mathbf{grad}\psi) = \chi \Delta \psi + \mathbf{grad}\chi \cdot \mathbf{grad}\, \psi .$$

Alkalmazzuk a fenti összefüggésre a Gauss–Osztrogradszkij-tételt és megkapjuk *Green I. tételét*!

$$\int_{\Delta V} (\chi \Delta \psi + \mathbf{grad}\chi \cdot \mathbf{grad}\psi) \cdot \mathrm{d}V = \oint_{\Delta F} \chi\, \mathbf{grad}\psi\, \mathbf{dF} .$$

Következmény: ha speciálisan $\chi = \psi$, akkor

$$\int_{\Delta V} (\chi \Delta \chi + \mathbf{grad}^2 \chi)\, \mathrm{d}V = \oint_{\Delta F} \chi\, \mathbf{grad}\chi \cdot \mathbf{dF} .$$

Ha $\chi = 1$, akkor

$$\int_{\Delta V} \Delta \psi \mathrm{d}V = \oint_{\Delta F} \mathbf{grad}\psi\, \mathbf{dF} .$$

Nézzük *Green II. tételét*! Legyen $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektormező a következő alakú

$\mathbf{v} = \chi \cdot \mathbf{grad}\psi - \psi\, \mathbf{grad}\chi$!

Képezzük a vektormező divergenciáját,

$$\mathrm{div}(\chi\ \mathbf{grad}\psi - \psi\cdot\mathbf{grad}\chi) = \chi\Delta\psi - \psi\Delta\chi\ ,$$

majd alkalmazzuk rá a Gauss–Osztrogradszkij-tételt, s megkapjuk a keresett összefüggést:

$$\iiint_{\Delta V}(\chi\Delta\psi - \psi\Delta\chi)\mathrm{d}V = \oiint_{\Delta F}(\chi\cdot\mathbf{grad}\,\psi - \psi\ \cdot\mathbf{grad}\,\chi)\cdot\mathbf{dF}\ .$$