F3. Helmholtz tétele a sebességmező felbontásáról és a teljességi tétel a sebességi mező felépítéséről

A vektormezők két fontos tulajdonsága a rotáció és a divergencia. Vajon megadható-e olyan vektormező-felbontás, ami elkülöníti a divergenciamentes és a rotációmentes összetevőket? A válasz igen. Erre mondjuk ki Helmholtz tételét!

F.3.1. Helmholtz tétele a sebességmező felbontásáról

Állítás. Adott a $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ folytonos és differenciálható vektor-vektor függvény. Ez minden esetben felbontható két olyan összetevőre

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_\chi + \mathbf{v}_\Psi \ ,$$

amelyek közül az egyik divergencia-, a másik rotációmentes.

Bizonyítás. Adjuk meg a felbontást! Legyen $\mathbf{s}$ olyan folytonos, legalább kétszer deriválható vektormező, amelyre teljesül, hogy

$$\nabla^2 \mathbf{s} = \Delta \mathbf{s} = -\mathbf{v} \ .$$

A $\nabla^2 \mathbf{s}$ kifejezés alakja a Descartes-féle koordináta-rendszerben:

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{pmatrix} , \qquad \nabla^2 \mathbf{s} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 s_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 s_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 s_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s_z}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

A hármas vektorszorzás tulajdonságai miatt

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{s}) = \nabla(\nabla \mathbf{s}) - (\nabla \nabla)\mathbf{s} \ .$$

Az egyenlőség átrendezése után:

$$-\nabla^2 \mathbf{s} = -\nabla(\nabla \mathbf{s}) + \nabla \times (\nabla \times \mathbf{s}) \ .$$

Vezessük be a χ sebességpotenciált és a $\mathbf{\Psi}$ áramfüggvényt a következőképpen:

$$\chi = -\nabla \mathbf{s} \ , \qquad \mathbf{\Psi} = \nabla \times \mathbf{s} \ !$$

A divergenciamentes $\mathbf{v}_\Psi$ vektormező a $\mathbf{\Psi}$ vektorpotenciál-mező az ún. áramfüggvény rotációjaként adható meg.

$$\mathbf{v}_\Psi = \mathbf{rot}\,\mathbf{\Psi} = \nabla\times(\nabla\times\mathbf{s}) = \mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\mathbf{s} \ ,$$

s így

$$\mathrm{div}\,\mathbf{v}_\Psi = \mathrm{div}\,\mathbf{rot}\,\mathbf{\Psi} = \nabla(\nabla\times\mathbf{\Psi}) = \nabla[\nabla\times(\nabla\times\mathbf{s})] = 0 \ .$$

A rotációmentes $\mathbf{v}_\chi$ vektormező a χ skalárpotenciál-mező az ún. sebességpotenciál segítségével adható meg, mégpedig annak gradienseként.

$$\mathbf{v}_\chi = \mathbf{grad}\,\chi = \nabla\chi = \nabla(-\nabla\,\mathbf{s}) \ ,$$

s így

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{v}_\chi = \mathbf{rot}\,\mathbf{grad}\,\chi = \nabla\times\nabla(-\nabla\,\mathbf{s}) = -\,\mathbf{rot}\,\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{s} = 0 \ .$$

Tehát egyértelműen előállítottuk a $\mathbf{v}$ folytonos és deriválható vektormező felbontását, bebizonyítottuk az állítását.

F.3.1.1. A sebességmező megadása 2D esetben az áramfüggvénnyel és a sebességpotenciállal

Tekintsük az áramlási mezőt az (x, y) síkban!

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_\mathrm{h} = u\cdot\mathbf{i} + v\cdot\mathbf{j} \ .$$

A divergenciamentes sebességkomponens:

$$\mathbf{v}_\Psi = \nabla\times\mathbf{\Psi} \ .$$

$\mathbf{v}_\Psi$ kétdimenziós vektor, nincs vertikális komponense. A vektoriális szorzás szabályai szerint ez csak úgy lehetséges, ha az áramfüggvénynek viszont nincs horizontális összetevője, vagyis kétdimenziós esetben mint skalár szerepel.

$$\mathbf{v}_\Psi = \nabla\times(\mathbf{k}\ \Psi) = \mathbf{k}\times(\nabla\Psi) \ .$$

A kétdimenziós nabla-operátor alakja:

$$\nabla = \nabla_h = \mathbf{i}\cdot\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\cdot\frac{\partial}{\partial y} \ .$$

A sebességmező divergenciamentes része:

$$\mathbf{v}_\Psi = \mathbf{k} \times (\nabla \Psi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \partial\Psi/\partial x \\ \partial\Psi/\partial y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial\Psi/\partial y \\ +\partial\Psi/\partial x \\ 0 \end{pmatrix} = -\mathbf{i}\frac{\partial\Psi}{\partial y} + \mathbf{j}\frac{\partial\Psi}{\partial x} .$$

A sebességmező örvénymentes része:

$$\mathbf{v}_\chi = (\nabla\chi) = \mathbf{i}\frac{\partial\chi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\chi}{\partial y} .$$

A horizontális sebességmező alakja:

$$\mathbf{v_h} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_\Psi + u_\chi \\ v_\Psi + v_\chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial\Psi}{\partial y} + \dfrac{\partial\chi}{\partial x} \\ +\dfrac{\partial\Psi}{\partial x} + \dfrac{\partial\chi}{\partial y} \end{pmatrix} .$$

A horizontális divergencia és az örvényesség:

$$\mathrm{div}\,\mathbf{v_h} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = d\mathrm{iv}_h \mathbf{v}_\chi = \nabla_h \mathbf{v}_\chi = \nabla_h \nabla_h \chi = \left(\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\chi}{\partial y^2} \right) ,$$

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{v_h} = \mathbf{k}\cdot\zeta = \mathbf{k}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \mathbf{k}\ \mathrm{rot}_z \mathbf{v}_\Psi = \nabla_h \times \mathbf{v}_\Psi = \nabla_h \times (\mathbf{k} \times \nabla_h \Psi) = \mathbf{k} \cdot \nabla_h^2 \Psi = \mathbf{k} \cdot \left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} \right)$$

.

F.3.2. A teljességi tétel

Helmholtz tétele alapján láttuk, hogy a divergencia- és a rotációmező ismerete nem elég az eredeti vektormező leírásához, gondoljunk csak a mezőben meglevő deformációra, vagy transzlációra (eltolás, adott sebességgel való mozgás) mint invariáns mennyiségekre. A sebességmező visszaállításához további információra is szükség van. Erről szól a teljességi tétel.

Állítás. Legyen ismeretes a ΔF zárt felület határolta ΔV tér minden $\mathbf{r}$ pontjában a $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektortér divergenciája és rotációja

$$\mathrm{div}\mathbf{v}(\mathbf{r}) = d(\mathbf{r}), \quad \mathbf{rot}\,\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}), \text{ ahol } \mathbf{r} \in \Delta V ,$$

továbbá legyen ismert a ΔF zárt felület minden $\mathbf{r}_\mathbf{F}$ pontjában ($\mathbf{r}_\mathrm{F} \equiv \mathbf{r}$, ahol $\mathbf{r} \in \Delta F$) a $\mathbf{v}(\mathbf{r}_\mathbf{F})$ normális vetülete, $v_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = f(\mathbf{r}_\mathrm{F})$. E három feltétel mellett a $\mathbf{v}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \Delta V$ vektortér minden pontjában egyértelműen megadható.

Bizonyítás. Az állítást indirekt módon bizonyítjuk be. Tegyük fel, hogy nem igaz az állítás. Ez azt jelenti, hogy létezik legalább két olyan vektortér $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{v}_2$, ami kielégíti a feladat állítását. Ekkor a

$$\mathbf{d} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$$

különbségi vektorra nézve igaz, hogy

$$\mathrm{div}\,\mathbf{d} = 0, \qquad \mathbf{rot}\,\mathbf{d} = 0, \qquad d_n = \mathbf{d}\cdot\mathbf{n} = 0 .$$

A $\mathbf{rot}\,\mathbf{d} = 0$ miatt a $\mathbf{d} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ vektortér potenciálos:

$$\mathbf{d} = \mathbf{grad}\,\chi ,$$

a χ skalár pedig a $\mathrm{div}\,\mathbf{d} = 0$ miatt harmonikus a ΔV térrészben, vagyis ott kielégíti a Laplace-egyenletet:

$$\mathrm{div}\,\mathbf{d} = \mathrm{div}\,\mathbf{grad}\chi = \nabla^2\chi = 0 ,$$

végezetül a harmadik feltétel $d_n = \mathbf{d}\cdot\mathbf{n} = 0$ miatt a ΔF felületen

$$d_n = \mathbf{grad}\chi\,\mathbf{n} = \frac{\partial\chi}{\partial n} = 0 .$$

Természetesen a $\mathbf{d} = 0$ kielégíti mindhárom egyenletet, de egyik összefüggés sem zárja ki önmagában más megoldás létezését. Gondoljunk pl. d_n nulla voltára. Ez úgy is előfordulhat, hogy a $\mathbf{d}$ vektornak nincs a felület normálisába eső komponense, mindenütt a ΔF felület érintő síkjába esik. A továbblépéshez kihasználjuk Green első tételének következményét (lásd az F2. függeléket), miszerint

$$\int\limits_{\Delta V}(\chi\Delta\chi + \mathrm{grad}^2\chi)\,\mathrm{d}V = \oint\limits_{\Delta F}\chi\,\mathrm{grad}\chi\,\mathbf{dF} = \oint\limits_{\Delta F}\chi\,\mathbf{grad}\chi\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}F = \oint\limits_{\Delta F}\chi\frac{\partial\chi}{\partial n}\mathrm{d}F .$$

Tudva, hogy

$$d_n = \mathrm{grad}\chi\,\mathbf{n} = \frac{\partial\chi}{\partial n} = 0 \quad \text{és} \quad \mathrm{div}\,\mathbf{d} = \mathrm{div}\,\mathbf{grad}\chi = \nabla^2\chi = 0 ,$$

kapjuk, hogy

$$\int\limits_{\Delta V}\mathrm{grad}^2\chi\,\mathrm{d}V = 0 .$$

E felírásból következik, hogy

$$\mathbf{grad}\chi = \mathbf{d} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = 0 , \qquad \text{azaz} \qquad \mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_2 ,$$

tehát valóban csak egyetlen, az állításban megfogalmazott feltételeknek eleget tevő $\mathbf{v}(\mathbf{r})$, ($\mathbf{r}\in\Delta V$) vektormező létezik.