VII. A légköri kinematika

Amikor a légkörben lejátszódó folyamatokat vizsgáljuk, az első feladat a koordináta-rendszer, még általánosabban a szemléletmód megválasztása. A következőkben megismerkedünk a meteorológiai folyamatok leírásában alkalmazott Lagrange- és Euler-féle szemléletmóddal, majd a barotrop és a baroklin légkörrel foglalkozunk. A barotropitás fogalma, amit *Vilhelm Bjerknes* vezetett be a meteorológiába, *„hidat képez a légköri termodinamika és a légköri dinamika között"*, ahogy *Tor Bergeron* fogalmazott.

Részletesen foglalkozunk az invariánsok fogalmával, előállításával, fizikai jelentésével. Nagy teret szentelünk a lineáris áramlási mező invariánsainak (transzláció, divergencia, rotáció, deformáció) a bemutatására. Foglalkozunk a koordináta-rendszer forgatásokkal is. Röviden kitérünk a mikrometeorológiában oly fontos második momentumok (szórásnégyzet, kovariancia) transzformációjára is. A fejezet végén a természetes koordináta-rendszert tárgyaljuk, megadva a lineáris sebességmező invariánsait.

VII.1. A Lagrange- és az Euler-féle szemléletmód

A két tárgyalásmód közül a Lagrange-féle az általánosabb. Elemi légrészekből építjük fel a teret. Az egyes légrészekben bekövetkező változásokat tanulmányozzuk, pl.: megváltozik a légrész helye, hőmérséklete, nyomása stb. E szemléletmódban nem mindegy, hogy a tér adott pontjában, adott időpillanatban melyik légrész található. A folyamatok során egy-egy légrész ugyanazokból a részecskékből áll. A légrész az egyszerűség kedvéért tömegegységnyi, tehát elegendően sok molekula van benne ahhoz, hogy a klasszikus hidrotermodinamika törvényei alapján tanulmányozhassuk. A légrészek tehát „nem kicserélhetők".

Az Euler-féle szemléletmódban nem magát a levegőrészt, hanem a levegővel töltött mozdulatlan vagy mozgó teret vizsgáljuk. A levegő állapotát, mozgását leíró skalár- és vektormezőket tanulmányozzuk. Itt – első közelítésként – nem fontos, hogy melyik légrésszel van dolgunk.

A meteorológiai folyamatok leírásában a véges számú molekulából álló légkör helyettesíthető az elméleti hidrodinamikában alkalmazott kontinuum folyadékmodellel. A kontinuum folyadékmodell azt jelenti, hogy a teret úgy tekintjük, mint amit folyamatosan kitölt az anyag, nem pedig úgy, mint ahol diszkrét tömegpontok, illetve légrészecskék mozognak.

A pontmechanika alaptörvényeit három különböző formában adhatjuk meg: (i) a Newton-féle mozgásegyenletek, (ii) a Lagrange-féle mozgásegyenletek és (iii) a Hamilton-egyenletek alapján. Ezek egyenértékű alaptörvények. Alkalmazásukat a feladat jellege határozza meg. A meteorológiában a Newton-féle mozgásegyenletek alkalmazása terjedt el, de dinamikus meteorológiai cikkekben találkozunk a Hamilton-féle szemlélettel is.

VII.1.1. A Lagrange-féle szemléletmód

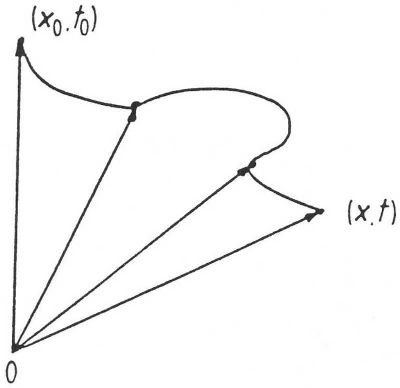
Tekintsünk egy elemi légrészt, ami a háromdimenziós légkörben az 1. ábrán jelölt légpályán (trajektórián) mozog. Ilyen légrészecskékből építjük fel a légkört (kontinuum közeg). A légrészecskék mozgását, változását tanulmányozzuk.

VII.1.1.1. A lagrange–i mechanika alapjai

A lagrange-i mechanikai rendszerek mozgástörvényének legáltalánosabb megfogalmazása az ún. legkisebb hatás elve (Hamilton-elv). E szerint egy n pontból álló mechanikus rendszert (n darab légrész) egy adott

$$L(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n, \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2, \ldots, \dot{\mathbf{r}}_n, t)$$

Lagrange-függvény jellemez, ami az időtől, az egyes részecskék helyvektorától és annak időbeli megváltozásától függ. (Nincsenek geometriai kényszerfeltételek a részecskék között.) A fizikában szokásos indexes jelölés szerint a Lagrange-függvény: $L(\mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i, t)$, ahol $\mathbf{r}_i$ az i-edik helyvektor, amely a Descartes-féle koordináta-rendszerben (x_i, y_i, z_i). Az $\mathbf{r}_i$ helyvektor időbeli megváltozása a Lagrange-rendszerben szokásos jelölés szerint: $\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} = \dot{\mathbf{r}}_i$.



1. ábra. A Lagrange-féle koordináta-rendszer, egy légrész trajektóriája.

A légrészecskék helyzetét $t = t_0$ és $t = t_1$ időpontban az $\mathbf{r}_i(\mathbf{r}_{0i}, t_0) = \mathbf{r}_{0i}$ és az $\mathbf{r}_i(\mathbf{r}_{0i}, t_1)$ helyvektorok jellemzik. Az $\mathbf{r}_i(\mathbf{r}_{0i}, t_1)$ jelölés azt fejezi ki, hogy az i-edik részecskét a $t = t_0$ időpontbeli koordinátáival azonosítjuk. Így ezek a t_0 időpontbeli helykoordináták lesznek a részecske független változói. Minden helyvektor három független koordinátával írható le, így összesen $3 \times n$ független változónk van. Az alsó indexek mindig összegzést jelentenek, jelen esetben 1-től n-ig.

Egy mechanikai rendszer a kiinduló és a végállapot között úgy mozog, hogy az

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(\mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i, t) \cdot \mathrm{d}t$$

integrál minimális legyen. *Ez a fizikában a legkisebb hatás (vagy a stacionárius hatás) elve. A pályát nem az erőhatásokra bekövetkező gyorsulás alapján (newtoni szemlélet), hanem a legkisebb (stacionárius) hatás alapján számítjuk ki a lehetséges pályák közül.* A hely-koordináták és a sebességek megadása meghatározza a rendszer mechanikai állapotát. Természetesen a rendszer pillanatnyi állapotának megadásához – mivel S egy integrál – ismernünk kell a kiindulási helyzetet, tehát nem elég pusztán a háromdimenziós áramlási tér karakterisztikáinak ismerete a t_1 időpontban.

VII.1.1.2. A Lagrange-egyenlet

Tekintsünk egy másik (az optimálistól eltérő) pályát az $\mathbf{r}_\mathrm{i}(\mathbf{r}_{0\mathrm{i}}, t_0) = \mathbf{r}_{0\mathrm{i}}$ és $\mathbf{r}_\mathrm{i}(\mathbf{r}_{0\mathrm{i}}, t_1)$ kiindulási és végállapotok között, amit a légrészecskék bejárnak. A két pálya (1) és (2) közötti eltérés kicsi $\boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{i}(t) \to 0$. A két közeli pálya mentén vett integrálok különbsége, amit S variációjának hívunk:

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \left[L\left(\mathbf{r}_\mathrm{i} + \boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{i}, \dot{\mathbf{r}}_\mathrm{i} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_\mathrm{i}\right) - L\left(\mathbf{r}_\mathrm{i}, \dot{\mathbf{r}}_\mathrm{i}\right) \right] \cdot \mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} \left[\boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{i} \frac{\partial L\left(\mathbf{r}_\mathrm{i}, \dot{\mathbf{r}}_\mathrm{i}\right)}{\partial r_i} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_\mathrm{i} \frac{\partial L\left(\mathbf{r}_\mathrm{i}, \dot{\mathbf{r}}_\mathrm{i}\right)}{\partial \dot{r}_i} \right] \cdot \mathrm{d}t,$$

ahol L-et $\boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{i}$ és $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_\mathrm{i}$ szerint első rendben fejtettük ki. Hajtsunk végre a parciális integrálást a második tagon, és használjuk ki, hogy $\boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{i}(t_0) = \boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{i}(t_1) = 0$! Ekkor, egyszerűbb jelölést használva:

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \left[\boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{i} \frac{\partial L}{\partial r_i} - \boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{i} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \right] \cdot \mathrm{d}t.$$

S szélsőérték tulajdonságú az optimális trajektóriára, így a Lagrange-egyenlet alakja:

$$\frac{\delta \mathrm{S}}{\delta r_i(t)} = 0, \quad \text{illetve} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} - \frac{\partial L}{\partial r_i} = 0.$$

VII.1.1.3. A Lagrange-, a Hamilton- és a Newton-féle leírási mód azonossága

Tekintsünk egy n tömegpontból álló súrlódásnélküli mechanikai rendszert! Ennek leírásában az L Lagrange-függvény nem más, mint a rendszer kinetikus (K_i) és potenciális (P_i) energiájának a különbsége:

$$L = L\left(\mathbf{r}_\mathrm{i}, \dot{\mathbf{r}}_\mathrm{i}, t\right) = K_i - P_i,$$

ahol tömegegységnyi légrészekre:

$$\sum_i K_i = K_i(\mathbf{r_i}, \dot{\mathbf{r}}_\mathbf{i}, t) = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{r}}_\mathbf{i}^2) \quad \text{és} \quad \sum_i P_i = P_i(\mathbf{r_i}, t).$$

E példán keresztül mutatjuk meg a Lagrange-, a Hamilton- és a Newton-féle leírási mód azonosságát. A Lagrange-függvény ismeretében bevezethetjük az általános impulzust:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i},$$

illetve a Hamilton-függvényt, ami a Lagrange-függvény sebesség szerinti Legendre-transzformáltja.

$$H = H(\mathbf{r_i}, \dot{\mathbf{r}}_\mathbf{i}, t) = \dot{\mathbf{r}}_\mathbf{i} \cdot p_i - L.$$

A K_i kinetikus energia homogén másodfokú függvénye a sebességnek ($\dot{\mathbf{r}}_\mathbf{i}$), a P_i potenciális energia pedig nem függ tőle, így a Hamilton-függvény a rendszer teljes energiáját írja le:

$$L(\mathbf{r_i}, \dot{\mathbf{r}}_\mathbf{i}, t) = K_i + P_i.$$

Ezt könnyen beláthatjuk, hiszen

$$H = \dot{\mathbf{r}}_\mathbf{i} \cdot p_i - (K_i - P_i) = \dot{\mathbf{r}}_\mathbf{i} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} - K_i + P_i = \dot{\mathbf{r}}_\mathbf{i} \frac{\partial K_i}{\partial \dot{r}_i} - K_i + P_i = K_i + P_i.$$

Teljesül továbbá, hogy

$$\dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial r_i} \quad \text{és} \quad \dot{r}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}.$$

Ezek az ún. kanonikus vagy Hamilton-féle mozgásegyenletek a hamiltoni mechanikában. Tömegegységnyi légrészekkel dolgozunk, így teljesül, hogy

$$\ddot{r}_i = \dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial r_i}, \quad \text{illetve} \quad \ddot{r}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i},$$

hiszen

$$\dot{r}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} = \frac{\partial K_i}{\partial r_i}.$$

Így tehát beláttuk a három leírási mód azonosságát a Lagrange-féle koordináta-rendszerben.

VII.1.1.4. A Lagrange-féle szemléletmód a meteorológiai gyakorlatban

Térjünk vissza az 1. ábrán bemutatott légrészre, s a Lagrange-féle szemléletmód meteorológiában használt alakjának a bemutatására! Egy légrészt vizsgálunk. Adjuk meg a pillanatnyi sebességét és gyorsulását! A meteorológiai gyakorlatban alkalmazott koordináta-rendszert úgy építjük fel, hogy az északi félgömbön az x tengely keletre, az y tengely északra, míg a z tengely a helyi függőleges irányába mutasson. Az egyszerűség kedvéért Descartes-féle koordináta-rendszerben dolgozzunk! E rendszerben a $\mathbf{v}$ sebességvektor komponensei rendre u, v, w. A Lagrange-rendszerbeli sebességkomponenseket az L alsó indexszel látjuk el.

A légrész helyzete adott t időpontban $\mathbf{r}(\mathbf{r_0}, t)$, ahol $\mathbf{r_0} = (x_0, y_0, z_0)$. A Lagrange-féle rendszerben a légrész t időpontbeli helykoordinátái nem független változók, vagyis:

$$y = y(x_0, y_0, z_0, t) \ , \quad x = x(x_0, y_0, z_0, t) \text{ és } z = z(x_0, y_0, z_0, t) \, .$$

A részecske sebessége a Lagrange-rendszerben az elmozduló levegőrész koordináta-irányok szerinti időbeli megváltozásából számítható:

$$\mathbf{v_L} = (u_L, v_L, w_L) = \mathbf{v_L}(\mathbf{r_0}, t) = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}(\mathbf{r_0}, t) \ .$$

Az egyes sebességkomponensek:

$$u_L = \frac{\partial x(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial t}, \quad v_L = \frac{\partial y(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial t} \quad \text{és} \quad w_L = \frac{\partial z(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial t} \, .$$

A sebesség idő szerinti deriváltjából kapjuk a vizsgált légrész gyorsulását.

$$\mathbf{a_L} = (a_{Lx}, a_{Ly}, a_{Lz}) = \mathbf{a_L}(\mathbf{r_0}, t) = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v_L}(\mathbf{r_0}, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{r}(\mathbf{r_0}, t) \ .$$

A gyorsulás Descartes-féle koordináta-rendszerbeli komponensei:

$$a_{Lx} = \frac{\partial u_L}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}x(\mathbf{r_0}, t) \ , \quad a_{Ly} = \frac{\partial v_L}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}y(\mathbf{r_0}, t) \quad \text{és} \quad a_{Lz} = \frac{\partial w_L}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}z(\mathbf{r_0}, t) \, .$$

Tekintsünk egy f állapotjelzőt, ami lehet pl. a hőmérséklet, nyomás, sűrűség, vagy akár valamelyik sebességkomponens is. A Lagrange-rendszerben a független koordináták legyenek

$(\mathbf{r_0}, t)$, ahol $\mathbf{r_0} = (x_0, y_0, z_0)$. Ekkor értelmezhetjük az $f(x_0, y_0, z_0, t)$ függvény egyes koordináta-irányok szerinti megváltozását. Vizsgáljuk például a $\dfrac{\partial f(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial x_0}$ kifejezést! A derivált jelentését jól szemlélteti a 2. ábra.

Az $f(x_0, y_0, z_0, t)$ deriválhatóságának feltétele, hogy t időpillanatban is folytonosan változzon a függvény, vagyis a kezdetben egymás mellett levő levegőrészecskék t időpillanatban se távolodjanak el egymástól. Egy összetartozó ($\mathrm{d}x_0, \mathrm{d}y_0, \mathrm{d}z_0$) légrészt vizsgálunk, s itt nézzük a légrészen belül a megfelelő irányokban az $f(x_0, y_0, z_0, t)$ változását.

Tekintsünk egy elemi légrészt, melynek kiterjedése a kezdeti t_0 időpontban $(\mathbf{dx_0} \times \mathbf{dy_0}) \cdot \mathbf{dz_0}$! A Lagrange-féle rendszerben arra a kérdésre keressük a választ, hogy a véges kiterjedésű, a mozgás során együtt maradó légrészben milyen az egyes meteorológiai állapotjelzők kezdeti koordináta-irányok szerinti változása, illetve hogyan változik a véges kiterjedésű légrész térfogata, s hová sodródik a légrész tömegközéppontja. Az idő múlásával természetesen egyre kisebb – együtt maradó – kezdeti légrészecskéket tudunk vizsgálni. Így problémát jelenthet a Lagrange-féle rendszerben a deriváltak képzése, illetve azok folytonossága.

VII.1.2. Az Euler-féle szemléletmód

Az Euler-féle szemléletmód a hagyományos térfelfogásunkhoz kapcsolódik. Itt a független változók a megfelelő térkoordináták és természetesen az idő. E leírásmódban nem magát a levegőt vizsgáljuk, hanem a levegővel töltött mozdulatlan vagy mozgó teret. A levegő mozgását, állapotváltozásait leíró skalár- és vektormezőket tanulmányozzuk.

Itt a skalármezőket (pl. hőmérséklet, specifikus térfogat) illetve a vektormezőket (pl. sebességmező, gyorsulási mező) az idő- és térkoordináták szerint adottnak tekintjük. Megjegyezzük, hogy egy adott pontban a sebesség vagy a gyorsulás pillanatnyi értékének meghatározása a Lagrange-rendszerben egyszerű, míg az Euler-féle (nem részecskékhez kötött) rendszerben bonyolult feladat. Tekintsük az $= (x, y, z, t)$ Descartes-féle koordináta-rendszert! Legyen egy adott pont helyvektora $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Itt az f skalármező értéke:

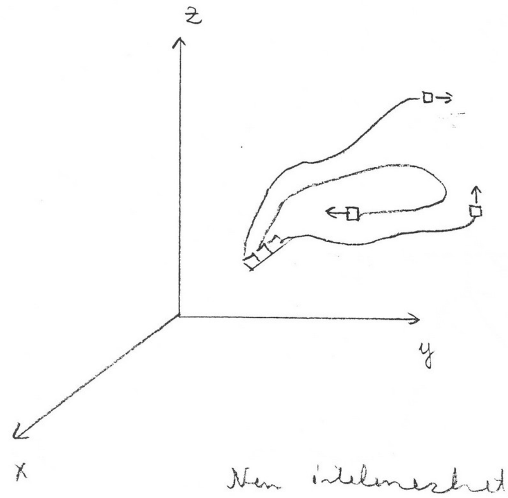
$$f = f(\mathbf{r}, t) \equiv T(\mathbf{r}, t).$$

A vektormezők, mint pl. a sebességi és a gyorsulási mező megadása a következőképpen történik:

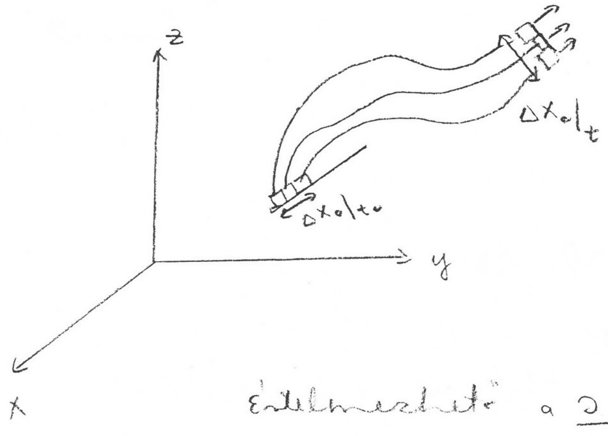
$$\mathrm{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = (u(\mathbf{r}, t), v(\mathbf{r}, t), w(\mathbf{r}, t)), \qquad \mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r}, t) = (a_x(\mathbf{r}, t), a_y(\mathbf{r}, t), a_z(\mathbf{r}, t)).$$

Az Euler-féle rendszerben egyszerűen előállíthatók az egyes koordináta-irányok szerinti parciális deriváltak, illetve az adott helyre vonatkozó lokális időbeli deriváltak. Értelmezhető a skalár- és vektormezők térbeli megváltozása, illetve teljes deriváltja. Ezekre a hőmérséklet- és a sebességmező segítségével mutatunk példákat. Először tekintsük pl. az x tengely irányú parciális deriváltakat:

$$\frac{\partial T}{\partial x}=\frac{\partial T(\mathbf{r},t)}{\partial x}=\left(\frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial x}\right)_{y,z,t}, \qquad \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{r},t)}{\partial x}=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial w}{\partial x}\right),$$



Nem értelmezhető a $\dfrac{\partial f(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial x_0}$ derivált, ahol f a légrész y irányú sebesség-komponensét jelenti.



Értelmezhető a $\dfrac{\partial f(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial x_0}$ derivált. Egy légrészben vizsgáljuk az ott tartózkodása során változó $f(x_0, y_0, z_0, t)$ állapotjelzőt.

2. ábra. Egy elemi légrész mozgása a Lagrange-rendszerben (a). A Lagrange-féle tér-koordináták szerinti deriváltak jelentése (b). (A légrészt ugyanazok a részecskék alkotják. Tömege állandó, alakja, térfogata természetesen változik.)

ahol az eredményvektor egyes komponenseit vesszővel választjuk el. Számos dinamikus meteorológia tankönyvben találkozhatunk a vektorszámításból jól ismert nabla operátorral, ami sokszor leegyszerűsíti az egyenletek felírását. A Descartes-féle koordináta-rendszerben a nabla operátor alakja:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}, \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}, \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \; .$$

A jegyzetben szükség szerint mi is alkalmazni fogjuk ezt az írásmódot.

A parciális deriváltak mellé általában nem írjuk ki a rögzített változókat. E jelölésmódnak a koordináta-rendszer transzformációinak megértésében lesz majd szerepe. Az időbeli lokális deriváltak alakja:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial T(\mathbf{r},t)}{\partial t} = \left(\frac{\partial T(x,y,x,t)}{\partial t} \right)_{x,y,z} \; , \qquad \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{r},t)}{\partial t} = \left(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial t} \right) \; .$$

A skalármezők gradiense pedig:

$$\mathbf{grad}\, T(\mathbf{r},t) = \nabla T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right) \; .$$

Az idő szerinti teljes deriváltak alakja skalármezőre:

$$\frac{\mathrm{d}T(\mathbf{r},t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} + w\frac{\partial T}{\partial z} \; ,$$

ahol $\mathbf{v} \cdot \nabla T \equiv (\mathbf{v} \cdot \nabla) \cdot T$. Ugyanez a teljes derivált a $\mathbf{v}$ vektormezőre:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}(\mathbf{r},t)}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} \right) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{v} \; ,$$

ahol:

$$\frac{\mathrm{d}u(\mathbf{r},t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla u = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} \; ,$$

$$\frac{\mathrm{d}v(\mathbf{r},t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial v}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla v = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} \; ,$$

$$\frac{\mathrm{d}w(\mathbf{r},t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla w = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} \; .$$

Az egyenletek jobb oldalán szereplő tagok elnevezése a következő: az első tag a lokális időbeli megváltozás, ezt követi az advekciós tag, majd a konvekciós tag.

VII.1.3. A Lagrange- és az Euler-féle szemléletmód közötti kapcsolat

A tér egy adott pontjában vizsgáljuk a skalár- vagy vektorértékű meteorológiai állapotjelzőket. Természetesen egy tetszőleges f állapotjelző értéke a koordináta-rendszer választásától független (invariáns). Ezt használjuk ki a koordináta-rendszerek közötti áttérés felírásakor:

$$f_L(\mathbf{r_0},t) = f(\mathbf{r},t) \ .$$

VII.1.3.1. A két koordináta-rendszer közötti áttérés szükséges és elégséges feltétele

A Lagrange- és Euler-féle koordináta-rendszer közötti áttérés feltétele, hogy a Lagrange-rendszerben adott tetszőleges $(\mathbf{r},t_0) = (x_0, y_0, x_0, t_0)$ pontnak legyen olyan ε környezete, amelyben levő

$$\mathrm{d}V_0 = (\mathbf{dx_0} \times \mathbf{dy_0}) \cdot \mathbf{dz_0} \equiv \oint\!\!\int\!\!\oint_{\mathrm{d}V_0} (\mathbf{dx_0} \times \mathbf{dy_0}) \cdot \mathbf{dz_0}$$

elemi légrész mozgása során úgy változtatja térfogatát (természetesen a légrész mindig ugyanazokból a részecskékből áll), hogy az tetszőleges t időpontban is „egyben maradjon”, azaz véges értékű legyen. (*Az egyszerűség kedvéért ortogonális koordináta-rendszerben dolgozzunk!*) Nem lehet áttérni a Lagrange-féle rendszerről az Euler-féle rendszerre, ha a térfogatelem t időpontban nulla vagy végtelen lesz (Lásd az I. Függeléket is). E feltétel megfordítása biztosítja az Euler-rendszerben t időpontban leírt áramlási kép áttranszformálását a t_0 időpontbeli Euler-féle koordináta-rendszer alapján felépített Lagrange-rendszerbe.

A koordináta-rendszerek közötti áttérés matematikai feltételeinek megfogalmazásához (a Jacobi-determináns megadásához) fejezzük ki a Lagrange-rendszerben adott térfogatelemet az Euler-rendszer változóival a t időpillanatban. A Lagrange-rendszer független koordinátái legyenek azok a légrészek, amelyek helyvektorai t_0 időpontbeli Descartes-féle koordináta-rendszerben adottak.

A Lagrange-rendszer független koordinátái az Euler-rendszerbeli térkoordinátákkal (x, y, z) kifejezve:

$$x_0 \equiv a = a(x,y,z,t_0), \quad y_0 \equiv b = b(x,y,z,t_0), \quad z_0 \equiv c = c(x,y,z,t_0) \ .$$

Szintén egyszerűen megadhatók az Euler-rendszer koordinátái a Lagrange-rendszer független változóival:

$x = x(a,b,c,t)$, $y = y(a,b,c,t)$, $z = z(a,b,c,t)$.

Kifejezhetők az egyes koordináta-irányok szerinti megváltozások is. A termodinamikai diagramok közötti áttéréseknél leírtakkal összhangban a Lagrange-rendszerbeli és az Euler-rendszerbeli elemi térfogat közötti kapcsolat:

$$\oint\!\!\int_{dV_L} \mathrm{d}a \cdot \mathrm{d}b \cdot \mathrm{d}c = \oint\!\!\int_{dV} |\mathbf{D}| \, \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z ,$$

ahol $|\mathbf{D}|$ a Jacobi-mátrixnak (vagy más elnevezéssel a deriválttenzor mátrixának) a determinánsa:

$$|\mathbf{D}| = \begin{vmatrix} \frac{\partial a}{\partial x} & \frac{\partial a}{\partial y} & \frac{\partial a}{\partial z} \\ \frac{\partial b}{\partial x} & \frac{\partial b}{\partial y} & \frac{\partial b}{\partial z} \\ \frac{\partial c}{\partial x} & \frac{\partial c}{\partial y} & \frac{\partial c}{\partial z} \end{vmatrix} .$$

Az Euler-rendszerben megadott elemi térfogat és a Lagrange-rendszerbeli térfogatelem kapcsolata:

$$\oint\!\!\int_{dV} \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z = \oint\!\!\int_{dV_L} |\mathbf{D_L}| \cdot \mathrm{d}a \cdot \mathrm{d}b \cdot \mathrm{d}c ,$$

ahol most a $|\mathbf{D_L}|$ Jakobi-mátrix determinánsa:

$$|\mathbf{D_L}| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial x}{\partial c} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial c} \\ \frac{\partial z}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix} .$$

A két koordináta-rendszer közötti áttérés feltétele, hogy a $\mathbf{D}$, illetve $\mathbf{D_L}$ Jacobi-mátrixok determinánsa ne legyen se 0, se ∞. Ismét megjegyezzük, hogy a Jacobi-mátrix nem más, mint a deriválttenzor mátrixa. Természetesen igaz, hogy $\mathbf{D_L} = \mathbf{D}^{-1}$.

VII.1.3.2. A Lagrange- és az Euler-rendszerbeli változások közötti kapcsolat

Legyen az $f(a,b,c,t)$ mennyiség az Euler-változókkal megadva:

$$f_L(a,b,c,t)f(x(a,b,c,t),y(a,b,c,t),z(a,b,c,t),t)) = f(x,y,z,t).$$

A koordináta-rendszer transzformációk analógiájára felírhatjuk a Lagrange-, illetve az Euler-rendszerben adott deriváltakat. Kihasználjuk, hogy az Euler-rendszer (E) térkoordinátái, illetve a Lagrange-rendszer (L) részecskékhez kötött koordinátái függetlenek az időtől.

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_E = \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_E = \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_E = 0 \,, \quad \text{illetve} \quad \left(\frac{\partial a}{\partial t}\right)_L = \left(\frac{\partial b}{\partial t}\right)_L = \left(\frac{\partial c}{\partial t}\right)_L = 0 \,.$$

Természetesen, ha a légrész Euler-rendszerbeli térkoordinátáinak időbeli változását írjuk fel a Lagrange-rendszerben, vagy fordítva, akkor ezek a parciális deriváltak már nem lesznek szükségképpen nullák. Ezt kihasználva az Euler-változókkal megadott f függvény Lagrange-rendszerbeli térkoordináták szerinti megváltozása a következő három egyenlet alapján számítható.

$$\frac{\partial f_L}{\partial a} = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)_L + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial a}\right)_L + \frac{\partial f}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial a}\right)_L = \nabla f \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial a},$$

$$\frac{\partial f_L}{\partial b} = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial b}\right)_L + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial b}\right)_L + \frac{\partial f}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial b}\right)_L = \nabla f \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial b},$$

$$\frac{\partial f_L}{\partial c} = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial c}\right)_L + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial c}\right)_L + \frac{\partial f}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial c}\right)_L = \nabla f \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial c}.$$

A két rendszer parciális deriváltjai között teljesül, hogy

$$\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)_L = \left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)_E^{-1}, \ldots, \left(\frac{\partial z}{\partial c}\right)_L = \left(\frac{\partial c}{\partial z}\right)_E^{-1}.$$

A Lagrange-rendszerbeli lokális idő szerinti derivált alakja az Euler-rendszerben, kihasználva a két rendszerbeli sebesség azonosságát:

$$\frac{\partial f_L}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_L + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_L + \frac{\partial f}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_L + \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}u_L + \frac{\partial f}{\partial y}v_L + \frac{\partial f}{\partial z}w_L + \frac{\partial f}{\partial t} = \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right)_E.$$

Ami a Lagrange-rendszerben lokális időbeli változás – *mi történik a légrészecskén belül?* – az az Euler-rendszerben mint teljes időbeli derivált jelenik meg. Olyan folyamatokat vizsgálunk, ahol a légrész elmozdulásakor nem változnak meg a Lagrange-rendszerben megadott független térkoordináták,

$$\left(\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\right)_L = 0 \ , \ \left(\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t}\right)_L = 0 \ , \ \left(\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}\right)_L = 0 .$$

A Lagrange-rendszerben a teljes időbeli derivált megegyezik a parciális idő szerinti deriválttal.

$$\left(\frac{\mathrm{d}f_L}{\mathrm{d}t}\right)_L = \left(\frac{\partial f_L}{\partial t}\right)_L + \left(\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\right)_L \left(\frac{\partial f_L}{\partial a}\right)_L + \left(\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t}\right)_L \left(\frac{\partial f_L}{\partial b}\right)_L + \left(\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}\right)_L \left(\frac{\partial f_L}{\partial c}\right)_L = \left(\frac{\partial f_L}{\partial t}\right) ,$$

így teljesül, hogy

$$\left(\frac{\mathrm{d}f_L}{\mathrm{d}t}\right)_L = \left(\frac{\partial f_L}{\partial t}\right)_L = \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right)_E .$$

Felírhatjuk a Lagrange-rendszerben értelmezett deriváltak Euler-rendszerbeli alakját is (rögzített t időpillanatban vizsgálódunk):

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f_L}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial f_L}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial f_L}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x} ,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f_L}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial f_L}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial f_L}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial y} ,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f_L}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial z} + \frac{\partial f_L}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial z} + \frac{\partial f_L}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial z} .$$

Az időszerinti parciális derivált alakja az (x, y, z) pontban:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f_L}{\partial a}\left(\frac{\partial a}{\partial t}\right)_E + \frac{\partial f_L}{\partial b}\left(\frac{\partial b}{\partial t}\right)_E + \frac{\partial f_L}{\partial c}\left(\frac{\partial c}{\partial t}\right)_E + \frac{\partial f_L}{\partial t} .$$

VII.2. A barotrop és a baroklin légkör

A meteorológiában a fontosabb állapotjelzők mezőit és különböző deriváltjait térképeken ábrázoljuk. A háromdimenziós légkörben, illetve a kétdimenziós térképeken a skalár- és vektorváltozókat vizsgálunk. Az időjárási térképeken ábrázolt skalárterek együttes leírásakor (pl. hőmérséklet, légnyomás és sűrűség) kitüntetett szerepe van az ún. homotropitási együtthatónak.

Tekintsük az $f_1(x, y, z, t)$ és az $f_2(x, y, z, t)$ skalárfüggvényeket. Ha két skalármezőt $t = t_0$ időpontban egy függvénykapcsolat köt össze, akkor az $f_1(x, y, z, t_0) = \mathrm{const.}$ ekviskalár felület mentén a másik függvény értéke sem változik, $f_2(x, y, z, t_0) = \mathrm{const.}$ Létezik az

$$F(f_1, f_2) = 0$$

függvénykapcsolat. Az ilyen skalárokat *homotrop skalárok*nak nevezzük. A homotropitási együtthatót (β) a légköri állapotjelzők térbeli szerkezetének leírására használjuk. A homotropitási együttható az adott t_0 időpontbeli skalármezőket kapcsolja össze; alkalmas a meteorológiai térképeken ábrázolt skalármezők szerkezetének tanulmányozására. β értéke helyről helyre változhat, de adott ($f_1 = \mathrm{const.}$) felületen állandó.

$$\beta = \frac{\mathrm{d}f_1(x,y,z,t_0)}{\mathrm{d}f_2(x,y,z,t_0)} .$$

*Heterotrop skalárok*ról beszélünk, ha a két skalár egymástól függetlenül változik, vagyis nincs közöttük függvényszerű kapcsolat. β értéke adott f_1 függvényérték mellett is helyről helyre változik.

A légköri folyamatok leírásában kiemelt szerepet kap a nyomási és a sűrűségi mező. Ha e két skalármező nívófelületei egymással párhuzamosan futnak, akkor *barotrop légkör*ről beszélünk, amit a homotropitási együttható (β) mintájára barotropitási együtthatóval (b) jellemzünk. Azt vizsgáljuk, hogy adott időpillanatban és adott helyen a légkörünk „mennyire összenyomható”.

$$b = \frac{\mathrm{d}\rho(x,y,z,t_0)}{\mathrm{d}p(x,y,z,t_0)} .$$

A barotropitási együttható kifejezhető a specifikus térfogat izoszter felületei és a nyomási mező izobár felületei közötti kapcsolattal is.

$$b = -\frac{1}{\alpha^2(x,y,z,t_0)}\frac{\mathrm{d}\alpha(x,y,z,t_0)}{\mathrm{d}p(x,y,z,t_0)} = -\frac{1}{\alpha}\frac{\mathrm{d}\ln\alpha}{\mathrm{d}p} .$$

Természetesen barotrop légkörben az izobárokkal és az izoszterekkel párhuzamosan futnak a hőmérsékleti mező, $T(x,y,z,t_0)$ izotermái is.

$$b = \frac{1}{RT}\left(1 - \frac{\mathrm{d}\ln T}{\mathrm{d}\ln p}\right) .$$

Ha ismert az áramlási mező szerkezete, $\mathbf{v}(\mathbf{r},t_0)$, akkor könnyen megadható a $b = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}p}$ barotropitási együttható:

$$b = \frac{\dfrac{\partial\rho}{\partial x}u + \dfrac{\partial\rho}{\partial y}v + \dfrac{\partial\rho}{\partial z}w}{\dfrac{\partial p}{\partial x}u + \dfrac{\partial p}{\partial y}v + \dfrac{\partial p}{\partial x}w} .$$

Amíg a barotropitási együttható egy rögzített időpontban adja meg a sűrűség és a nyomás kapcsolatát az áramlási térben, addig a $B = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}p}$ egyenlettel definiált piezotropitási együttható egy-egy elmozduló légrészben írja le a nyomás- és sűrűségváltozás közötti kapcsolatot:

$$B = \frac{\mathrm{d}\rho(x,y,z,t)}{\mathrm{d}p(x,y,z,t)},$$

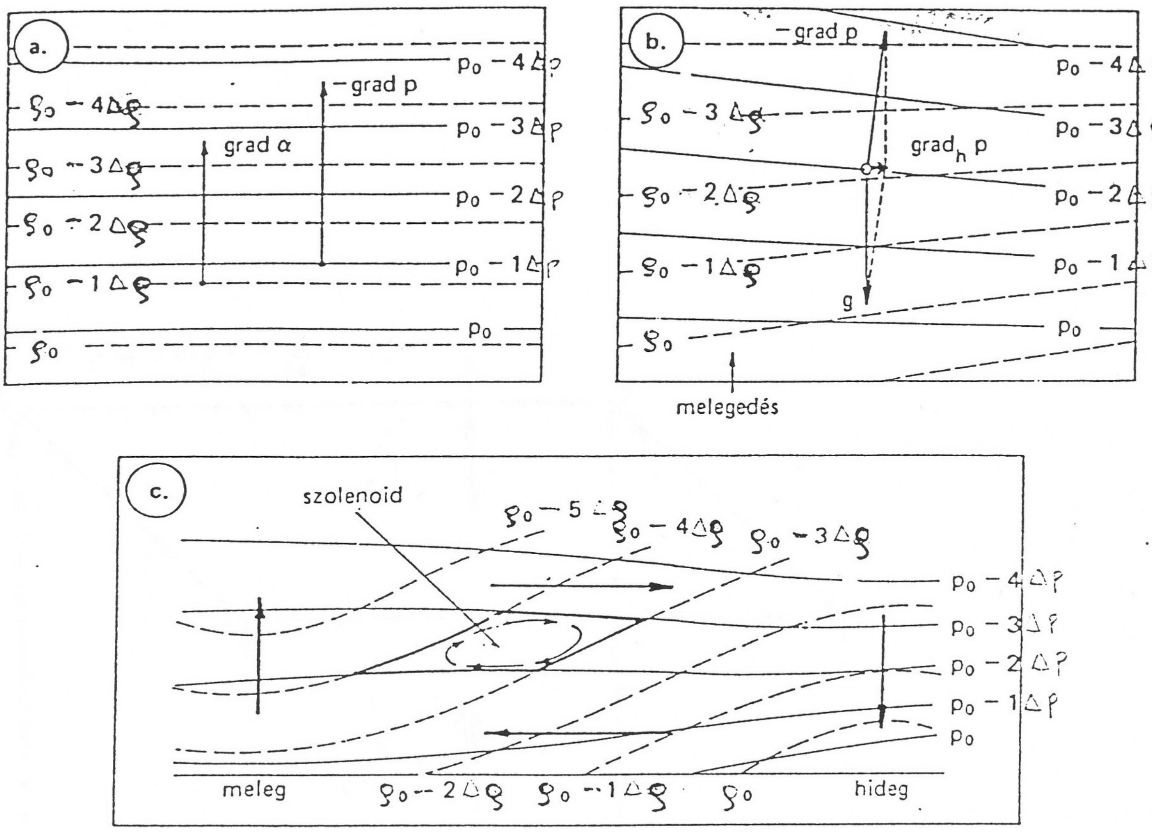
így

$$B = \frac{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho}{\partial x}u + \frac{\partial\rho}{\partial y}v + \frac{\partial\rho}{\partial z}w}{\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x}u + \frac{\partial p}{\partial y}v + \frac{\partial p}{\partial x}w}.$$

Abban az esetben, ha az izobárok és az állandó sűrűség izovonalai nem párhuzamosak, azaz szöget zárnak be egymással, *baroklin légkör*ről beszélünk. Ez sohasem stabilis egyensúlyi állapot. A meginduló mozgások a barotrop egyensúly helyreállítására törekednek. A nyomás és a sűrűség izovonalai által kirajzolt elemi felületeket szolenoidoknak nevezzük. Minél nagyobb ezek száma, annál jobban eltér a légkör a barotrop állapottól.

Feltétlen- vagy *autobarotrop* közegről beszélünk, ha a kezdetben (t_0) barotrop légkör (illetve a légkör általunk vizsgált része) tetszőleges t időpontban is barotrop marad. Tehát az egyes légrészek elmozdulása, keveredése nem befolyásolja a sűrűségi és a nyomási mező kapcsolatát, vagy másképpen fogalmazva a két mező továbbra is együtt változik. A piezotropitási és a barotropitási együttható megegyezik minden időpillanatban ($B = b$).
Az elmozduló légrészekben lejátszódó nyomás- és sűrűségváltozás (B) összhangban van a skalármezők geometriai (b) szerkezetével. Autobarotrop közegre jó példa a homogén összenyomhatatlan légkör ($\rho = \mathrm{const.}$), vagy az izentrop ($\Theta = \mathrm{const.}$) légkör, amelyben a légrészek elmozdulása száraz adiabatikus. Az első esetben $B = b = 0$, míg a másodikban $B = b = \frac{c_v}{c_p}\frac{\rho}{p}$.

Feltételes barotropiáról akkor beszélünk, ha a kezdeti barotrop rétegződést a légköri mozgások megváltoztatják. Az áramlási tér adott pontjában $t \neq t_0$ időpontban már nem egyezik meg a piezotropitási és a barotropitási együttható ($B \neq b$). Jó példa erre a kezdetben izoterm légkörben száraz adiabatikusan elmozduló légrész: $B = \frac{c_v}{c_p}\frac{\rho}{p}$, illetve $b = \frac{1}{RT_0} = \frac{\rho}{p}$.



3. ábra. A baroklinitás kialakulása.

VII.3. Az áramlási mező invariánsai

Azokat a mennyiségeket, amelyek függetlenek a koordináta-rendszer választásától, invariánsoknak nevezzük. A koordináta-rendszertől való függetlenséget e mennyiségek integrál-előállítása biztosítja. Az invariánsok matematikai és fizikai elméletének, az invariánsok és a szimmetriák közötti kapcsolatnak gazdag irodalma van. Beszélhetünk skalár-, vektor- és mátrixfüggvények invarianciájáról. Fontos szerepet kap a meteorológiában a lineáris operátorok (másodrendű tenzorok) invariáns tulajdonsága.

A légköri folyamatok Hamilton-féle tárgyalásmódjában a Lie–Poisson-algebra alkalmazásával kiemelt szerepe van a Hamilton-féle (energia) és a Casimir-invariánsoknak (pl. az örvényesség hatványai). Az elmélet fontos szerepet játszik légköri energetikában, az instabilitások (pl. kétrétegű baroklin közeg) fejlődésében, vagy a numerikus modellek vizsgálatában. A euleri modellegyenletek tér- és időbeli diszkretizációjuk során ugyanis elvesztik tiszta a Hamilton-struktúrájukat. Lényeges kérdés a felbontás optimalizálása, a geometriai struktúrák és az invariánsok minél nagyobb számú megőrzése. E tématerület azonban meghaladja a könyv célkitűzéseit. Műveléséhez a geofizikai folyadékdinamika mellett elméleti mechanikai és matematikai analízis és algebra ismeretek kellenek (lásd pl. Arnold, V.I., Holm, D.D., McLachlan R.I. Pedlosky, J., és Szunyogh István munkáit).

Mi a legfontosabb, szemléletes fizikai tartalommal rendelkező invariánsokat vizsgáljuk, amelyek egy elmozduló légrész alakváltozásaihoz köthetők. Légköri kinematikával foglalkozunk. (*A tömeg, energia, impulzus, impulzusmomentum, potenciális örvényesség és az örvényesség hatványait (pl.: az ensztrófia, mint az örvényesség négyzete) a későbbiekben, a készülő dinamikus meteorológia tankönyv második részében elemezzük.*)

VII.3.1. A skalár- és vektorterek legfontosabb invariánsai

Ha a sebességmező szerkezetét, invariánsait tanulmányozzuk, akkor arra az egyszerű kérdésre keressük a választ, hogy az áramlási térbe helyezett légrész (pl. egy sodródó léggömb) hogyan fog elmozdulni, deformálódni. Miközben elmozdul, megváltozhat a térfogata, forgómozgást végezhet, deformálódhat a nyírás, illetve a belső és külső nyomóerők hatására. E változások egy-egy invariáns mennyiséghez kötődnek. Ezek a divergencia, a rotáció és a teljes deformáció. A sebességtér, pontosabban a lineáris sebességtér – a példakénti léggömb alakváltozásaihoz kötődő – invariáns mennyiségeit vizsgáljuk, de foglalkozunk a gradiens és a Laplace-operátor invariáns jelentésével is. A sebességmező térbeli szerkezetét írjuk le, segítségül hívva a tenzoranalízis eszköztárát. Az invariáns mennyiségeket az (x, y, z) Descartes-féle koordináta-rendszerben szemléltetjük.

Ahol szemléletesen lehetséges, ott megadjuk az invariánsok integrál-előállítását, majd a 3D deriválttenzor (lineáris leképezés) skalár- és vektorinvariánsaival foglalkozunk, s elemezzük a deriválttenzor szimmetrikus részét is, mint a deformációt leíró invariánst (mátrix-függvény). A témakör megértését szolgáló matematikai ismereteket, a fontosabb tételek bizonyítását a függelékben adjuk meg.

VII.3.1.1. A divergencia

Az invariánsok közül elsőként egy skalárral, a divergenciával foglalkozunk, ami a $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektortér tetszőleges pontjában megadja a fajlagos lokális kiáramlási többletet vagy hiányt. Nézzük meg a divergencia szemléletes meteorológiai jelentését! Legyen a vizsgált vektor-vektor függvény a $\rho \cdot \mathbf{v}$ tömegáram, ahol $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ a sebesség, $\rho(\mathbf{r})$ a sűrűség. A tömegáram divergenciája

$$\operatorname{div}(\rho \cdot \mathbf{v})$$

az Euler-féle szemléletmódban (i) megmutatja , hogy a tér adott pontjában hogyan változik az elemi térfogat sűrűsége, illetve a Lagrange-féle szemléletmódban (ii) megadja a tér adott pontjába sodródó elemi légrész sűrűségváltozását. (Az Euler-rendszerben az elemi térfogat helyét és nagyságát rögzítjük, míg a Lagrange-rendszerben azokat a részecskéket adjuk meg, amelyek meghatározzák a térfogatelemet.)

A sűrűségváltozást, ami a tér adott pontjában mindkét leírásmódban ugyanakkora, az Euler-féle szemléletmódban az adott térfogatelemben bekövetkező tömegváltozás, míg a Lagrange-féle szemléletmódban a részecskék által meghatározott elemi légrész térfogatváltozása okozza.

Ha $\mathrm{div}(\rho \cdot \mathbf{v}) > 0$, akkor a légrész sűrűsége csökken, vagyis kiáramlási többlet van. A tömegárammező divergens. Ha $\mathrm{div}(\rho \cdot \mathbf{v}) < 0$, akkor a légrész sűrűsége növekszik, vagyis beáramlási többlet van. A tömegárammező konvergens.

Vizsgálhatjuk a sebességi mező divergenciáját is. Ha $\mathrm{div}\mathbf{v} > 0$, szétáramlásról (divergencia), ha $\mathrm{div}\mathbf{v} < 0$, összeáramlásról (konvergencia) beszélünk.

A divergencia invariáns definíciója

Legyen $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ az $\mathbf{r_0}$ pont környezetében folytonos és magán e helyen differenciálható függvény. A vektortér adott pontbeli divergenciáján a vektortér e pont körüli kis felületen vett fluxusa és a körülzárt térrész köbtartalma hányadosának határértékét értjük, miközben e térrész az adott pontra zsugorodik.

$$\mathrm{div}_0\mathbf{v} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{\Delta F} \mathbf{v} \cdot \mathbf{dF} \quad .$$

A térfogati és a felületi integrálok közötti kapcsolatot leíró Gauss–Osztogradszkij-tétel szerint a $\mathrm{div}\mathbf{v}$ skalár ΔV térfogatra vonatkozó integrálja egyenlő a $\mathbf{v}$ vektornak a (kifele irányított) ΔF zárt határfelületen vett fluxusával.

$$\iiint_{\Delta V} \mathrm{div}\mathbf{v} \cdot \mathrm{d}V = \oint_{\Delta F} \mathbf{v} \cdot \mathbf{dF} \quad .$$

E tétel fontos következménye, hogy (i) bármely forrásmentes (szolenoidális vagy csöves) vektortér zárt felületi fluxusa nulla $(\mathrm{div}\mathbf{v} = 0)$, illetve (ii) a szolenoidális vektortér fluxusa a vektorcső keresztmetszetein állandó.

A divergencia felírható a Hamilton-féle differenciáloperátor invariáns értelmezése alapján is. Definíció szerint: a nabla (∇) differenciáloperátor adott pontbeli vektorán a pont körüli zárt felület vektora és a körülzárt térfogat hányadosának határértékét értjük, miközben e térrész az adott pontra zsugorodik (lásd a II. Függeléket is). A nabla szimbolikus vektor csak valamilyen skalár-, vagy vektormennyiséggel szorozva bír értelemmel.

$$\nabla_0 \ldots = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{\Delta F} \mathbf{dF} \ldots \quad .$$

A Descartes-féle koordináta-rendszerben a nabla operátor alakja:

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\mathrm{d}}{\mathbf{dr}} \quad .$$

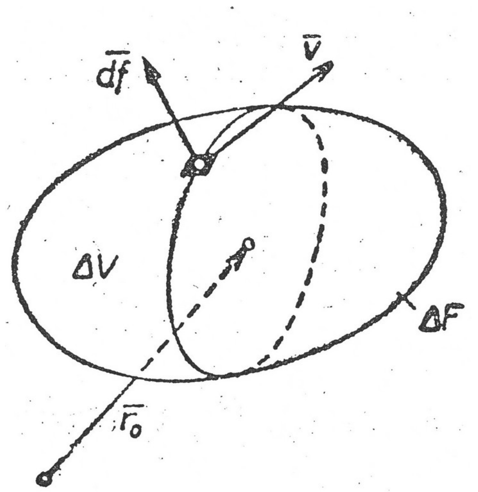
A divergencia pedig:

$$\mathrm{div}\mathbf{v} = \nabla\mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad .$$

A nagyskálájú horizontális áramlási rendszerek leírásában fontos szerepet kap a horizontális divergencia. Definíciója:

$$\mathrm{div}_0 \mathbf{v_h} = \lim_{\Delta F \to 0} \frac{1}{\Delta F} \oint_{\Delta G} \mathbf{v_h} \cdot \mathbf{dr_n} \ , \qquad \mathrm{div}\mathbf{v_h} = \nabla \mathbf{v_h} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \ ,$$

ahol ΔG a ΔF felületelemet határoló görbe az (x, y) síkban, $\mathbf{dr_n}$ pedig a ΔG görbe kifele mutató normálvektora.



4. ábra. A divergencia kiszámítása az $\mathbf{r_0}$ pont körüli ΔV térfogatelemre.

VII.3.1.2. A gradiens

A skalármezők adott pontbeli gradiense szintén invariáns mennyiség. A következőkben ezzel foglalkozunk. A meteorológiai gyakorlatban, a légkörben hatók erők leírásakor a nyomási gradiens bír jelentőséggel.

Tekintsünk az $\mathbf{r_0}$ pont környezetében folytonos és e helyen differenciálható $p(\mathbf{r})$ skalár-vektor függvényt! A skalártér adott pontbeli gradiensén a skalártér e pont körüli kis felületen vett integrálja és a körülzárt térrész térfogatának a hányadosát értjük, miközben a térrész az adott pontra zsugorodik.

$$\mathbf{grad_0} p = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{\Delta F} p \cdot \mathbf{dF} \ .$$

A gradienstétel szerint a $\mathbf{grad_0}p$ vektor ΔV térrészre vonatkozó integrálja megegyezik a $p(\mathbf{r})$ skalárnak a (kifele irányított) ΔF határfelületen vett integráljával.

$$\int_{\Delta V}\!\!\int\!\!\int \mathbf{grad}\,p\;\mathrm{d}V = \oint_{\Delta F}\!\!\oint p\;\cdot\mathbf{dF}\quad .$$

A $p(\mathbf{r})$ nyomási mező $\oint_{\Delta F}\!\!\oint p\cdot\mathbf{dF}$ zárt felületi integrálja a belső és külső nyomóerők eredővektora a ΔF felületen. A $\mathbf{grad_0}p$ ugyanezt jelenti, csak a ΔV térfogat szerint normálva. Az Euler-féle szemléletmódban a nyomási gradiens arányos az adott térfogatelemre ható nyomási gradiens erővel, a Lagrange-féle szemléletmódban pedig az adott helyre sodródó légrész egységnyi térfogatára ható nyomási gradiens erővel. A $p(\mathbf{r})$ gradiense a Descartes-féle koordináta-rendszerben:

$$\mathbf{grad}\,p = \nabla p = \mathbf{i}\frac{\partial p}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial p}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial p}{\partial z}\quad .$$

Az (x, y) síkbeli nyomási képet vizsgálva leegyszerűsödik a gradiens invariáns előállítása:

$$\left(\mathbf{grad_0}\,p\right)_h = \lim_{\Delta F\to 0}\frac{1}{\Delta F}\oint_{\Delta G} p\;\mathbf{dr_n}\quad .$$

VII.3.1.3. A Laplace-operátor

A divergencia definíciós egyenlete alapján könnyen belátható a skalártér *Laplace-kifejezés*ének koordináta-rendszertől független, invariáns volta. Tekintsük a $\mathbf{grad}\,p$ vektortér divergenciáját az $\mathbf{r_0}$ pontban!

$$\nabla_0^2 p = \Delta_0 p = \mathrm{div}_0\,\mathbf{grad_0}\,p = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\oint_{\Delta F}\!\!\oint \mathbf{gradp}\cdot\mathbf{dF}\quad ,$$

ami a Descartes–rendszerben:

$$\Delta p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\quad .$$

VII.3.1.4. A rotáció

Az áramlási tér fontos jellemzője a forgás, az örvénylés intenzitása. Ezt adja meg a sebességi mező rotációja. Ez is egy vektorinvariáns. Más típusú vektortereknek (pl. az elektromos áram mágneses terének) is van rotációja, de itt nincs szó tényleges forgásról, örvénylésről, hanem a vektortér lokális felépítéséről.

Az Euler-féle szemléletmódban a rotáció megadja, hogy az áramlási tér kiválasztott pontjában milyen irányú és erősségű forgó mozgást végezne az odahelyezett légrész. A Lagrange-féle szemléletmódban a rotáció leírja a tér adott pontjába sodródott légrész forgó mozgását.

Legyen $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ az $\mathbf{r_0}$ pont környezetében folytonos és magán e helyen differenciálható függvény! A vektortér adott $\mathbf{r_0}$ pontbeli rotációján a vektortér e pont körüli kis felületen vett $\oint_{\Delta F} \mathbf{dF}\times\mathbf{v}$ alakú integrálja és a körbezárt térfogat hányadosának a határértékét értjük.

$$\mathbf{rot_0 v} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{\Delta F} \mathbf{dF}\times\mathbf{v} \ .$$

A felírásból következik, hogy a $\mathbf{rot\ v}$ vektor ΔV térfogatra vonatkozó integrálja egyenlő a (kifele irányított) $\mathbf{n}$ normálvektor ($\mathbf{dF} = \mathbf{n}\ \mathrm{d}F$) és a $\mathbf{v}$ vektor vektoriális szorzatának ΔF zárt felületen vett integráljával:

$$\int_{\Delta V} \mathbf{rot\ v} \cdot \mathrm{d}V = \oint_{\Delta F} \mathbf{dF}\times\mathbf{v} = \oint_{\Delta F} (\mathbf{n}\times\mathbf{v})\mathrm{d}F \ .$$

A rotációvektor tetszőleges nyílt felületre (pl. a ΔV térfogat különböző koordináta-síkok szerinti metszeteire) vonatkozó integrálja és az adott felületet körbefogó görbe menti cirkuláció közötti kapcsolatot a Stokes-tétel adja meg. E szerint: a $\mathbf{rot\ v}$ vektor ΔF nyílt felületre vonatkozó fluxusa egyenlő a $\mathbf{v}$ vektor ΔG görbe menti cirkulációjával. *Ismét megjegyezzük, hogy az északi féltekén az óramutató járásával ellentétes körüljárási irány* (*a ciklonális forgás*) *a pozitív*.

$$\int_{\Delta F} \mathbf{rot\ v} \cdot \mathbf{dF} = \oint_{\Delta G} \mathbf{v} \cdot \mathbf{dr} \ .$$

A rotációvektor alakja a Descartes-féle koordináta-rendszerben:

$$\mathbf{rot\ v} = \nabla\times\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ u & v & w \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \partial w/\partial y - \partial v/\partial z \\ \partial u/\partial z - \partial w/\partial x \\ \partial v/\partial x - \partial u/\partial y \end{pmatrix} \ .$$

A horizontális sebességi mező rotációja merőleges az (x, y) síkra, z tengely irányú. Ez az ún. örvényesség. Az örvényességnek kitüntetett szerepe van a nagyskálájú kvázi-kétdimenziós folyamatok leírásában.

$$(\mathbf{rot\ v})_z = \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \ .$$

Az örvényességet az (x, y) síkbeli ΔF nyílt felület körüli cirkuláció (ΔC) ismeretében számítjuk:

$$\zeta_0 = (\mathbf{rot_0 v})_z = \lim_{\Delta F \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta F} = \lim_{\Delta F \to 0} \frac{1}{\Delta F} \oint_{\Delta G} \mathbf{v_h} \cdot \mathbf{dr} = \lim_{\Delta F \to 0} \frac{1}{\Delta F} \oint_{\Delta G} (u\mathrm{d}x + v\mathrm{d}y) \ .$$

VII.3.2. A Stokes-tétel és a Gauss–Osztrogradszkij-tétel néhány következménye

A következőkben megismerkedünk a vektorterek néhány – meteorológiában is alkalmazható – tulajdonságával. Ezek közelebb visznek minket a gradiens, a divergencia és a rotáció jelentéséhez.

i.) Ha $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ potenciálos vektortér, azaz előállítható valamely $\varphi(\mathbf{r})$ skalár-potenciál gradienseként

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{grad}\varphi(\mathbf{r}) \ ,$$

akkor az első gradienstétel szerint tetszőleges ΔG zárt síkgörbe mentén a cirkuláció nulla, azaz örvénymentes az áramlás.

$$\Delta C = \oint_{\Delta G} \mathbf{v} \cdot \mathbf{dr} = \oint_{\Delta G} \mathbf{grad}\varphi \cdot \mathbf{dr} = 0 \ ,$$

hiszen

$$\mathbf{rot\, v} = \mathbf{rot\ grad}\varphi = \nabla \times \nabla\varphi = 0 \ .$$

ii.) Ha $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ örvénymentes vektortér ($\mathbf{rot\, v} = 0$), akkor egyben potenciálos is, vagyis

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{grad}\varphi(\mathbf{r}) \ ,$$

továbbá teljesül, hogy

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathbf{dr}}\mathbf{dr} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{dr} = u\mathrm{d}x + v\mathrm{d}y + w\mathrm{d}z$$

teljes differenciál. (Igaz az előző állítás megfordítása is.)

iii.) Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ potenciálos vektortér, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{dr}$ pedig teljes derivált legyen, nem más, mint a $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektortér örvénymentessége ($\mathbf{rot\, v} = 0$).

iv.) A rotáció zárt felületi fluxusa nulla.

$$\oint\!\!\!\int_{\Delta F'} \mathbf{rot\, v} \cdot \mathbf{dF} = 0 \ .$$

Ez könnyen belátható, hiszen a rotáció nyílt felületi fluxusa a cirkuláció,

$$\int_{\Delta F} \mathbf{rot\,v} \cdot \mathbf{dF} = \oint_{\Delta G} \mathbf{v} \cdot \mathbf{dr} \; .$$

Egy elemi légrész egymással szembeni felületelemei körüli cirkulációt ellentétes előjelű, de azonos nagyságú cirkulációként kell elképzelni.

v.) Bármely vektortér rotáció-vektortere forrásmentes (szolenoidális).

$$\mathrm{div}\,\mathbf{rot\,v} = \nabla(\nabla \times \mathbf{v}) = 0 \; ,$$

ami a rotáció zárt felületi fluxusának nulla voltából is következik a Gauss–Osztrogradszkij-tétel felhasználásával.

vi.) Minden forrásmentes vektortér előállítható valamely vektorpotenciál-tér rotáció-vektortereként. Ha $\mathrm{div}\mathbf{v} = 0$, akkor található egy olyan $\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{r})$ vektorpotenciál-tér, amelyre

$$\mathbf{v} = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{\Psi} \; ,$$

Hiszen

$$\mathrm{div}\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\Psi} = \nabla(\nabla \times \boldsymbol{\Psi}) = 0 \, .$$

VII.3.3. Példák a rotáció meghatározására

Ha a nagyskálájú folyamatok fejlődését vizsgáljuk, akkor ott a sebességmező két invariánsa, a divergencia és a rotáció közül a rotáció (pl. egy ciklon forgása) a fontosabb. Ezért is ismerkedjünk meg a rotáció meghatározásával néhány elemi, „tankönyvi” példán.

i.) *Lineáris sebességi mező rotációja.* Tekintsük az (x, z) síkban a magassággal lineárisan növekvő

$$u(z) = \mathrm{c} \cdot z$$

sebességi mezőt, ahol $\mathrm{c} = \mathrm{const.}$ Ennek az egyszerű áramlásnak is lesz rotációja:

$$\mathbf{rot\,v} = \mathbf{j}\,\mathrm{c} \; .$$

ii.) *Merev test rögzített tengely körüli forgása.* Legyen a szögsebesség $\boldsymbol{\omega}$, a tengely körüli forgás sebességtere: $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, ahol $\mathbf{r}$ a forgástengely egy adott pontjától vett távolság (helyvektor). Kétféle módon: a cirkuláció ismeretében, illetve az integrál definíció alapján is számítsuk ki a rotációt!

a.) A rotáció kiszámítása a cirkuláció ismeretében. Tekintsük a forgástengely körüli tetszőleges ΔG zárt síkgörbét, melynek felülete ΔF ! A ΔF nyílt felület körüli cirkuláció (ΔC):

$$\Delta C = \oint_{\Delta G} \mathbf{v} \cdot \mathbf{dr} = \oint_{\Delta G} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{dr} = \boldsymbol{\omega} \oint_{\Delta G} \mathbf{r} \times \mathbf{dr} = 2\boldsymbol{\omega}\, \boldsymbol{\Delta}\mathbf{F}$$

A rotáció a Stokes-tétel alapján számítható:

$$\mathbf{rot\ v} = \lim_{\Delta F \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta F} \cdot \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta F} = 2\boldsymbol{\omega} \ .$$

b.) A rotáció kiszámítása a

$$\mathbf{rot_0 v} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{\Delta F} \mathbf{dF} \times \mathbf{v}$$

definíciós egyenletből. Tekintsük először a $\oint_{\Delta F} \mathbf{dF} \times \mathbf{v}$ integrált!

$$\oint_{\Delta F} \mathbf{dF} \times \mathbf{v} = \oint_{\Delta F} \mathbf{dF} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \oint_{\Delta F} \left[(\mathbf{dF} \cdot \mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{dF} \cdot \boldsymbol{\omega}) \cdot \mathbf{r} \right] = \boldsymbol{\omega} \oint_{\Delta F} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{dF}) - \oint_{\Delta F} (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{r} \cdot \mathrm{d}F =$$

$$= \boldsymbol{\omega} \cdot 3\ \Delta V - \boldsymbol{\omega} \cdot \Delta V = 2 \cdot \boldsymbol{\omega}\ \Delta V \ .$$

A rotáció tehát:

$$\mathbf{rot\ v} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{2 \cdot \boldsymbol{\omega}\ \Delta V}{\Delta V} = 2 \cdot \boldsymbol{\omega} \ ,$$

ahol a ΔF zárt felület által közrezárt térrész térfogata ΔV. A hármas vektorszorzat kifejtésekor kihasználtuk, hogy

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \ .$$

3.) Az átlagos örvényesség becslése szimmetrikus ciklonban (az északi féltekén dolgozunk). A ciklon forgástengelyétől r_0 távolságra a horizontális szélsebesség nagysága legyen u_0. Az r_0 sugarú kör mentén a cirkuláció és a ciklonra vonatkozó becsült örvényesség rendre

$$\Delta C = \oint_{\Delta G} \mathbf{v} \cdot \mathbf{dr} = u_0 \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_0 \ ,$$

$$\left(rot\vec{V} \right)_z = \zeta \sim \frac{\Delta C}{\Delta F} = u_0 \frac{2 \cdot r_0 \cdot \pi}{r_0^2 \cdot \pi} = \frac{2 \cdot u_0}{r_0} \ .$$

4.) *A rotáció alakja inerciarendszerben és forgó koordináta-rendszerben.* Határozzuk meg az $\mathbf{\Omega}$ állandó szögsebességgel forgó koordináta-rendszerben $\mathbf{v}$ sebességgel elmozduló légrész rotációját! Jelöljük az inerciarendszert (az abszolút koordináta-rendszert) a indexszel! Az elmozduló légrész abszolút rendszerbeli sebessége:

$$\mathbf{v_a} = \mathbf{v} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r} \ ,$$

ahol $\mathbf{r}$ a forgástengelytől mért távolság, az adott pont helyvektora. Az abszolút koordináta-rendszerbeli rotáció:

$$\mathbf{rot\ v_a} = \nabla\times(\mathbf{v} + \mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}) = \nabla\times\mathbf{v} + \nabla\times(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}) \ ,$$

A Hamilton-féle differenciáloperátor kettős tulajdonsága miatt:

$$\nabla\times(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}) = \nabla\times\left(\mathbf{\Omega}\times\overset{\Downarrow}{\mathbf{r}}\right) + \nabla\times\left(\overset{\Downarrow}{\mathbf{\Omega}}\times\mathbf{r}\right) = \left[\mathbf{\Omega}(\nabla\mathbf{r}) - (\mathbf{\Omega}\nabla)\mathbf{r}\right] + \left[(\mathbf{r}\nabla)\mathbf{\Omega} - \mathbf{r}(\nabla\mathbf{\Omega})\right] \ ,$$

ahol a $\Downarrow$ jelöli, hogy a differenciáloperátor éppen melyik tagra hat. Kihasználva, hogy a szögsebesség állandó (a fenti egyenlet 3. és 4. tagja nulla), továbbá

$$\nabla\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \ ,$$

valamint

$$(\mathbf{\Omega}\nabla)\mathbf{r} = (\Omega_x\partial/\partial x + \Omega_y\partial/\partial y + \Omega_z\partial/\partial z)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix} = \mathbf{\Omega}$$

kapjuk, hogy

$$\left[\mathbf{\Omega}\,(\nabla\mathbf{r}) - (\mathbf{\Omega}\nabla)\cdot\mathbf{r}\right] + \left[(\mathbf{r}\nabla)\cdot\mathbf{\Omega} - \mathbf{r}\cdot(\nabla\mathbf{\Omega})\right] = \left[\mathbf{\Omega}\cdot(\nabla\mathbf{r}) - (\mathbf{\Omega}\nabla)\cdot\mathbf{r}\right] = 3\mathbf{\Omega} - \mathbf{\Omega} = 2\mathbf{\Omega} \, .$$

A végeredmény tehát:

$$\mathbf{rot\ v_a} = \mathbf{rot\ v} + 2\mathbf{\Omega} \ .$$

Az abszolút koordináta-rendszerbeli sebesség rotációja két tag összegeként írható fel. Ezek a relatív rendszerbeli rotáció és a koordináta-rendszer forgásából (a mi esetünkben természetesen a Föld forgásából) származó ún. planetáris örvényesség. E koordináta-rendszerben az invariáns mennyiség az abszolút örvényesség.

VII.4. Helmholtz tétele a sebességmező felbontásáról; a sebességi mező felépítése, a teljességi tétel

VII.4.1. Helmholtz tétele

A vektormezők két fontos tulajdonsága a rotáció és a divergencia. Helmholtz tétele alapján (F3. függelék) a $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ folytonos és differenciálható vektor-vektor függvény minden esetben felbontható két olyan összetevőre

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_\chi + \mathbf{v}_\Psi \ ,$$

amelyek közül az egyik divergencia-, a másik rotációmentes. A divergenciamentes $\mathbf{v}_\Psi$ vektormező a $\boldsymbol{\Psi}$ vektorpotenciál-mező, az ún. áramfüggvény segítségével állítható elő, mégpedig annak rotációjaként.

$$\mathbf{v}_\Psi = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{\Psi} = \nabla \times \boldsymbol{\Psi} \ ,$$

hiszen

$$\mathrm{div}\,\mathbf{v}_\Psi = \mathrm{div}\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\Psi} = \nabla(\nabla \times \boldsymbol{\Psi}) = 0 \ .$$

A rotációmentes $\mathbf{v}_\chi$ vektormező a χ skalárpotenciál-mező, az ún. sebességpotenciál segítségével kapható, annak gradienseként.

$$\mathbf{v}_\chi = \mathbf{grad}\chi = \nabla\chi \ , \quad \text{hiszen} \quad \mathbf{rot}\,\mathbf{v}_\chi = \mathbf{rot}\,\mathbf{grad}\,\chi = \nabla \times \nabla\chi = 0 \ .$$

A sebességmező helyett áttérhetünk a meteorológiai folyamatok részletesebb (több tagból álló) leírására az áramfüggvény és a sebességpotenciál alkalmazásával. Ez a felbontás az ún. szűrt előrejelzési modellek felírásánál, a légköri folyamatok kvázigeosztrófikus elméleténél lesz fontos.

VII.4.2. A teljességi tétel

A teljességi tétel szerint a divergencia- és a rotációmező ismerete nem elég az eredeti vektormező leírásához. Gondoljunk csak a sebességi mező további invariánsaira, mint pl. a transzláció vagy a deformáció. A sebességmező felépítéséhez további információra is szükség van. Erről szól a teljességi tétel. Ha ismert a ΔF zárt felület határolta ΔV tér minden $\mathbf{r}$ pontjában a $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektortér divergenciája és rotációja

$$\mathrm{div}\,\mathbf{v}(\mathbf{r}) = d(\mathbf{r}) \ , \qquad \mathbf{rot}\,\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}) \ , \qquad \text{ahol} \qquad \mathbf{r} \in \Delta V \ ,$$

továbbá ismert a ΔF zárt felület minden pontjában ($\mathbf{r}_F$) a $\mathbf{v}(\mathbf{r}_F)$ normális vetülete, akkor e három feltétel mellett a $\mathbf{v}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \Delta V$ vektortér egyértelműen megadható. (A bizonyítást lásd az F4. függelékben.)

VII.5. Invariáns mennyiségek bevezetése a deriválttenzor segítségével

Ha a sebességmező szerkezetét, invariánsait tanulmányozzuk, akkor arra az egyszerű kérdésre keressük a választ, hogy az áramlási térbe helyezett légrész (pl. egy sodródó léggömb) hogyan fog elmozdulni, deformálódni. Miközben elmozdul a légrész, megváltozhat a térfogata, forgómozgást végezhet, deformálódhat a súrlódási erő (pl. szélnyírás), illetve a nyomóerők hatására. E változások egy-egy invariáns mennyiséghez kötődnek. Ezek a divergencia, a rotáció és a teljes deformáció. A sebességtér, pontosabban a lineáris sebességtér – példakénti léggömb alakváltozásaihoz kötődő – invariáns mennyiségeit vizsgáljuk. A sebességmező térbeli szerkezetét írjuk le, segítségül hívva a tenzoranalízis eszköztárát.

VII.5.1. A deriválttenzor és sajátosságai

A $\mathbf{D}$ deriválttenzor mátrixát a $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ differenciálható vektor-vektor függvény egyes komponenseinek a megváltozása alapján adhatjuk meg (lásd az F4 függeléket is), amit a mátrix egyes sorai tartalmaznak. Alakja a szokásos Descartes-féle koordináta-rendszerben:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} .$$

A $\mathbf{dv} = \mathbf{D}\mathbf{dr}$ kifejezéssel megadott homogén lineáris függvényrendszer kettős értelmezésre ad módot. A $\mathbf{D}$ tenzor egyrészt koordináta-transzformációnak tekinthető, másrészt tértranszformációnak, vagy mozgásnak.

A deriválttenzor felírható egy szimmetrikus $(\mathbf{D}_s)$ és egy antiszimmetrikus $(\mathbf{D}_a)$ tenzor összegeként.

A $\mathbf{D}_s$ szimmetrikus tenzor alakja:

$$\mathbf{D}_s = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} .$$

A szimmetrikus tenzornak három skalárinvariánsa van (D_I , D_{II} és D_{III}). Ezek a relatív hosszváltozások, vagy más szóval a divergencia, illetve a mátrix spúrja $D_I = \mathrm{spur}\,\mathbf{D}_s$, az elemi felületváltozások hatása D_{II} , továbbá az elemi térfogatváltozás $D_{III} = \det(\mathbf{D}_s)$).

A $\mathbf{D}_a$ antiszimmetrikus tenzor alakja:

$$
\mathbf{D_a} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) & 0 & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) & 0 \end{pmatrix} .
$$

VII.5.2. Alakváltozási (geometriai) egyenletek

A deriválttenzor szimmetrikus része az ún. alakváltozási tenzor, ami kis deformációkat feltételezve leírja a relatív megnyúlást és valamely két egymásra merőleges síkkal párhuzamos relatív szögváltozást. (Részletesen lásd az F4. függeléket.) A fenti jelölések használatával:

$$
\mathbf{D_s} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} .
$$

Ez az ún. alakváltozási tenzor. E tenzorral kapcsolatos

$$
(\mathbf{D_s} - \varepsilon_i \mathbf{E}) \cdot \mathbf{n_i} = 0
$$

sajátérték-feladat megoldása szolgáltatja azokat az $\mathbf{n_i}$ alakváltozási főirányokat, amelyek mentén ε_i relatív nyúlás-zsugorodás van, illetve amelyekre merőleges síkban nincs szög-változás, azaz itt $\gamma_{12} = \gamma_{23} = \gamma_{31} = 0$. A teljes alakváltozás felbontható tiszta térfogatváltozásra (izotrop dilatáció, $\varepsilon\mathbf{E}$) és tiszta (térfogatváltozás nélküli) alakváltozásra $\mathbf{D}_s'$, azaz

$$
\mathbf{D_s} = \mathbf{D}_s' + \varepsilon\mathbf{E} .
$$

A tiszta alakváltozás:

$$
\mathbf{D}_s' = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} - \varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_{yy} - \varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_{zz} - \varepsilon \end{pmatrix} ,
$$

ahol

$$\varepsilon = \frac{1}{3}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) \ .$$

Az alakváltozási egyenlet ismeretében egyszerűen leírhatjuk a molekuláris viszkozitás jelenségét, vagy a rugalmasságtan alaptörvényének, a Hooke-törvénynek a tenzoriális alakját.

Végezetül megemlítjük, hogy a deriválttenzor antiszimmetrikus része a lokális merevtestszerű forgás erősségéről tájékoztat (lásd részletesen a 4. Függeléket), amire az alakváltozás nincs hatással.

$$\mathbf{D_a} = \frac{1}{2}\mathbf{rot\,v} \times \mathbf{E} \ ,$$

ami egy vektor és egy tenzor vektoriális szorzata.

VII.6. A lineáris sebességi mező felbontása, az áramlási mező alapvető karakterisztikái

A meteorológiai gyakorlatban, a nagyskálájú folyamatok vizsgálatánál a horizontális áramlási mezőt elemezzük. A sebességmező lokális tulajdonságainak leírásához gyakran használunk lineáris közelítést. A következőkben megadjuk a lineáris sebességi mező alakját, invariánsait.

Sokszor találkozunk olyan meteorológiai feladattal, amikor a koordináta-rendszerünk egyik tengelyét az áramlás irányába fordítjuk leegyszerűsítve a feladatot. Az új rendszerben természetesen más lesz az egyes vektorok reprezentációja. A vektorok nagysága, a mező invariánsai azonban nem változnak. A koordináta-rendszer elforgatása egy háromdimenziós feladat. Vektoranalízis-beli ismereteink alapján tudjuk, hogy egy háromdimenziós forgatás felírható kétdimenziós forgatások összegeként. Ezért is figyelmet érdemel a horizontális (kétdimenziós) áramlási mező.

Elsőként a lineáris sebességi mező felbontásával foglalkozunk, majd az áramvonal és a trajektória fogalmával ismerkedünk meg. Ezt követi az egyszerű áramvonal-szerkezetek bemutatása. Ezt követően a természetes koordináta-rendszerrel foglalkozunk: megadjuk a kétdimenziós divergencia, rotáció és deformáció alakját.

VII.6.1. A lineáris sebességi mező felbontása

Tekintsük az (x_0, y_0) pont környezetében a $\mathbf{v_h}(x, y) = (u, v)$ sebességmező Taylor-sorfejtésen alapuló közelítését a Descartes-féle koordináta-rendszerben:

$$u(x_0 + \mathrm{d}x, y_0 + \mathrm{d}y) = u_0 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 \mathrm{d}y + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0 (\mathrm{d}x)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_0 (\mathrm{d}y)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)_0 \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y + \ldots$$

,

$$v(x_0+\mathrm{d}x, y_0+\mathrm{d}y)=v_0+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 \mathrm{d}x+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0 \mathrm{d}y+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)_0 (\mathrm{d}x)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)_0 (\mathrm{d}y)^2+\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right)_0 \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y+\ldots$$

.

A másod- és magasabbrendű tagok elhagyásával kapjuk a lineáris sebességmező közelítést:

$$u=u(x_0+\mathrm{d}x, y_0+\mathrm{d}y)\approx u_0+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 \mathrm{d}x+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 \mathrm{d}y,$$

$$v=v(x_0+\mathrm{d}x, y_0+\mathrm{d}y)\approx v_0+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 \mathrm{d}x+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0 \mathrm{d}y.$$

Határozzuk meg a lineáris sebességi mező invariánsait! Ehhez a deriválttenzort hívjuk segítségül.

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \partial u/\partial x & \partial u/\partial y \\ \partial v/\partial x & \partial v/\partial y \end{pmatrix}_0 \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \end{pmatrix}.$$

A kiindulási koordináta-rendszertől független invariáns a transzláció, azaz a konstans sebességi mező (u_0, v_0). Ez az invariáns nem része a deriválttenzornak, hisz a deriválttenzor csak a sebességmező megváltozását írja le. ($\mathbf{v}$ és $\mathbf{r}$ dimenziója nem egyezik meg.) A további invariánsok megadásához írjuk fel a deriválttenzort a szimmetrikus és az antiszimmetrikus rész összegeként!

$$\mathbf{D}=\mathbf{D}_s+\mathbf{D}_a=\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}_0=\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}_0+\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right) & 0 \end{pmatrix}_0$$

.

A deriválttenzor szimmetrikus részét két részre bonthatjuk, a divergenciát $\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)$ és a tiszta nyírást tartalmazóra.

$$\mathbf{D}_s=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right) & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right) \end{pmatrix}_0.$$

Ez két invariánst jelent, ezek a divergencia és a deformáció:

$$\operatorname{div}\mathbf{v_h} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \operatorname{def}\mathbf{v} = \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right].$$

A harmadik invariáns a deriválttenzor vektorinvariánsa, vagyis a rotáció. Kétdimenziós esetben ez a rotáció vertikális komponense.

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{v_h} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\mathbf{k}.$$

Meteorológiai feladatokban gyakran használunk olyan koordináta-rendszert, ami az átlagos sebességi mező irányába mutat, pontosabban fogalmazva a koordináta-rendszer x tengelyét fordítjuk be a sebességvektor irányába. Ekkor, pl. levegőkörnyezeti feladatokban a 3D feladatot 2D feladattá egyszerűsítjük. Mikrometeorológiai problémák megoldásában, pl. a szonikus anemometer adatainak feldolgozásában (a turbulens áramok számításában), szintén használjuk a koordináta-rendszer átlagos szélirányba történő beforgatását. Itt azzal a feltételezéssel élünk, hogy az átlagos vertikális sebesség nulla. Ez egy 3D forgatás, amit két 2D forgatás összegeként (egymásutánjaként) kell elvégezni.

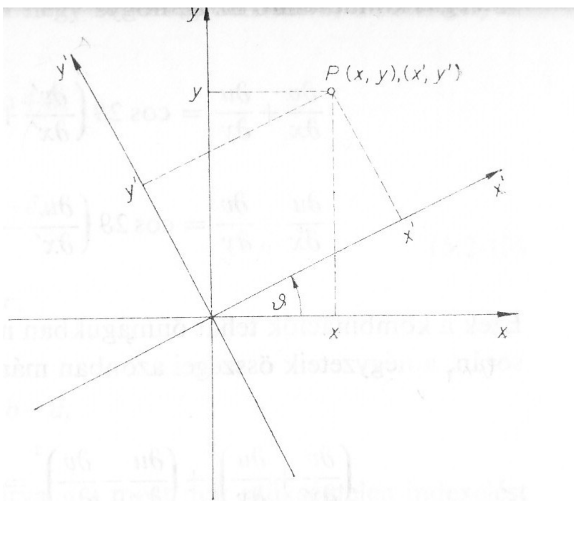
Nézzük a kétdimenziós esetet! Adjuk meg a sebességmező alakját és invariánsait a szélirányba fordított kordináta-rendszerben! Hogyan transzformálódnak az egyes deriváltak?

Legyen az átlagos szélsebesség $\mathbf{v_h} = (u, v)$, a szélvektor x tengellyel bezárt szöge $\vartheta = arc\tan(v/u)$, 5. ábra. Jelölje a Descartes-féle koordináta-rendszer tengelyeit x és y, az elforgatott rendszerét pedig x', y'. Legyen adott egy $\mathbf{r} = (x, y)$ helyvektor az eredeti koordináta-rendszerben! Ennek az új rendszerbeli alakja: $\mathbf{r'} = (x', y')$:

$$x' = x\cos\vartheta + y\sin\vartheta, \quad y' = -x\sin\vartheta + y\cos\vartheta.$$

Fordított irányban is megadhatjuk az áttérést:

$$x = x'\cos\vartheta - y'\sin\vartheta, \quad y = x'\sin\vartheta + y'\cos\vartheta.$$



5. ábra. Az (x, y) és az elforgatott (x', y') koordináta-rendszer.

Általános esetben a transzformációk: $\mathbf{r'} = \mathbf{A}\mathbf{r}$, illetve $\mathbf{r} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{r'}$, ahol a koordináta-rendszer transzformáció mátrixa, illetve annak inverze rendre:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix},$$

illetve

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

Tetszőleges vektor, így a sebességvektor reprezentációja (koordinátái) is a fentiekhez hasonlóan transzformálódik. Nézzük az egyes deriváltak alakját az eredeti és az új koordináta-rendszerben. A deriváltak átírásánál két dologra kell figyelemmel lennünk. Változnak a koordináta-irányok és változik az adott vektor reprezentációja is.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos\vartheta \frac{\partial u}{\partial x'} - \sin\vartheta \frac{\partial u}{\partial y'} = \cos\vartheta \left(\cos\vartheta \frac{\partial u'}{\partial x'} - \sin\vartheta \frac{\partial v'}{\partial x'} \right) - \sin\vartheta \left(\cos\vartheta \frac{\partial u'}{\partial y'} - \sin\vartheta \frac{\partial v'}{\partial y'} \right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sin\vartheta \frac{\partial u}{\partial x'} + \cos\vartheta \frac{\partial u}{\partial y'} = \sin\vartheta \left(\cos\vartheta \frac{\partial u'}{\partial x'} - \sin\vartheta \frac{\partial v'}{\partial x'} \right) + \cos\vartheta \left(\cos\vartheta \frac{\partial u'}{\partial y'} - \sin\vartheta \frac{\partial v'}{\partial y'} \right),$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \cos\vartheta \frac{\partial v}{\partial x'} - \sin\vartheta \frac{\partial v}{\partial y'} = \cos\vartheta \left(\sin\vartheta \frac{\partial u'}{\partial x'} + \cos\vartheta \frac{\partial v'}{\partial x'} \right) - \sin\vartheta \left(\sin\vartheta \frac{\partial u'}{\partial y'} + \sin\vartheta \frac{\partial v'}{\partial y'} \right),$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \sin\vartheta \frac{\partial v}{\partial x'} + \cos\vartheta \frac{\partial v}{\partial y'} = \sin\vartheta \left(\sin\vartheta \frac{\partial u'}{\partial x'} + \cos\vartheta \frac{\partial v'}{\partial x'} \right) + \cos\vartheta \left(\sin\vartheta \frac{\partial u'}{\partial x'} + \cos\vartheta \frac{\partial v'}{\partial x'} \right).$$

Az új rendszerben (x', y') is hasonló alakban adhatók meg az invariánsok, hiszen koordináta-rendszertől független az előállításuk.

$$\operatorname{div} \mathbf{v_h} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'},$$

$$\operatorname{def} \mathbf{v_h} = \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] = \left[\left(\frac{\partial v'}{\partial x'} + \frac{\partial u'}{\partial y'} \right)^2 + \left(\frac{\partial u'}{\partial x'} - \frac{\partial v'}{\partial y'} \right)^2 \right],$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{v_h} = \mathbf{rot}\,\mathbf{v_h} \cdot \mathbf{k} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v'}{\partial x'} - \frac{\partial u'}{\partial y'}.$$

Nézzük meg általánosan, hogyan fejezhető ki a lineáris sebességi mező az invariáns mennyiségek ismeretében! Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 2a, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 2b, \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2c, \quad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 2d.$$

A lineáris sebességi mező alakja az eredeti (x, y) koordináta-rendszerben:

$$u \approx u_0 + (a + b)\mathrm{d}x + (d - c)\mathrm{d}y, \quad v \approx v_0 + (d + c)\mathrm{d}x + (b - a)\mathrm{d}y.$$

Ha úgy választjuk meg az új elforgatott koordináta-rendszert, hogy a deformáció csak egy tagból álljon – ilyen választás minden esetben tehető – akkor $d = 0$. A lineáris sebességi mező alakja ebben az új (x', y') rendszerben:

$$u' \approx u_0' + (a' + b)\mathrm{d}x' - c\mathrm{d}y', \quad v' \approx v_0' + c\mathrm{d}x' + (b - a')\mathrm{d}y',$$

ahol:

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} - \frac{\partial v'}{\partial y'} = 2(a^2 + d^2)^{1/2} = 2a', \quad \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 2b, \quad \frac{\partial v'}{\partial x'} - \frac{\partial u'}{\partial y'} = 2c,$$

A kétdimenziós lineáris sebességmező tehát kifejezhető négy invariáns mennyiség a transzláció, a rotáció, a divergencia és a deformáció ismeretében. Ez a kinematika egyik alaptétele.

VII.6.1.1. Háromdimenziós forgatások

Röviden foglalkozzunk a 3D forgatásokkal, majd nézzük meg a vektorszorzatok elforgatását. Tekintsük az (x, y, z) Descartes-féle koordináta-rendszert és elforgatottját, az (x', y', z') rendszert. Forgassuk el a koordináta-rendszert a $\mathbf{v_0} = (u_0, v_0, w_0)$ vektor irányába (6. ábra).

Ez két forgatás eredményeként adható meg. Elsőként forgassunk az (x, y) síkban! Az elforgatott $\hat{x}$ tengely essen a $\mathbf{v_{h0}} = (u_0, v_0)$ vektor irányába. A forgatás x-tengellyel bezárt szöge legyen ϑ. A forgatás mátrixa:

$$\mathbf{A_1} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta & 0 \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A z-tengely helyzete változatlan marad. A következő lépésben az elforgatott $\hat{x}$ és a z-tengely által kijelölt síkban forgassunk, úgy, hogy az új x' koordináta-tengely a $\mathbf{v_0}$ vektor irányába mutasson. Legyen a $\mathbf{v_0}$ vektor első forgatás utáni ($\hat{x}, y'$) síkkal bezárt szöge φ. A második forgatás mátrixa:

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

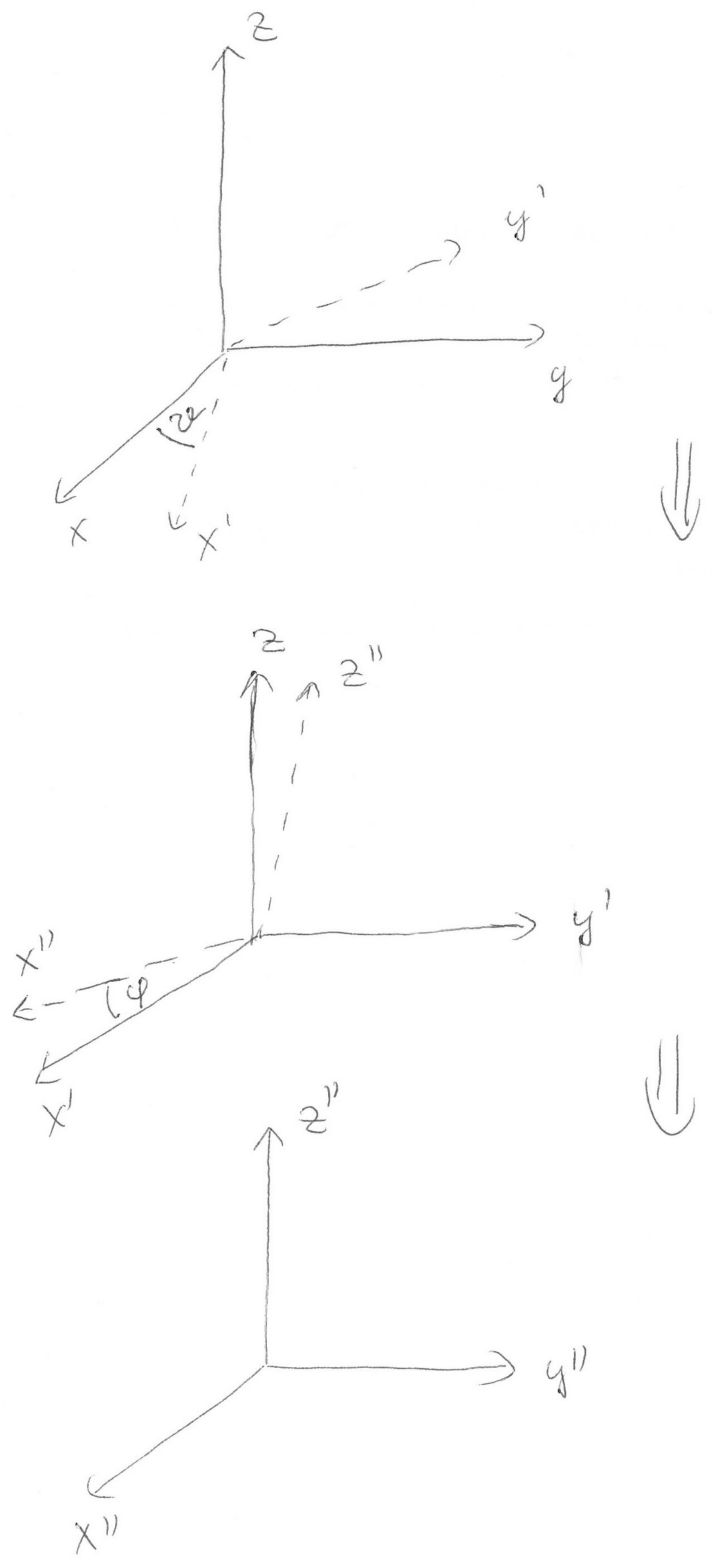
Az előző forgatás után kapott y' tengely helyzete változatlan marad. Az új (x', y', z') koordináta-rendszerbe átvivő forgatás mátrixa:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2.$$

Két vektor ($\mathbf{g} \cdot \mathbf{h}$) szorzata az új rendszerben:

$$\mathbf{g'h'} = \mathbf{Ag} \cdot \mathbf{Ah}.$$

Természetesen ugyanannak a két vektornak a szorzatáról van szó, csak más lesz a vektorok reprezentációja. Hasonló módon adhatjuk meg vektorok számmal (skalárral) való szorzatát, vagy két vektor diadikus, illetve vektorszorzatát az új, elforgatott rendszerben. E transzformációknak a szennyezőanyag-terjedés modellezésében, továbbá a mikrometeorológiában a turbulens áramok meghatározásában lesz jelentősége.



6. ábra. 3D koordináta-rendszer forgatás.

VII.6.2. Az áramlási mező ábrázolása

E fejezetben elsőként az áramvonal és a trajektória fogalmával ismerkedünk meg, majd az elemi áramvonal-szerkezetekkel foglalkozunk

VII.6.2.1. Az áramlási mező ábrázolása

A légköri folyamatok leírásának két alapvető eszköze – ahogyan korábban már láttuk – az Euler- és a Lagrange-féle szemléletmód. Az áramvonal az elsőt, a trajektória (vagy légpálya) a másodikat jellemzi (7. ábra).

Az *áramvonal* az a görbe, amelynek az érintője minden pontban párhuzamos az adott t_0 időpillanatban ott uralkodó áramlási sebességgel. Más megfogalmazásban a mozgás minden időpillanatban az áramvonalak mentén történik. Természetesen egy áramvonal mentén változhat a sebesség nagysága. Az áramvonalak egy pontba is futhatnak, illetve egy pontból szétágazhatnak, pl. konvergencia vagy divergencia esetén.

Trajektóriának (légpályának) nevezzük azt a görbét, amelyet egy adott levegőelem a mozgása során leír, tehát nem egy adott t_0 időpontra vonatkozik.

Az áramlási mezőt ábrázoló két karakterisztika csak akkor esik egybe, ha az áramlás stacionárius (adott helyen a sebesség időben állandó).

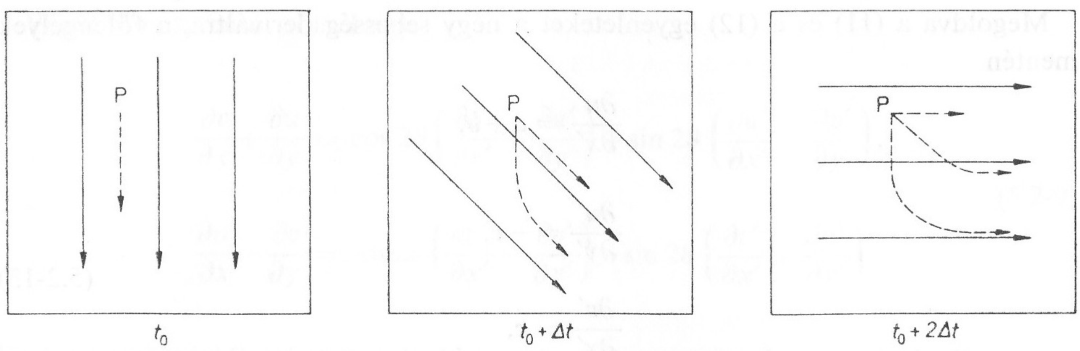
Kétdimenziós esetben az áramvonal differenciálegyenlete:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{v(x,y,t_0)}{u(x,y,t_0)}.$$

Természetesen az adott pontból induló trajektória (v. trajektóriák) meghatározásához ismerni kell a sebességi mezőt. Kiindulási egyenletünk, aminek az integrálásával kapjuk a légpályát:

$$\mathrm{d}x = u(x,y,t)\cdot\mathrm{d}t, \qquad \mathrm{d}y = v(x,y,t)\cdot\mathrm{d}t.$$

Megkülönböztetünk beérkező (backward), és előrehaladó (forward) légpályát. Az első esetben azt kérdezzük, hogy a vizsgált légrész honnan érkezett, milyen utat járt be, míg a második esetben azt vizsgálunk (jelezzük előre), hogy hová tart.



7. ábra Az áramfüggvény és a trajektória (légpálya) sematikus képe.

VII.6.2.2. Egyszerű áramvonal-szerkezetek

Nézzük meg a lineáris sebességi mezőben ($t = t_0$ időpontban) az egyszerű, elemi áramvonal-szerkezeteket (8. ábra)! Négy ilyet találunk.

Transzláció: az áramlási mezőben a sebesség állandó

$$u = u(x, y, t_0) = u_0, \quad v = v(x, y, t_0) = v_0 .$$

Az áramvonal differenciálegyenlete:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{v_0}{u_0} .$$

A fenti egyenlet közvetlenül integrálható, s a kezdeti feltételek ismeretében – a kiindulási pontban (x_0, y_0) a szélsebesség értéke $(u_0 = u(x_0, y_0), v_0 = v(x_0, y_0))$ megadható a keresett áramvonal.

$$y = \frac{v_0}{u_0} x + \mathrm{const} .$$

Ez az egyenlet az azonos v_0 / u_0 meredekségű egyenesek seregét reprezentálja.

Divergencia: ha az áramlási mezőben csak tiszta divergencia van – lásd a lineáris sebességi mező felbontását – akkor

$$u = bx, \quad v = by .$$

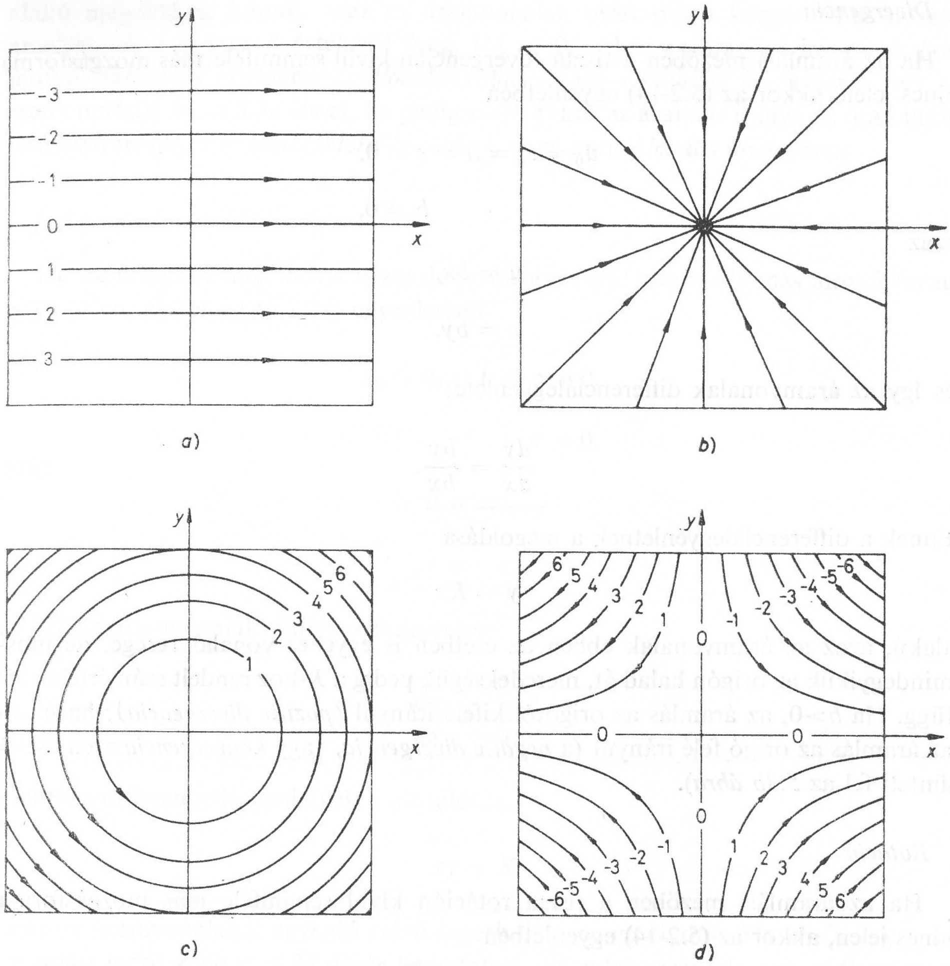
Az áramvonalak differenciálegyenlete:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x} .$$

A differenciálegyenlet megoldása az

$$y = \mathrm{const} \cdot x$$

alakú áramvonal sereg, ahol minden vonal az origón halad át (nincs transzláció). Meredekségük a konstanshoz rendelt számértéktől függ. Ha $b > 0$, akkor az áramlás az origótól kifele irányul (a divergencia pozitív értékű); ha $b < 0$, akkor az áramlás az origó felé irányul (a konvergencia negatív értékű).



8. ábra. Elemi áramvonal-szerkezetek: transzláció, divergencia, rotáció (örvényesség) és deformáció.

Rotáció: ha az áramlási mezőben a tiszta (merevtestszerű) forgáson kívül semmiféle más mozgásforma nincs jelen, akkor:

$u = -cy$, $v = cx$.

Az áramvonalak differenciálegyenlete:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{-y}.$$

Integrálás után az

$$x^2 + y^2 = \mathrm{const}$$

alakú megoldáshoz jutunk, azaz az áramvonalak a const értékétől függő origó középpontú körök. Ha $c > 0$, akkor az áramlás iránya az óramutató járásával ellentétes (ciklonális forgású), ha $c < 0$, akkor az az óramutató járásával megegyező – anticiklonális forgási irányú az északi féltekén.

Deformáció: ha az áramlási mezőben tiszta deformáció van, vagyis nincs transzláció, divergencia és rotáció, akkor

$$u = ax, \quad v = -ay.$$

Az áramvonalak differenciálegyenlete:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{-y}{x},$$

melynek a megoldása

$$x \cdot y = \mathrm{const}.$$

Az áramvonalakat egyenlőszárú hiperbolák serege alkotja. Az x tengelyt dilatációs tengelynek, az y tengelyt kontrakciós tengelynek szokás nevezni. Meteorológiában ez a tipikus nyeregfelület, amelyben az 1. és a 3. síknegyedben helyezkedik el az alacsony, míg a 2. és a 4. síknegyedben a magasnyomású légköri képződmény centruma.

VII.6.2.3. Divergencia- és rotációmentes áramlások

Korábban a Helmholtz-tétel kapcsán beláttuk, hogy minden vektormező – így az áramlási tér is – felbontható egy divergencia- és egy rotációmentes vektortér összegére.

A divergenciamentes áramlást az áramfüggvény jellemzi. Ez az (x, y) síkban történő áramlás esetén a síkra merőleges z irányba mutató vektor. Így kétdimenziós esetben – tudva a térbeli helyzetét – egy skalárral $\Psi(x, y)$ jellemezzük:

$$u = k\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -k\frac{\partial \Psi}{\partial x},$$

ahol a k konstans értéket szabadon választhatjuk. Legyen az egyszerűség kedvéért $k = 1$. Az áramvonalak differenciálegyenlete:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\partial \Psi / \partial x}{\partial \Psi / \partial y},$$

illetve

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y}dy = 0.$$

A divergenciamentes áramlásban az áramvonalak egyenlete $\Psi(x, y) = \mathrm{const}$. Ez tetszőleges futású görbét jelenthet azzal a megkötéssel, hogy a függvényérték nem változhat egy-egy izovonal mentén. Az áramvonalak nem találkoznak, és nem futhatnak össze egyik pontban sem.

Rotációmentes áramlás esetén a skalár sebességpotenciált hívjuk segítségül az áramlási mező leírásához. Az u és v sebességkomponensek – hasonlóan az előző esethez – szintén nem függetlenek egymástól:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Az áramvonalak egyenlete:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\partial \varphi / \partial y}{\partial \varphi / \partial x}.$$

Ha az áramlás rotáció- és divergenciamentes, ami nem jelenti azt, hogy ne legyen benne pl. transzláció, vagy deformáció, akkor teljesül, hogy

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \Delta \Psi = 0,$$

illetve

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \Delta \varphi = 0.$$

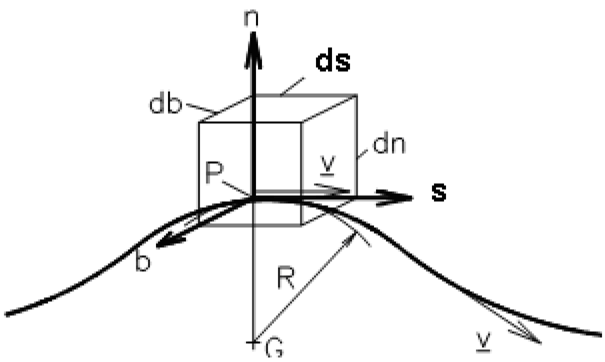
Megjegyezzük, hogy nem minden egyenes vonalú mozgás rotációmentes, pl.: $u = u(y)$, illetve létezik olyan körmozgás, ami rotációmentes mezőt definiál. Tekintsük például a következő áramvonalrendszert:

$$\varphi = \pm \mathrm{arctg}(x / y).$$

A szinoptikus meteorológiában tárgyalásra kerülő áramlási rendszereket e négy invariáns mező felhasználásával építhetjük fel, hiszen tiszta formában egyikük sem jelenik meg.

VII.7. A természetes koordináta-rendszer

A természetes koordináta-rendszer (ortogonális, görbevonalú) a tér adott P pontjában az ottani áramvonal segítségével adható meg (9. ábra). Az $\mathbf{s}$ koordináta-tengely az áramvonal érintője. Az $\mathbf{n}$ normális irányú koordináta-tengely a P pontot az áramvonal G görbületi középpontjával összekötő egyenesbe esik. A $\mathbf{b}$ binormális koordináta pedig az $\mathbf{s}$ és $\mathbf{n}$ koordinátákkal jobbsodrású rendszert alkot.



9. ábra. Áramvonalon mozgó elemi folyadékrész. (Lajos T. Áramlástan alapjai c. könyvből)

A lineáris sebességi mező invariánsait is egyszerűen szemléltethetjük ebben a rendszerben. Nézzük a kétdimenziós esetet!

Válasszuk az $\mathbf{s}$ tengelyt az áramvonal mentén, míg az $\mathbf{n}$ tengelyt arra merőlegesen. Az áramvonal menti sebességet jelölje V, az erre merőleges irányban a sebesség természetesen nulla. A kétdimenziós áramlási mezőben könnyen átírhatjuk az egyes deriváltakat (10. ábra), illetve ezek felhasználásával az invariáns mennyiségeket.

Teljesül, hogy:

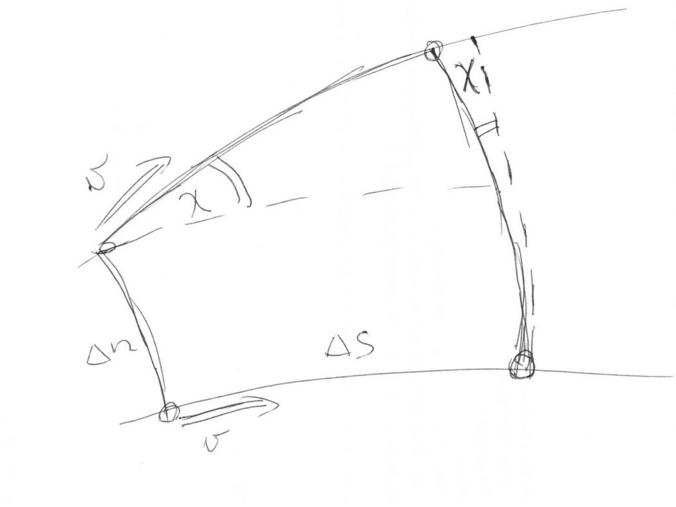
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial s}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial n}, \quad \frac{\partial v}{\partial x}=v\frac{\partial \chi}{\partial s}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}=v\frac{\partial \chi}{\partial n},$$

ahol χ az áramvonalak mentén, illetve az áramvonalakra merőleges irányban haladva az elemi felület megfelelő oldalpárja által bezárt szög.

Könnyen felírhatjuk a lineáris sebességi mező összetevőit is az új (s, n) természetes koordináta-rendszerben:

$$\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}=2a=\frac{\partial V}{\partial s}-V\frac{\partial \chi}{\partial n}, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=2b=\frac{\partial V}{\partial s}+V\frac{\partial \chi}{\partial n},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=2c=-\frac{\partial V}{\partial n}+V\frac{\partial \chi}{\partial s}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=2d=\frac{\partial V}{\partial n}+V\frac{\partial \chi}{\partial s}.$$



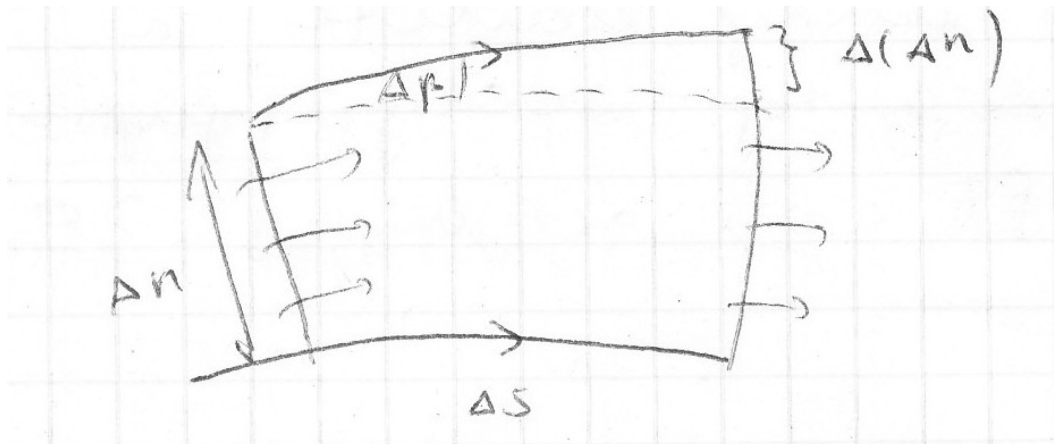
10. ábra. Az elemi deriváltak szemléltetése a 2D természetes koordináta-rendszerben.

VII.7.1. A divergencia és az örvényesség természetes koordináta-rendszerben

Nézzük meg a divergencia és az örvényesség szemléletes jelentését és meghatározását természetes koordináta-rendszerben az invariánsok integrál-előállítása alapján (11. és 12. ábra). Kihasználjuk, hogy a sebesség párhuzamos az áramvonalakkal. Tekintsünk két egymáshoz közeli áramvonalat. Nézzük a $\Delta F = \Delta s \Delta n$ elemi felületet a természetes koordináta-rendszerben.

A *divergencia* invariáns definíciója szerint (11. ábra):

$$\mathrm{div}\mathbf{v} = \lim_{\Delta F \to 0} \frac{1}{\Delta F} \oint_{\Delta G} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{n} = \lim_{\Delta F \to 0} \frac{1}{\Delta s \Delta n} \left(- \Delta n v + (\Delta n + \Delta(\Delta n)) \cdot (v + \Delta v) \right)$$



11. ábra. A divergencia meghatározása természetes koordináta-rendszerben.

Kihasználva, hogy $\Delta n > \Delta(\Delta n)$ és $v > \Delta v$, továbbá a másodrendben kis tag ($\Delta(\Delta n)\cdot\Delta v$) elhanyagolása után, tudva, hogy $\Delta(\Delta n) = \Delta s \cdot \Delta\chi$:

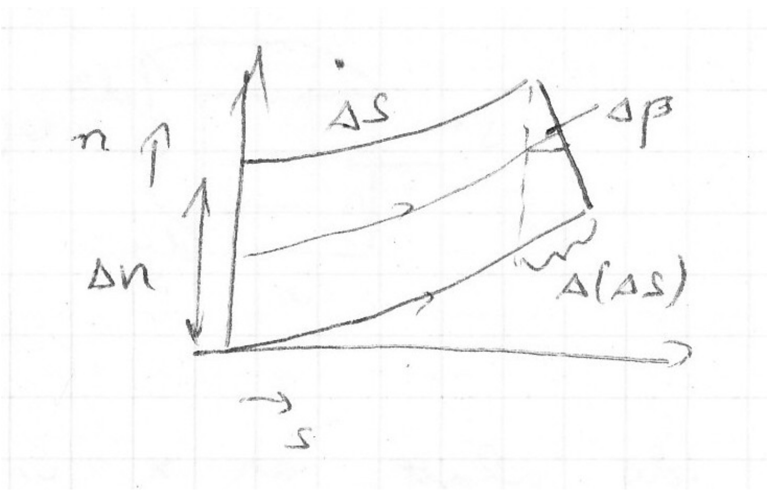
$$\operatorname{div}\mathbf{v} = \lim_{\Delta F\to 0}\frac{1}{\Delta s\cdot\Delta n}\Delta s\cdot\Delta n\cdot\left(\frac{\Delta v}{\Delta s}+v\frac{\Delta\chi}{\Delta n}\right)=\frac{\partial v}{\partial s}+v\frac{\partial\chi}{\partial n}$$

Az örvényesség invariáns előállítása szerint (12. ábra):

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{k} = \zeta = \lim_{\Delta F\to 0}\frac{1}{\Delta F}\oint_{\Delta G}\mathbf{ds}\times\mathbf{v} = \lim_{\Delta F\to 0}\frac{1}{\Delta s\Delta n}\left(v\Delta s - (\Delta s+\Delta(\Delta s))\cdot(v+\Delta v)\right) .$$

A másodrendben kis tag elhagyása után, kihasználva, hogy $\Delta(\Delta s) = -\Delta n\cdot\Delta\chi$, ahol a negatív előjel azt jelenti, hogy pozitív szögelfordulás esetén csökken az ívhossz:

$$\zeta = \lim_{\Delta F\to 0}\frac{1}{\Delta s\cdot\Delta n}\left(-\Delta s\cdot\Delta v - v\cdot\Delta(\Delta s)\right) = \lim_{\Delta F\to 0}\frac{1}{\Delta s\cdot\Delta n}\cdot\Delta s\cdot\Delta n\cdot\left(-\frac{\Delta v}{\Delta n}+v\frac{\Delta\chi}{\Delta s}\right) = -\frac{\partial v}{\partial n}+v\frac{\partial\chi}{\partial s} .$$



12. ábra. Az örvényesség meghatározása természetes koordináta-rendszerben.