

XII. A légköri folyamatok nagyságrendi analízise

XII.1. A légköri folyamatok tér- és időskálája.....	2
XII.2. Nagyságrendi analízis.....	5
XII.3. A mozgásegyenletek nagyságrendi analízise szinoptikus skálán.....	6
XII.3.1. Átlagok és fluktuációk.....	7
XII.3.2. A hidrosztatikai egyensúly.....	10
XII.3.3. A Navier–Stokes-egyenletek nagyságrendi analízise.....	12
XII.3.4. Hasonlósági kritériumok, az áramlások hasonlósága.....	13

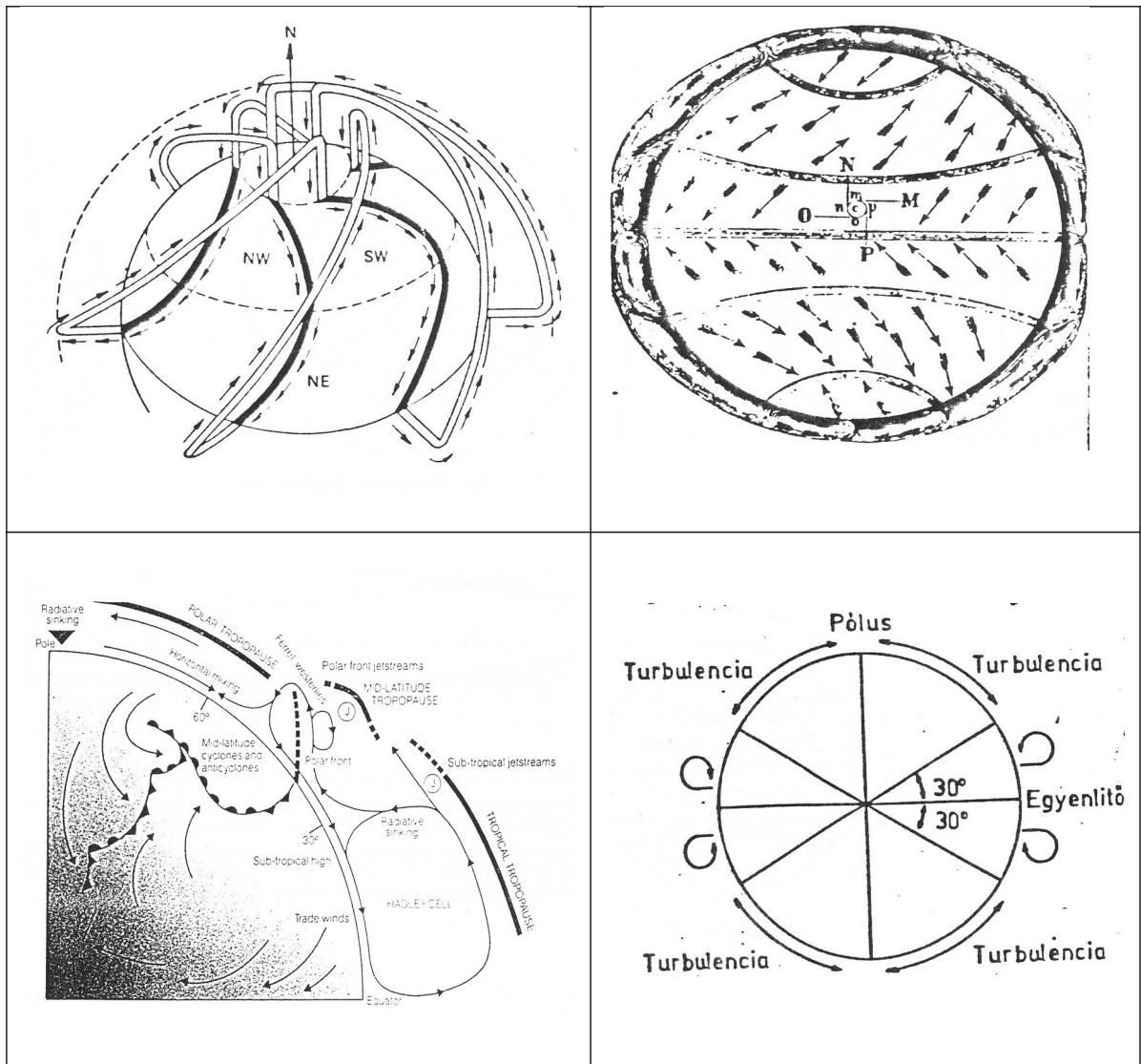
Az egész Földre kiterjedő légköri áramlási rendszerek együttese az általános légkörzés. E rendszer megismerése a XVIII. század első felében megkonstruált egycellás cirkulációs modellektől a háromcellás cirkulációs modelleken át a polárfront elméletig, Rossby és Smagorisky általános cirkulációs modelljéig terjed (1-2. ábra). Mára részletesen ismerjük a légköri energiaciklust, s a kapcsolt légkör-óceán modellekkel tanulmányozzuk az éghajlat lehetséges változásait.

A trópusi és szubtrópusi területeken a horizontális tengelyű Hadley-cella a meghatározó. Ennek évszakos változása alakítja a passzát szélrendszert (kereskedelmi szelek). E rendszerben fejlődik a déli oszcilláció (az ENSO jelenségkör) és jelenik meg a monszun cirkuláció jellegzetes évi menete. A mérsékelt és a magas szélességeken a zonális alapáramlásra helyeződő, a Rossby-hullámokban kifejlődő vertikális tengelyű örvények alakítják az időjárást, biztosítják a tulajdonságok (tömeg, hő, nedvesség, impulzusmomentum) szállítását az alacsony és a magas szélességek között.

A nagyskálájú légköri folyamatok fejlődésében a horizontális instabilitás (barotróp, baroklin) a meghatározó. A barotróp instabilitást a horizontális, a baroklin instabilitást a vertikális szélnyírás kormányozza. A ciklonokban fejlődő frontálzónákat a Rossby-hullámok a mezoskálájú folyamatok, a fázisátalakulásból származó latens hő, s az ennek következményeként fejlődő konvekció alakítja. Ez a ferde instabilitás. Ahogy haladunk a kisebb skálájú folyamatok felé - a vonalba rendezett zivataroktól (squall line) a szupercellákon át a kis széllökésekig, turbulens örvényekig – egyre inkább a vertikális instabilitás, illetve a lokális hatások válnak meghatározóvá a légköri folyamatok fejlődésében.

Elsőként arra a kérdésre keressük a választ, hogy miért alakulnak ki jellegzetes tér- és időskálák. Ezt követően megismerkedünk a meteorológiai állapothatározók és a legfontosabb deriváltak karakterisztikus értékeivel az egyes méretskálákon, majd a légköri állapotjelzők átlagolásával foglalkozunk. Ezt követi a skálaanalízis kérdése. Azt vizsgáljuk, hogy mi a feltétele annak, hogy két jelenség, két folyamat egymáshoz hasonló legyen. Röviden áttekintjük a légköri folyamatok leírásában használt hasonlósági mérőszámokat is.

--	--



1. ábra. Az általános cirkulációs modellek fejlődése. (Hadley (1735) cirkulációs modellje, W. Ferrel (1856) első háromcellás cirkulációs sémája (fent). Az általános cirkuláció sémája, a polárfront és a jetek elhelyezkedése, valamint Panofsky (1956) szemléletes modellje (lent) a Hadley-cirkulációs celláról, illetve a mérsékelt és magas szélességek nagyskálájú vertikális tengelyű örvényeiről (turbulens mozgások).)

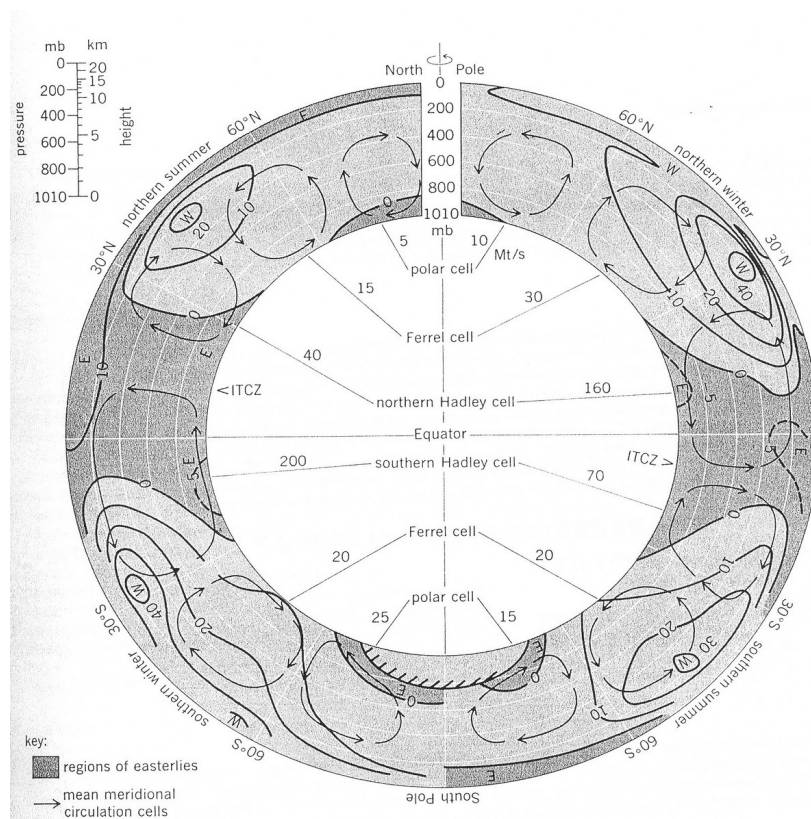
XII.1. A légköri folyamatok tér- és időskálája

A légköri folyamatok a molekuláris mozgásoktól az általános légközés mozgásrendszeréig terjednek. A mérettartomány folytonos. Vannak azonban olyan mozgásrendszerek (a mozgásmezők belsőleg szervezett, tartós, vagy időszakos képződményei), amelyek kitüntetett szerepet kapnak. Más szavakkal a légköri folyamatok kinetikus energiaspektrumában (I. fejezet, 8. ábra) három jól elkülöníthető lokális maximumot találunk, ami megfelel egy-egy folyamatosztálynak, egy-egy jelenségkörnek. A legkisebb tartomány a határrétegben lezajló folyamatokat adja meg (ezzel foglalkozik a határréteg-meteorológia), ezt követi a nagyskálájú folyamatok rendszere (ez a klasszikus dinamikus meteorológia tárgyköre), majd az általános légközés mozgásrendszerei

következnek. Ez a klímadinamika tárgya. A három időskála egymáshoz viszonyított aránya 1: 10²: 10⁴. Ebben az értelemben beszélünk makro-, vagy éghajlati skáláról, szinoptikus és mezoskáláról és a mikroskálájú folyamatokról. Természetesen ezt a durva osztályozást finomítani lehet, ha nagyságrendként haladunk a térskálán. Ezt a munkát végezte el Orlanski 1975-ben. Minden tartományban találunk jellegzetes meteorológiai folyamatokat (3. ábra, 1. táblázat).

Nézzük meg a fő okokat, hogy miért nem alkotnak folyamatos spektrumot a légköri mozgásrendszerek. Miért nincsenek 10 000, vagy 10 km-es mérsékeltövi ciklonok, miért nem élnek egy napig a zivatarok, s sorolhatnánk még az ehhez hasonló kérdéseket.

Vannak olyan jól elkülöníthető – karakterisztikus tér- és időskálával rendelkező – hatások, amelyek miatt jogosnak tekinthetjük a légköri folyamatok tér- és időbeli elkülönítését. Ehhez tartozik még az általános légkörzés korszerű elméletében megfogalmazott hatékonyság elve, miszerint a különböző mozgásrendszerek (legyen szó az általános cirkulációról vagy egy kis turbulens örvényről) olyan mozgásformákhoz adaptálódnak, amelyek a leghatékonyabban szállítják az energiát, az impulzusmomentumot, a levegő tömegét, a nedvességet stb. horizontálisan és vertikálisan. Ez egybevág a legkisebb hatás elvével, amely szerint egy elmozduló légrézre ható erők arra törekednek, hogy kompenzálják egymást, vagyis egyensúlyi áramlások alakuljanak ki. Ez a Le Chatelier-elv, amit eredetileg kémiai rendszerekre mondott ki 1884-ben *Le Chatelier, Henry-Louis* (1850–1936), francia vegyész.

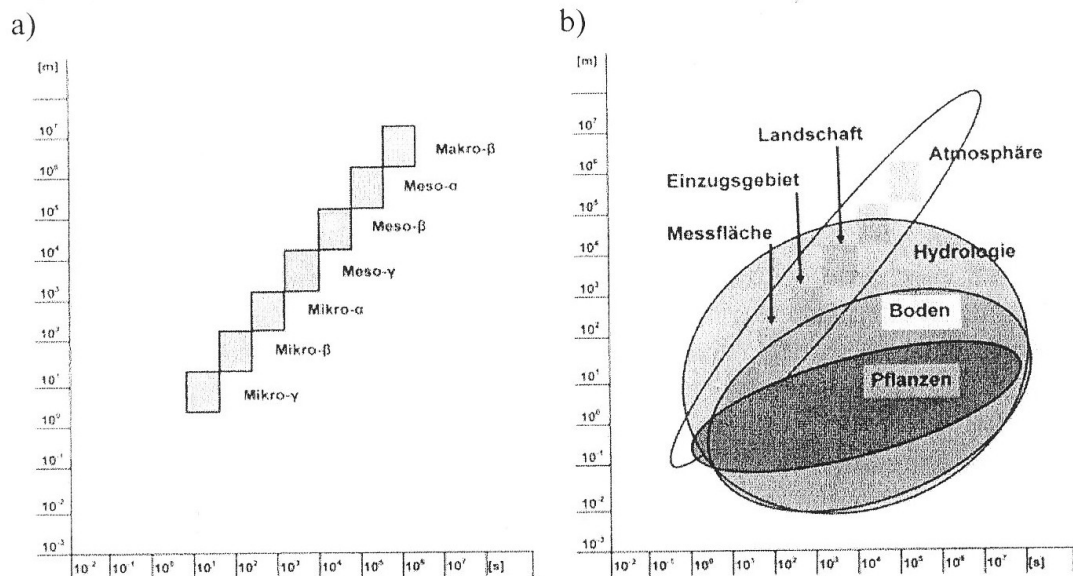


2. ábra. Az általános cirkuláció sematikus képe, az egyes cirkulációs cellák tömegszállítása.

Vegyük sorra a légköri mozgásrendszereket alakító hatásokat!

- Ide tartoznak a Föld pályaelemei, Nap körüli forgása és tengelydőlése, ami az éves és évszakos változásokat okozza, illetve a tengely körüli forgása, ami a napi menetért felelős.
- A Föld mérete, a légkör összetétele és szerkezete, a Naptól jövő sugárzás eloszlása a Föld-légkör rendszer külső határán és a felszínen, a földforgás szögsebessége együttesen olyan feltételeket alakít ki, ami bizonyos örvényméreteknél kedvez, másokat viszont elfolyt. A tehetetlenségi vagy Rossby-hullámok fejlődése, karakterisztikus mérete és ideje is jól meghatározott.
- A különböző hőmérsékletű és sűrűségű légtömegek határfelületein kialakuló hullámmozgások (vagy külső gravitációs hullámok) – a vízfelszín hullámjaihoz hasonlóan – adott hullámhossztartományban stabilizálódnak, amelyek többek között a sűrűségkülönbségtől, az áramló közeg sebességétől és a nyíróerőktől függenek. Gondoljunk csak a frontfelületeken, a tropopauza térségében vagy a stabil éjszakai határréteg tetején kialakuló gravitációs hullámokra.
- A felszín alakja, az óceánok és a szárazföldek elhelyezkedése, a domborzat (hegységek) szerkezete, a felszín borítottsága (jég, víz, alacsony, vagy magas vegetáció, település, stb.) a talaj-bioszféra-légkör kölcsönhatások rendszere szintén meghatározott mozgástípusokat hoz létre a mikroskálától a globális léptékig. A felszín és az éghajlat kölcsönhatásban állnak, egymást alakítják.
- A légköri mozgásrendszerek mérete és ezen keresztül a mozgások geometriája szoros kapcsolatban van a mozgásokat létrehozó erők nagyságával. A légköri mozgásrendszerek kialakulását és fejlődését a különböző skálájú instabilitások kormányozzák. A mozgásrendszerek fejlődését úgy képzelhetjük el, hogy az adott méretskálán nő a rendszer kinetikus energiája, ami a potenciális energiából (pontosabban a rendelkezésre álló potenciális energiából), illetve a nagyobb skálájú folyamatok lebomlásából (disszipáció) származó kinetikus energiából származik. Ha egy mozgásrendszer a kisebb skálák felől kap energiát, akkor negatív viszkozitásról beszélünk (pl. a konvekció szerepe a szinoptikus skálájú folyamatok fejlődésében).

A légköri mozgásrendszerek nagyságrendi analízisét Orlanski 1975-ben publikált skálája alapján szemléltetjük (3.a. ábra). Éves, évszakos és napszakos változások, illetve a skálafüggő légköri folyamatok hatása más – a légkörrel kölcsönhatásban lévő – szférákban is megfigyelhető. Erre két példát mutatunk. Az óceán felső keveredési rétegének fizikai és ökológiai folyamatainak tér- és időskáláját (4. ábra), valamint a tájleptékű hidrológiai, a lokális vízgyűjtőre vonatkozó talajtani továbbá egy adott termőhelyre vonatkozó növényökológiai változások tér- és időbeli dinamikáját (3.b. ábra). Ezek a hatások természetesen nem egyirányúak. Vannak tehát légköri hatások, s az erre adott válaszként fejlődő légköri mozgásrendszerek, óceáni, hidrológiai, talajtani és növényökológiai folyamatok.



3. ábra. A légköri folyamatok jellegzetes tér- és időskálái Orlanski (1975) alapján (a). A tájléptékű hidrológiai, a kis vízgyűjtőkre vonatkozó talajtani és a termőhelyi növényökológiai folyamatok tartománya (b) Foken (2006) alapján.

XII.2. Nagyságrendi analízis

Vizsgáljuk meg a különböző skálák főbb sajátosságait az 1. és a 2. táblázat alapján. Logaritmus skálán dolgozunk. Az egyes intervallumokat úgy állapították meg, hogy az intervallumok közepe a 10 m, illetve 10 s egész hatványai legyenek. Ezért van például 2–20 m-es intervallum a térskálán.

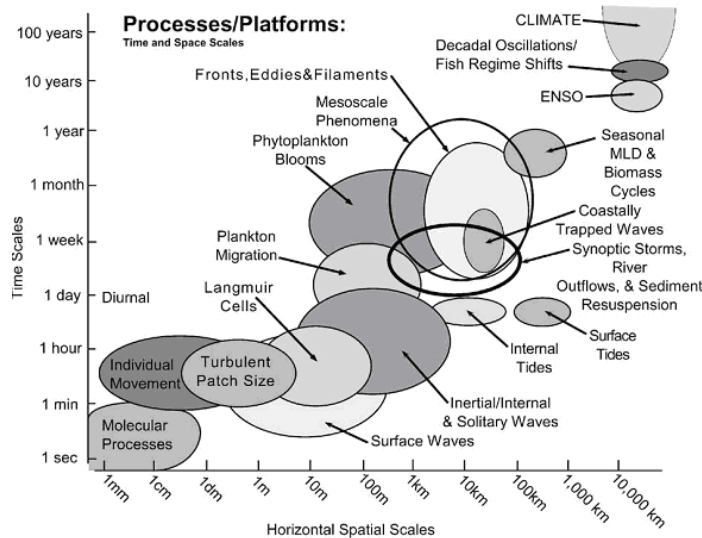
A különböző skálájú folyamatok esetén más és más lehet a meteorológiai állapothatározók és azok deriváltjainak az értéke. A skála választásától függ, hogy a kormányzó egyenletekben mely tagok válnak fontossá, illetve melyeket hanyagolhatjuk el. Nézzük meg a legfontosabb skálaparamétereket!

V -vel jelöljük a horizontális sebesség, W -vel a vertikális sebesség nagyságrendjét. A folyamatok horizontális méretét L -l, vertikális kiterjedését D -vel jelöljük. A troposzférában lezajló folyamatokat elemezzük. A mezoskálájú vagy annál nagyobb mozgásrendszereknél a vertikális kiterjedés a troposféra vastagsága, míg a mikroskálájú folyamatoknál a határréteg vastagsága, vagy az alatt az örvénytestek karakterisztikus mérete egészen a molekuláris viszkozitásig. A városi hatások vagy a cumulus konvekció (mezoskála alsó szélé) néhány km-es vertikális kiterjedésű. A mikroskálájú folyamatok háromdimenziósak. Ahogy haladunk a szinoptikus és a makroskála felé, úgy lesznek a légköri folyamatok kvázi kétdimenziósak.

Megadhatjuk az egyes mozgásrendszerek karakterisztikus élettartamát (T_T). Beszélhetünk az Euler-féle karakterisztikus időről (T_e , vagy τ), ami arról tájékoztat, hogy az L karakterisztikus méretű objektum átlagosan mennyi idő alatt haladt át a mérőhelyen. A Lagrange-féle karakterisztikus idő egy légréteg mozgását követve megadja, hogy az mennyi idő alatt halad át a mozgásrendszeren, vagy tér vissza a kiindulási hely közelébe. Hullámszerű folyamatoknál, mint pl. a hegy mögött kialakuló lee-hullámok, a periódusidőt jelenti, míg a mikroskálájú turbulens örvényeknél azt az „eltolási időt”, amelynek elteltével

a tér adott helyéről elsodródó légtest már „nem emlékszik” a kiindulási állapotára.

A horizontális (V) és a vertikális (W) sebesség és megváltozásuk azonos nagyságrendű. Ha a folyamat karakterisztikus vertikális kiterjedése a troposféra, akkor a függőleges nyomás- és sűrűségváltozás megegyezik azok nagyságrendjével.



4. ábra. Az óceáni keveredési réteg fizikai folyamatainak és plankton dinamikájának jellegzetes tér és időskálái. Dickey (2002) alapján.

XII.3. A mozgásegyenletek nagyságrendi analízise szinoptikus skálán

A dinamikus meteorológiában meghatározó szerepe van a nagyskálájú (szinoptikus, vagy mezo- α skálájú) mozgásrendszereknek. A legáltalánosabb – szférikus rendszerben felírt – egyenletek alapján elemezzük az egyes erőhatások szerepét.

Foglalkozunk az átlagolás kérdésével. Megmutatjuk, hogy statikus légkörben a nyomás- és sűrűségfluktuációk is statikus egyensúlyban vannak. Külön tárgyalható a légkör horizontális és a vertikális szerkezete, illetve a horizontális és a vertikális instabilitás kérdése. A nyomási mező horizontális szerkezete alakítja az áramlási mezőt. Hidrosztatikus légkörben a vertikális sebességi mező nem számítható közvetlenül a harmadik mozgásegyenletből. Indirekt módon kell levezetni a kontinuitási egyenletből.

T_s L_s	1 MONTH $(\beta L)^{-1}$	1 DAY $(f)^{-1}$	1 HOUR $(\frac{g}{\theta} \frac{d\theta}{dz})^{-1}$	MINUTE $(\frac{g}{H})^{-1/2}; (\frac{L}{U})$	1 SEC	
10,000 Km	STANDING WAVES	ULTRA-LONG WAVES	TIDAL WAVES			MACRO α SCALE
2,000 Km		BAROCLINIC WAVES				MACRO β SCALE
200 Km		FRONTS & HURRICANES				MESO α SCALE
20 Km			NOCTURNAL LOW LEVEL JET SQUALL LINES INERTIAL WAVES CLOUD CLUSTERS MTN. & LAKE DISTURBANCES			MESO β SCALE
2 Km			THUNDERSTORMS I.G.W. C.A.T. URBAN EFFECTS			MESO γ SCALE
200 m				TORNADOES DEEP CONVECTION SHORT GRAVITY WAVES		MICRO α SCALE
20 m				DUST DEVILS THERMALS WAKES		MICRO β SCALE
					PLUMES ROUGHNESS TURBULENCE	MICRO γ SCALE
	C.A.S. CLIMATOLOGICAL SCALE	SYNOPTIC PLANETARY SCALE	MESO SCALE	MICRO-SCALE		PROPOSED DEFINITION

1. táblázat. A légköri mozgásrendszerek jellegzetes tér- és időskálái (Orlanski, 1975; Stull, 1988 és Czelnai, 1995 alapján).

XII.3.1. Átlagok és fluktuációk

A légköri hidro-termodinamikai egyenletrendszer általános érvényű, az áramló közeg bármely pontjában, bármely időpontban teljesül. A meteorológiai mérések és az időjárás előrejelzések térben és időben átlagolt mennyiségekre vonatkoznak. Gondoljunk csak a hőmérőházban végzett hőmérséklet- és nedvességmérésre, vagy a standard meteorológiai szélmérésre, ami 10 m magasan és 10 perces átlagértékekre vonatkozik. Amikor egy meteorológiai rácshálózaton számolunk, szintén tér-és időbeli átlagokkal foglalkozunk. A turbulenciát pedig az átlagos mozgástól, pontosabban a várható értéktől vett eltérésként értelmezhetjük.

Karakterisztikus értékek	Jelölés, mértékegység	Méretskála			
		Makro- β	Mezo- α	Mezo- β, γ	Mikro
Élettartam	T_T	10^6-10^9	10^6		
Horizontális kiterjedés	L [m]	$1 - 2 \cdot 10^7$	$1 - 5 \cdot 10^6$	$10^4 - 10^5$	$10^{-2} - 10^2$
Vertikális kiterjedés	D [m]	$1 - 2 \cdot 10^4$	$1 - 2 \cdot 10^4$	$0,5 - 1 \cdot 10^4$	$10^{-2} - 10^2$
Horizontális sebesség	V [m s ⁻¹]	10 - 40	10 - 40	10 - 20	1 - 5
Vertikális sebesség	W [m s ⁻¹]	10^{-2}	$1 - 5 \cdot 10^{-2}$	$10^{-2} - 10$	$10^{-2} - 1$
Horizontális és lokális* Változások					
Horizontális sebesség	$\Delta V _{x,y,t} = V$	10 - 40	10 - 40	10 - 20	1 - 5
Vertikális sebesség	$\Delta W _{x,y,t} = W$	10^{-2}	$1 - 5 \cdot 10^{-2}$	$10^{-2} - 10$	$10^{-2} - 1$
Nyomás	$\Delta p _{x,y,t}$ [Pa]	$2 - 5 \cdot 10^3$	$1 - 3 \cdot 10^3$	$1 - 3 \cdot 10^2$	0,1 - 10
Hőmérséklet	$\Delta T _{x,y,t}$ [K]	10-20	10-20	5-10	0,1-1
Sűrűség	$\Delta \rho _{x,y,t}$ [kg m ⁻³]	0,01	0,01	0,01	0,01
Coriolis-paraméter	$\Delta f _{x,t}$ [s ⁻¹]	0	0	0	0
	$\Delta f _y$ [s ⁻¹]	$10^{-5}-10^{-4}$	10^{-5}	$10^{-6}-10^{-7}$	~0
Vertikális változások					
Horizontális sebesség	$\Delta V _{x,y,t} = V$	10 - 40	10 - 40	10 - 20	1 - 5
Vertikális sebesség	$\Delta W _{x,y,t} = W$	10^{-2}	$1 - 5 \cdot 10^{-2}$	$10^{-2} - 10$	$10^{-2} - 1$
Nyomás	$\Delta p _z$ [Pa]	10^5	10^5	$1 - 0,5 \cdot 10^5$	$0,1 - 10^4$
Hőmérséklet	$\Delta T _z$ [K]	50-100	50	25-50	< 20
Sűrűség	$\Delta \rho _z$ [kg m ⁻³]	1	1	0,5-1	< 0,1
Coriolis-paraméter	$\Delta f _z$ [s ⁻¹]	0	0	0	0

2. táblázat. Meteorológia állapothatározók és változásaik karakterisztikus értékei a különböző méretskálákon. * A karakterisztikus Euler-féle időbeli változás a $T_E = L/V$ hányados alapján becsülhető.

Nézzük a legegyszerűbb ún. Reynolds-féle (1895) átlagolást! Legyen $X(x, y, z, t)$ és $Y(x, y, z, t)$ állapotjelző a tér és az idő folytonos, többszörösen deriválható függvénye. Egy adott térrészben vizsgálódunk különböző időpillanatokban; a gyakorlatban mindig térbeli és időbeli átlagolást végzünk. Megjegyezzük, hogy még a pillanatnyi értékek esetén is – a mérőműszer pontosságától függően egy térrészre és egy időintervallumra (ami lehet akár 1/50 s is) jellemző „átlagos értéket” kapunk. Olyan átlagolási időt kell választani, ahol a turbulens kinetikus energia spektrumának minimuma van, vagyis a karakterisztikus folyamatok nagyságrendje kisebb, mint az átlagolási idő. A 10–30 perces átlagolás optimális, hiszen a felszínközeli rétegben a turbulens örvények

karakterisztikus mérete arányos a felszín feletti magassággal. Az átlagos áramlási sebesség 2–4 m/s, az örvények karakterisztikus (Euler-féle) ideje másodperces nagyságrendű.

Az átlagolást egy matematikai operációnak (az adott térrészre és az adott átlagolási időszakra vonatkozó tér- és időbeli integrálásnak) tekintve az alábbi posztulátumokat tehetjük:

$$A\bar{X} + B\bar{Y} = \overline{AX + BY}, \quad \overline{\bar{X}Y} = \bar{X}\bar{Y}, \quad \frac{\partial \bar{X}}{\partial s} = \overline{\frac{\partial X}{\partial s}},$$

ahol A és B állandók, s adott tér- vagy idő-koordináta ($s \in (x, y, z, t)$). Az X állapotjelző tetszőleges $P(x, y, z)$ pontban és t időpillanatban két mennyiség, az átlagérték (\bar{X}) és az ettől vett eltérés, az ún. fluktuáció (X') összegeként írható fel:

$$X = \bar{X} + X'.$$

A fenti felírásból következik a Reynolds-féle átlagolás negyedik posztulátuma:

$$\bar{X}' = 0,$$

vagyis a fluktuációk átlaga nulla. Így tehát: egy átlagos mennyiség átlaga maga az átlag, tehát egy konstansnak (állandónak), vagy egy átlagolt mennyiségnek már nincs fluktuációja.

$$\bar{\bar{X}} = \bar{X}, \quad \overline{\bar{X}Y} = \bar{X}\bar{Y}, \quad \overline{A\bar{X}} = A\bar{X} = \overline{AX}.$$

Tekintsük az $X = \bar{X} + X'$ és az $Y = \bar{Y} + Y'$ állapothatározókat. A fenti egyenlőségek alapján fennáll, hogy

$$\overline{\bar{X}Y'} = \bar{Y}\bar{X}' = 0.$$

Vizsgáljuk két állapothatározó szorzatát! Ennek átlaga természetesen már nem feltétlenül nulla:

$$\overline{\bar{X}Y} = \overline{(\bar{X} + X')(\bar{Y} + Y')} = \overline{\bar{X}\bar{Y}} + \overline{\bar{X}Y'} + \overline{X'\bar{Y}} + \overline{X'Y'} = \bar{X}\bar{Y} + \overline{X'Y'}.$$

A fenti felírásból következik a második momentumok, vagyis az X és Y változók közötti kovariancia, a szórásnégyzet, illetve a korrelációs függvény alakja is:

$$Kov(X, Y) = Kov(Y, X) = \overline{(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})} = \overline{X'Y'} = \overline{XY} - \bar{X}\bar{Y},$$

$$\sigma_X^2 = \overline{(X - \bar{X})(X - \bar{X})} = \overline{X'X'} = \overline{X^2} - (\bar{X})^2,$$

$$\sigma_Y^2 = \overline{(Y - \bar{Y})(Y - \bar{Y})} = \overline{Y'Y'} = \overline{Y^2} - (\bar{Y})^2,$$

$$Korr(X, Y) = Korr(Y, X) = \frac{Kov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\overline{X'Y'}}{(\overline{X'X'})^{1/2} (\overline{Y'Y'})^{1/2}}.$$

Ez a turbulens áramszámítás alapja. A turbulens örvényekből származó súrlódási erő – ami az átlagos mozgás időbeli változását alakítja – az impulzusáram térbeli deriváltjaival arányos.

Az állapothatározók fenti felbontásánál bonyolultabbak is léteznek. Vizsgáljunk például egy meteorológiai állapotjelzőt, amelynek az időbeli változása tartalmazza mind a nagyskálájú, mind a mezoskálájú, mind a lokális hatásokat. Ekkor a nagyskálájú folyamatokra vonatkozó átlagértékre rakódó fluktuációk tartalmazzák a mezoskálájú és a lokális skálájú perturbációkat.

$$X = \overline{X}|_{\text{nagyskála}} + X'_{\text{mezo- és lokális skálájú perturbáció}} = \overline{X}|_{\text{nagyskála}} + \overline{X}|_{\text{mezoskála}} + X'_{\text{lokális skálájú perturbáció}}$$

Két átlagolási időt vezetünk be: egyet a nagyskálájú, s egyet a mezoskálájú folyamatokra. A fenti definícióval is értelmezhetők a második momentumok (szórásnégyzet, kovariancia) és a korrelációs függvény.

Vannak olyan esetek is, amikor nem alkalmazhatunk egyszerű átlagolást. Gondoljunk pl. az impulzusátlagra. Az impulzus maga is két mennyiség, a sebesség és a tömeg (ill. ha térfogategységet vizsgálunk, akkor a sűrűség) szorzata. Ez úgy fogható fel, mint a sebesség súlyozott átlaga. E kérdéskörrel a turbulenciaelmélet kapcsán foglalkozunk majd.

Ami most fontos a számunkra, hogy a meteorológiai állapotjelzőket felbontottuk egy átlagos érték és egy erre rakódó fluktuáció összegére.

XII.3.2. A hidrosztatikai egyensúly

Tekintsük a térben és időben változó nyomási és sűrűségi mezőt a következő formában:

$$p(x, y, z, t) = \overline{p}(z) + p'(x, y, z, t), \quad \rho(x, y, z, t) = \overline{\rho}(z) + \rho'(x, y, z, t),$$

ahol a nyomás és a sűrűség átlagos értéke csak a magasságtól függ (mély konvekciós közelítés). A vesszős tagok jelölik a fluktuációkat, vagyis a nyomás- és a sűrűségperturbációkat. Az átlagértékekre minden időpillanatban fennáll a sztatika alapegyenlete:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial z} = -g.$$

Ha a légkör nyugalmi állapotban van, akkor $p' = 0$, $\rho' = 0$. Nézzük, hogy milyen kapcsolatban van a nyomás- és a sűrűségperturbáció hidrosztatikus légkörben! Tudjuk, hogy

$$\frac{p'}{p} \ll 1 \text{ és } \frac{\rho'}{\rho} \ll 1,$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial (\overline{p} + p')}{\partial z} - g = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\rho'}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial z} - \frac{\partial p'}{\partial z} \right) = -\frac{1}{\rho} \left(\rho' g - \frac{\partial p'}{\partial z} \right),$$

Vagyis a fluktuációs mezők is hidrosztatikai egyensúlyban vannak. Az átírásnál kihasználtuk az átlagértékekre felírt sztatika alapegyenletét is.

Nézzük meg az állapotegyenletet! Milyen kapcsolat van a termodinamikai állapotjelzők átlagai és fluktuációi között? Az állapotegyenlet diagnosztikai összefüggés, így a hőmérsékleti mező szerkezete is követi a nyomási és a sűrűségi mező szerkezetét, vagyis

$$T(x, y, z, t) = \overline{T}(z) + T'(x, y, z, t).$$

Fennáll az átlagértékekre vonatkozó állapotegyenlet:

$$\frac{\overline{p}}{\overline{\rho}} = R\overline{T}.$$

A fluktuációkra vonatkozó egyenletet az állapotegyenlet logaritmikus alakjának

$$\ln p = \ln R = \ln T + \ln \rho$$

megváltozásából kapjuk, ahol az egyes állapotjelzők változása ($d p, d T, d \rho$) nem más, mint a perturbációs mező, vagyis az adott helyen és időpontban megfigyelhető fluktuáció (p', T', ρ'). Az egyenlet alakja:

$$\frac{p'}{p} = \frac{T'}{T} + \frac{\rho'}{\rho}.$$

A légköri folyamatokat elemezve a makroskálától a mikroskáláig teljesül, hogy $\frac{p'}{p} \ll \frac{T'}{T} \approx \frac{\rho'}{\rho}$. A horizontális nyomási perturbációk szinoptikus skálán sem haladják meg a néhány 10 hPa-t ($p_0 = 1000$ hPa), míg a hőmérsékleti perturbációk 10 K karakterisztikus értékűek ($T_0 = 285$ K). Tehát kapcsolat van a sűrűségi és a hőmérsékleti fluktuáció között.

$$\frac{T'}{T} \approx - \frac{\rho'}{\rho}.$$

A nyomásperturbációra kapott becslésünket a fluktuációkra vonatkozó sztatika alapegyenletéből is levezethetjük. Szinoptikus skálájú mozgások esetén a felszínközeli nyomásperturbáció (δp) karakterisztikus értéke:

$$\frac{\partial p'}{\partial z} \approx \frac{\Delta \rho}{D} \approx \frac{\delta \rho}{H} \approx 10^{-1} \text{ ms}^{-1}, \text{ vagyis } \delta p \approx 10^3 \text{ Pa}$$

ahol D a szinoptikus skála függőleges kiterjedése (a troposzféra vastagsága), illetve H a homogén légkör vastagsága ($H \approx 8$ km) Ez az érték természetesen megegyezik a sűrűségfluktuációk nagyságrendjével:

$$\frac{\rho' g}{\rho} \approx 10^{-1} \text{ ms}^{-1}, \text{ vagyis } \rho' \equiv \delta \rho \approx 10^{-2} \text{ kg m}^{-3}$$

Ismét hangsúlyozzuk, hogy hidrosztatikus közelítés esetén a vertikális sebességet – a kontinuitási egyenletből kiindulva – egy diagnosztikai egyenlet segítségével határozzuk

meg. Ez a kvázisztatikus közelítés, vagyis a vertikális sebességi mező adaptálódik a horizontális sebességi mezőhöz. A szinoptikus folyamatok leírása „megtűri” az adott magassági, illetve nyomási szinten kialakuló áramlási mező vizsgálatát.

XII.3.3. A Navier–Stokes-egyenletek nagyságrendi analízise

A későbbiekben a szinoptikus vagy nagyskálájú mozgásrendszerekkel foglalkozunk, a horizontális áramlások sajátosságait vizsgáljuk. Nézzük meg milyen nagyságrendűek a szférikus koordináta-rendszerben felírt Navier–Stokes-egyenletek egyes tagjai, milyen elhanyagolásokat tehetünk. Természetesen a nagyságrendi analízis csak első közelítésként használható. A légköri hidro-termodinamikai rendszer egyszerűsítéseinél az egyenletek integrális alakjából kiinduló energiakonzisztens becsléseket kell alkalmazni. E kérdéskörrel a későbbiekben a légköri energetika keretében foglalkozunk.

A mérsékelt övben a határrétegben, illetve a szabad légkörben vizsgálódunk. Elhanyagoljuk a molekuláris viszkozitásból származó súrlódási erőt. A tér- és időbeli átlagolás kérdésével nem foglalkozunk, de „kimondatlanul is tudjuk” hogy a mozgások leírása mögött egy tér- és időbeli átlagolás áll. A határrétegben ilyen értelemben vesszük figyelembe a turbulens kicserélődési folyamatokból származó súrlódási erőt (F_s), aminek a nagyságrendje legfeljebb a horizontális síkon ható többi erőével (nyomási gradiens, Coriolis) lesz azonos.

Nézzük meg a nagyskálájú folyamatokra jellemző skálaparamétereket a 2. táblázat felhasználásával:

$$\begin{aligned}
 \Delta x_s &\approx \Delta y_s \approx 10^6 \text{ m}, & \Delta t &\approx 10^5 \text{ s}, \\
 u_s &\approx v_s \approx \Delta u_s \approx \Delta v_s \approx 10 \text{ m s}^{-1}, \\
 \Delta z_s &\approx 10^4 \text{ m}, & w_s &\approx 10^{-2} \text{ m s}^{-1}, & \Delta w_s &\approx 10^{-2} \text{ m s}^{-1}, \\
 p_0 &\approx 10^5 \text{ Pa}, \\
 \Delta p|_{x,y,t} &\approx 10^3 \text{ Pa}, & \Delta p|_z &\approx 10^5 \text{ Pa}, \\
 \varphi &\approx 45^\circ, & f = 2\Omega \sin\varphi &\approx 10^{-4} \text{ s}^{-1}, & l = 2\Omega \cos\varphi &\approx 10^{-4} \text{ s}^{-1}, \\
 \Delta f|_{x,z,t} &= 0 \text{ s}^{-1}, & \Delta f|_y &\approx 10^{-5} \text{ s}^{-1}, \\
 g &\approx 10 \text{ m s}^{-2}, \\
 S_{x_s}, S_{y_s}, S_{z_s} &\approx 0 - (10^{-3}) \text{ m s}^{-2}, \\
 r_F &\approx 5 \cdot 10^6 \text{ m}, \\
 \rho_0 &\approx 1 \text{ kg m}^{-3}, & \Delta\rho|_{x,y,t} &\approx 10^{-2} \text{ kg m}^{-3}, & \Delta\rho|_z &\approx 1 \text{ kg m}^{-3}.
 \end{aligned}$$

Nézzük a három mozgásegyenlet egyes tagjainak a nagyságrendjét!

$$\begin{aligned}
 \frac{\hat{a}u_s}{\hat{a}} + u_s \frac{\hat{a}u_s}{\hat{a}_s} + v_s \frac{\hat{a}u_s}{\hat{a}_s} + w_s \frac{\hat{a}u_s}{\hat{a}_z} &= -2\Omega w_s \cos\varphi + 2\Omega v_s \sin\varphi - \frac{u_s w_s}{r_F} + \frac{u_s v_s}{r_F} \text{tg}\varphi - \frac{1}{\rho} \frac{\hat{a}p}{\hat{a}_s} + S_{x_s}, \\
 10^{-4} & \quad 10^{-4} & \quad 10^{-4} & \quad 10^{-5} & \quad 10^{-6} & \quad 10^{-3} & \quad 2 \cdot 10^{-8} & \quad 2 \cdot 10^{-5} & \quad 10^{-3} & \quad \sim 0 - (10^{-3}) \\
 & & & & & & & & & & \text{[m s}^{-2}\text{]}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\hat{a}v_s}{\hat{a}} + u_s \frac{\hat{a}v_s}{\hat{a}_s} + v_s \frac{\hat{a}v_s}{\hat{a}_s} + w_s \frac{\hat{a}v_s}{\hat{a}_z} &= -2\Omega u_s \sin\varphi - \frac{v_s w_s}{r_F} - \frac{u_s^2}{r_F} \text{tg}\varphi - \frac{1}{\rho} \frac{\hat{a}p}{\hat{a}_s} + S_{y_s}, \\
 10^{-4} & \quad 10^{-4} & \quad 10^{-4} & \quad 10^{-5} & \quad 10^{-3} & \quad 2 \cdot 10^{-8} & \quad 2 \cdot 10^{-5} & \quad 10^{-3} & \quad \sim 0 - (10^{-3}) & \quad \text{[m s}^{-2}\text{]}
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial w_s}{\partial t} + u_s \frac{\partial w_s}{\partial x_s} + v_s \frac{\partial w_s}{\partial y_s} + w_s \frac{\partial w_s}{\partial z_s} = +2\Omega u_s \cos\varphi + \frac{u_s^2 + v_s^2}{r_F} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z_s} - g + S_{z_s} .$$

$$10^{-7} \quad 10^{-7} \quad 10^{-7} \quad 10^{-8} \quad 10^{-3} \quad 2 \cdot 10^{-5} \quad 10 \quad 10 \quad \sim 0 - (10^{-3}) \quad [\text{m s}^{-2}]$$

A nagyságrendi analízis tovább árnyalható, ha feltesszük, hogy a sebesség (Helmholtz tétele szerint) felbontható egy divergenciamentes ($u_{s\psi}$, $v_{s\psi}$) és egy örvényességmentes ($u_{s\chi}$, $v_{s\chi}$) rész összegére:

$$u_s = u_{s\chi} + u_{s\psi} \text{ és } v_s = v_{s\chi} + v_{s\psi}, \quad u_s \approx v_s \approx u_{s\psi} \approx v_{s\psi} \approx 10 \text{ m s}^{-1}, \quad u_{s\chi} \approx 0,1 u_{s\psi}, \quad v_{s\chi} \approx 0,1 v_{s\psi}.$$

A nagyságrendi mozgások leírásában legtöbbször elegendő a Descartes-féle koordináta-rendszer használata, ahol nem szerepelnek metrikus gyorsulások. Abban az esetben, ha az egyenletben szerepelnek a horizontális gyorsulások, már a metrikus gyorsulások $\tan\varphi$ -t tartalmazó tagjait is figyelembe kell venni. Ha pedig a vertikális mozgásegyenletet oldjuk meg nem hidrosztatikus közelítéssel, akkor a jobboldal minden adaléktagját (Coriolis-erő, metrikus gyorsulások, sűrűlási erő) figyelembe kell venni. Megjegyezzük, hogy a metrikus gyorsulási tagok a trópusi folyamatok leírásában is szerepet játszanak, míg az f Coriolis-paraméter elhanyagolhatóvá válik.

XII.3.4. Hasonlósági kritériumok, az áramlások hasonlósága

Ha egy fizikai rendszert n darab mennyiség jellemez, akkor a rendszert leíró összefüggések mindig redukálhatók k darab dimenziómentes változó közti összefüggésre. A redukcióra érvényes a $k = n - j$ összefüggés, ahol j a rendszert jellemző azon fizikai mennyiségek maximális száma, amelyekből még nem képezhető dimenziómentes szorzat. Ez a Buckingham-tétel. Az elméletet sikerrel alkalmazzák a folyadékdinamikában, az áramlástanban és a mikrometeorológiában.

Az egyszerűség kedvéért tekintsük a metrikus gyorsulások elhanyagolásával vektori alakban felírt Navier–Stokes-egyenleteket. Jelölje $\mathbf{F}_{s\text{mol}}$ a molekuláris, és $\mathbf{F}_{s\text{turb}}$ a turbulens diffúziós folyamatok hatására kialakuló sűrűlási erőt.

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_h}{dt} + \mathbf{k} \frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla_h p - \mathbf{k} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{g} + \mathbf{F}_{s\text{turb}} + \mathbf{F}_{s\text{mol}}$$

$$\frac{V^2}{L} \quad \frac{V^2}{L} \quad \frac{W^2}{D} \quad \frac{\delta p}{\rho_0 L} \quad \frac{p_0}{\rho_0 D} \quad fV \quad g \quad \frac{vW}{D} \quad \frac{K_m V}{D}$$

Az egyes tagok nagyságrendi becslésénél $\delta p = \Delta p|_{x,y}$ a horizontális nyomásperturbáció (nagyságrendje 10 hPa), V a kinematikai viszkozitási együttható, K_m az impulzusszállításra vonatkozó turbulens diffúziós együttható.

A molekuláris viszkozitási erő legfeljebb az alsó néhány cm-es rétegben jelentős (D_v). A turbulens sűrűlási erővel a határrétegben számolhatunk, melynek karakterisztikus vastagságát D_h -val jelöljük. Az impulzusszállításra vonatkozó turbulens diffúziós együttható (K_m) hozzávetőlegesen a határréteg harmadánál éri el a maximális értékét. K_m határrétegbeli karakterisztikus értéke: 10–50 m² s⁻¹. A szabad légkörben $K_m = 0$, nincs turbulens keveredés, és sűrűlási erő sem. Természetesen ez alól kivételt képeznek az erős szélnyírással rendelkező területek (konvektív rendszerek vagy futóáramlások). A

határréteg vastagsága (D_p) az éjszakai stabil rétegződés esetén 100 m-es, míg nappal a konvekció eredményeként km-es nagyságrendű.

XII.3.4.1. Hasonlósági kritériumok

A mozgásegyenletekben hat tag szerepel (gyorsulás, nyomási gradiens erő, Coriolis-erő, gravitációs erő, molekuláris és turbulens viszkozitásból származó súrlódási erő). A gyorsulás dimenziójában két mértékegység – a hosszúság és az idő – van, így a Buckingham-tételben szereplő j értéke 1. Ez azt jelenti, hogy $k=5$ jól megválasztott dimenziótlan számmal, pl. az erők eredőjeként létrejövő gyorsulás (V^2/L) és valamelyik másik erő hányadosával jellemezhetjük az áramlást. Itt kihasználjuk, hogy a vertikális gyorsulás (W^2/D) legalább egy nagyságrenddel kisebb, mint a horizontális, illetve tudjuk, hogy a nyomási gradiens erő függőleges komponense és a nehézségi gyorsulás azonos nagyságrendű (10 m s^{-2}). Nézzük ezeket az egymástól független dimenziótlan számokat!

i.) Az Euler-szám a horizontális nyomási gradiens erő és a gyorsulás hányadosa:

$$Eu = \frac{\delta p}{\rho_0 V^2}.$$

ii.) A Rossby-szám (nevezik Kibel-számnak is) a horizontális gyorsulás és a Coriolis-erő közötti arányt fejezi ki:

$$Ro = \frac{V^2 / L}{f \cdot V} = \frac{V}{fL}.$$

A Rossby-szám kis értékei ($Ro \leq 0,1$) olyan mozgásrendszereket jeleznek, ahol a horizontális gyorsulás elhanyagolható. Ilyen pl. a geosztrofikus és a gradiens áramlás.

Szinoptikus skálán $Ro \approx \frac{1}{Eu} \approx 0,1$.

iii.) A gyorsulás és a nehézségi erő hányadosa a Froude-szám, horizontális áramlás esetén:

$$Fr_h = \frac{V^2 / L}{g} = \frac{V^2}{Lg},$$

de elterjedtebben alkalmazzák e kifejezés gyökét is:

$$Fr_h = (Fr_h^2)^{1/2} = \frac{V}{\sqrt{Lg}} \approx 10^{-3} - 10^2.$$

A meteorológiai gyakorlatban a vertikális instabilitások vizsgálatánál használják a Froude-számot. A vertikális gyorsulással vetik össze a nehézségi erőt. A karakterisztikus vertikális méret a vizsgált folyamattól függ. Vegyük csak a hegyen átkelő levegőt, a hegy mögött kialakuló lee-hullámokat. Szinoptikus skálán (ciklonok, anticiklonok) a Froude-szám nullához közeli:

$$Fr_z = \frac{W}{\sqrt{Dg}} \approx 10^{-5} - 10^{-4} \approx 0.$$

A 100 m-es nagyságrendű stabilis éjszakai határréteg tetején kialakuló gravitációs hullámokban (mikroskála), ahol a vertikális sebesség nagyságrendje már $0,1-1 \text{ m s}^{-1}$, a Froude-szám is lényegesen nagyobb:

$$Fr_z = \frac{W}{\sqrt{D_E g}} \approx 10^{-1}$$

iv.) A turbulens viszkozitási erő és a Coriolis-erő hányadosa az Ekman-szám. Az Ekman-szám arányos a határréteg, illetve az óceáni súrlódási réteg vastagságával, mivel a forgó közegben a súrlódási erőt elsősorban a Coriolis-hatás tartja egyensúlyban, a nyomási gradiens erő nem lényeges ebből a szempontból. Az Ekman-számnak a határrétegben (D_h) van jelentősége. A szabad légkörben, ahol nincs súrlódási erő, értéke nulla.

$$Ek = \frac{K_m V / D_E^2}{fV} = \frac{K_m}{fD_E^2}$$

Gyakran a fenti kifejezés négyzetgyökét adják meg Ekman-számként:

$$Ek = \frac{1}{D_E} \sqrt{\frac{K_m}{f}}$$

A turbulens súrlódási erő és a gyorsulás arányát nem használják a meteorológiában. Ez érthető, hiszen a határréteg-elméletben általában kvázistacionárius sebességi mező feltételezésével dolgozunk (nincs gyorsulás).

v.) A gyorsulás és a molekuláris viszkozitási erő hányadosa a Reynolds-szám.

$$Re = \frac{V^2 / L}{\nu V / L^2} = \frac{V}{\nu L}$$

Jó indikátora a lamináris és a turbulens áramlás szétválasztásának. Kritikus értéke 10^3 nagyságrendű, függ a felszín érdességétől, de attól is, hogy „milyen irányba haladunk”: a turbulens áramlás válik laminárisná, vagy fordítva. A meteorológiai gyakorlatban a felszín feletti legfeljebb néhány cm-es réteget leszámítva az áramlás mindig turbulens. Ez érthető, hiszen a levegőre jellemző ν kinematikai viszkozitási együttható $10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ nagyságrendű, s a felszín felett néhány cm-rel a szélesebbég lehet 10^{-1} m s^{-1} nagyságrendű.

A dinemziótlan mennyiségek világába tett kirándulás is jól mutatja azt, amit a nagyságrendi analízisnél láttunk: szinoptikus skálán külön kezelhetjük a horizontális áramlást és a légkör vertikális szerkezetét leíró sztatika alapegyenletét. A szabad légkörben két erő alakítja az áramlást és felelős az egyensúlyi áramlások, illetve a horizontális gyorsulás kialakulásáért. Két dimenziótlan mennyiséggel dolgozunk (Euler- és a Rossby-szám). A határrétegben fontos szerepet játszik a turbulens súrlódás. Itt egy újabb dimenziótlan mennyiséggel, az Ekman-számmal találkozunk.

XII.3.4.2. Az áramlások hasonlósága

Végezetül röviden foglalkozunk az áramlások hasonlóságával. Ez a meteorológiai gyakorlatban szélsőtérnyés vizsgálatokban, a határretegprofilok leírásában (hasonlósági elmélet), műszaki meteorológiai feladatoknál, vagy pl. más bolygókra (Mars, Vénusz) és holdakra (Titán) készített légkörmodellek konstruálásakor merül fel.

Ahogy az előzőekben láttuk, az áramlást a légrézre ható erők határozzák meg. Az áramlási formák között a hasonlóságelmélet segít eligazodni, mely szerint két áramlás hasonló, ha az alábbi hasonlósági feltételeket kielégíti:

- A két áramlást leíró differenciálegyenlet azonossága. Két áramlás csak akkor hasonló, ha bennük azonos fizikai jelenségek játszódnak le.
- Geometriai hasonlóság (domborzat, érdesség, stb.).
- A fizikai jellemzők hasonlósága (pl.: nagyság, irány, helyzet, közeg minősége)
- A folyamatok időbeli hasonlósága.
- Kezdeti és peremfeltételek hasonlósága.
- A ható erők arányait kifejező független dimenziótlan mennyiségek azonossága.

E tudományterülettel részletesen az áramlástan foglalkozik. Itt csak felvillantottunk néhány szempontot.