

XVII. A frontfelületek fejlődése, a frontogenetikus függvény

XVII.1. A frontogenetikus függvény.....	1
XVII.2. Frontogenezis lineáris áramlási mezőben.....	4
XVII.3. A frontogenetikus függvény alkalmazása a szinoptikus analízisben.....	7
XVII.4. Termikus szél a frontálzónákban, geosztrofikus és ageosztrofikus hatások.....	8

A *frontogenezis* fogalmán a frontok keletkezéséhez vezető, vagy a már kialakult frontok intenzitását növelő folyamatok együttesét értjük. A *frontolízis* pedig azon folyamatok gyűjtőfogalma, amelyek csökkentik a frontkeletkezési hajlamot, illetve a már meglévő frontok intenzitását. E két fogalmat Bergeron, a bergeni iskola egyik legismertebb alakja, az Uppsalai Egyetem Meteorológiai Tanszékének néhai vezetője honosította meg a meteorológiai gyakorlatban.

XVII.1. A frontogenetikus függvény

Általánosan fogalmazva: ha egy adott meteorológiai állapotjelző gradiense növekszik, akkor a mezőben frontogenezis figyelhető meg, ha pedig csökken, akkor frontolízis. Adott az S skalármennyiség. Az erre vonatkozó F frontogenetikus függvény:

$$F = \frac{d|\nabla S|}{dt},$$

ahol pl. a Descartes-féle rendszerben

$$\nabla S = \frac{\partial S}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial S}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial S}{\partial z} \mathbf{k},$$

azaz F megadja a gradiens abszolút értékének időbeli változását, megmutatja, hogy a vizsgált térrészben időben sűrűsödnek vagy ritkulnak-e az S állapotjelző izovonalai. Ha a gradiens nő, azaz $F > 0$, akkor frontogenezisérről, ha csökken ($F < 0$), akkor frontolízisérről beszélünk.

Kétdimenziós esetben azokat az összefüggő görbéket, amelyek mentén F -nek lokális vagy abszolút maximuma van, frontogenezis vonalának nevezzük. Háromdimenziós

esetben frontogenezis felületekről beszélünk. A d/dt individuális differenciáloperátor azt jelenti, hogy a frontogenetikus függvény egy-egy részecske mozgását követve térképezi fel az adott térrészben a frontogenetikus felületek elhelyezkedését és időbeli változását (Lagrange-féle szemléletmód.)

A frontogenetikus függvény általános alakja:

$$F = \frac{d|\nabla S|}{dt} = \frac{1}{2|\nabla S|} \frac{d(\nabla S)^2}{dt} = \frac{\nabla S}{|\nabla S|} \frac{d(\nabla S)}{dt} = \mathbf{n}_s \frac{d(\nabla S)}{dt},$$

ahol a felírás szerint $\mathbf{n}_s = \frac{\nabla S}{|\nabla S|}$ a ∇S irányú egységvektor.

Hogyan tudunk áttérni a teljes deriváltokról a meteorológiai térképeken jól kiértékelhető térbeli deriváltak alkalmazására? (Nekünk egy-egy térképet analizálva kell megmondanunk a frontálzónák elhelyezkedését.)

Nézzük a jobb oldali frontogenetikus függvény második tényezőjét. E teljes derivált alakja:

$$\frac{d(\nabla S)}{dt} = \frac{\partial(\nabla S)}{\partial t} + u \frac{\partial(\nabla S)}{\partial x} + v \frac{\partial(\nabla S)}{\partial y} + w \frac{\partial(\nabla S)}{\partial z}.$$

Kihasználva a szorzatfüggvény deriválási szabályait, a fenti egyenlőség jobb oldalát a következőképpen bővíthetjük:

$$\begin{aligned} \frac{d(\nabla S)}{dt} &= \nabla \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right) + \nabla \left(u \frac{\partial S}{\partial x} \right) + \nabla \left(v \frac{\partial S}{\partial y} \right) + \nabla \left(w \frac{\partial S}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial S}{\partial x} \nabla u + \frac{\partial S}{\partial y} \nabla v + \frac{\partial S}{\partial z} \nabla w \right) = \\ &= \nabla \left(\frac{dS}{dt} \right) - \left(\frac{\partial S}{\partial x} \nabla u + \frac{\partial S}{\partial y} \nabla v + \frac{\partial S}{\partial z} \nabla w \right). \end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy ilyen típusú átalakítással már találkoztunk a teljes potenciális örvényesség megmaradási egyenletének vektoriális levezetésénél. A fentiek alapján a frontogenetikus függvény új alakja:

$$F = \mathbf{n}_s \cdot \nabla \left(\frac{dS}{dt} \right) - \mathbf{n}_s \cdot \left(\frac{\partial S}{\partial x} \nabla u + \frac{\partial S}{\partial y} \nabla v + \frac{\partial S}{\partial z} \nabla w \right).$$

A frontogenetikus függvény akkor használható hatékonyan, ha S -nek olyan állapotjelzőt választunk, ami konzervatív mennyiség, illetve egyszerűen felírható a teljes időbeli megváltozása. Ezért jó indikátor például a potenciális hőmérséklet. Elsőként vizsgáljuk meg a száraz adiabatikusan áthelyeződő légrézsrre vonatkozó frontogenetikus függvényt. (A termodinamikai egyenlet felírásakor elhanyagoljuk a fázisátalakulási és a turbulens diffúziós folyamatokat.) Kiindulási egyenletünk:

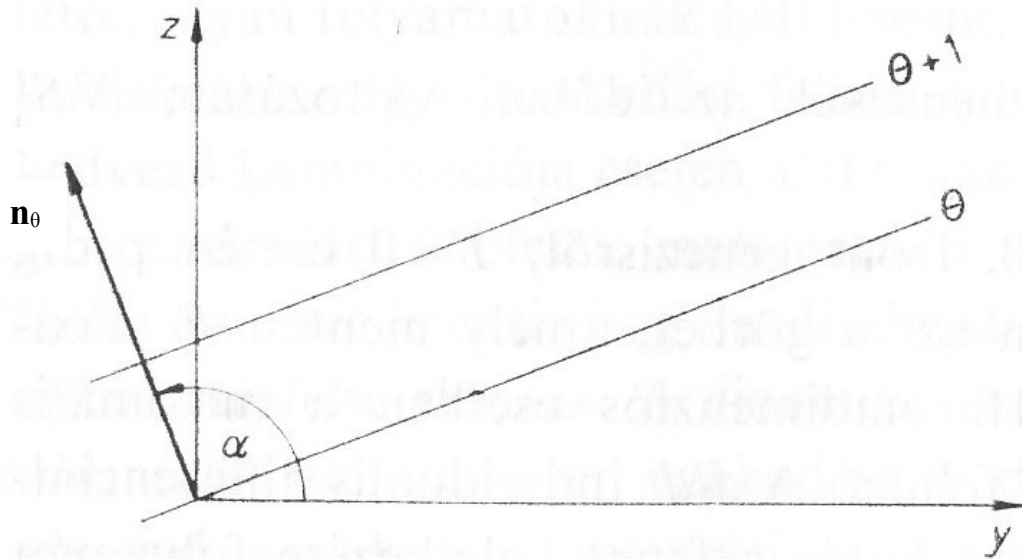
$$\frac{d\Theta}{dt} = 0.$$

A frontogenetikus függvény alakja:

$$F = -\mathbf{n}_\Theta \cdot \left(\frac{\partial \Theta}{\partial x} \nabla u + \frac{\partial \Theta}{\partial y} \nabla v + \frac{\partial \Theta}{\partial z} \nabla w \right).$$

Természetesen felírhatjuk a frontogenetikus függvényt a pseudo-ekvivalens potenciális hőmérsékletre is.

Elemezzük a frontogenetikus függvény szerkezetét! Mikor számíthatunk frontogenezisre? E kérdésre az (y, z) síkbeli frontogenetikus függvény vizsgálatával válaszolunk. Az x -tengellyel párhuzamos potenciális hőmérsékleti vonalakat vizsgálunk.



1. ábra. Az \mathbf{n}_Θ vektor értelmezése az (y, z) síkban, illetve a potenciális hőmérséklet izovonalainak a futása. Götz G., Rákóczi F., 1981: A dinamikus meteorológia alapjai, Tankönyvkiadó, Budapest, 278. oldal.

A frontogenetikus függvény alakja természetesen leegyszerűsödik:

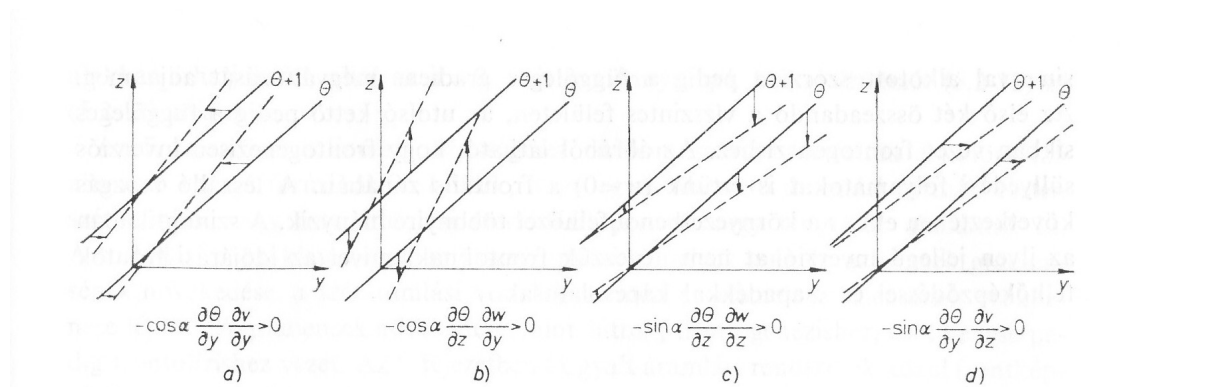
$$F = -\mathbf{n}_\Theta \cdot \left(\frac{\partial \Theta}{\partial y} \nabla v + \frac{\partial \Theta}{\partial z} \nabla w \right).$$

Felhasználva, hogy

$$\mathbf{n}_\Theta = \mathbf{j} \cos \alpha + \mathbf{k} \sin \alpha,$$

$$F = - \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{\partial \Theta}{\partial y} \begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial z} \end{bmatrix} + \frac{\partial \Theta}{\partial z} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \right) = - \left(\frac{\partial \Theta}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \Theta}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \cos \alpha - \left(\frac{\partial \Theta}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial \Theta}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \sin \alpha$$

Az első tag a vízszintes, a második tag a függőleges menti frontogenezisből származó adaléktagot mutatja. Az ábrán olyan mezőket látunk, ahol jellegzetes frontogenezis figyelhető meg. Az egyszerűség kedvéért vagy csak vertikális, vagy csak horizontális szélsőségekkel dolgozunk. Természetesen megengedjük ezek horizontális és vertikális változását.



2. ábra. A frontogenezis néhány esete. Götz G., Rákóczi F., 1981: A dinamikus meteorológia alapjai, Tankönyvkiadó, Budapest, 279. oldal.

XVII.2. Frontogenezis lineáris áramlási mezőben

Tételezzük fel, hogy a levegő potenciális hőmérséklete (illetve egy közel izobár felületen mozgó légréteg hőmérséklete) rövid (napos) időszakot véve konzervatív tulajdonság. Tekintsük a lineáris közelítéssel felírt horizontális sebességi mezőt! Ebben négy invariáns áramlási karakterisztika jelenik meg: a transláció, a divergencia, a rotáció és a deformáció. Ilyen áramlási térben vizsgáljuk a frontogenetikus függvényt, elhanyagolva a vertikális változásokat tartalmazó tagokat. A koordináta-rendszer alkalmas megválasztásával mindig elérhető, hogy a lineáris sebességi mezőt a vizsgált (x_0, y_0) pont környezetében a következő alakban írjuk fel:

$$u = u_0 + (a + b)(x - x_0) - c(y - y_0),$$

$$v = v_0 + c(x - x_0) + (b - a)(y - y_0),$$

ahol $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ és $u_0 = u(x_0, y_0)$, $v_0 = v(x_0, y_0)$. Az a , b , c mennyiségek pedig rendre a deformáció gyökével (Def), a divergenciával (Div), illetve az örvényességgel (ζ) arányosak:

$$a = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \text{Def},$$

$$b = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \text{Div},$$

$$c = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \xi .$$

A transláció és a tiszta rotáció (két dimenzióban az örvényesség) nem okoz frontogenezist, vagy frontolízist. Nem változtatja meg az izovonalak távolságát, a vizsgált konzervatív tulajdonság gradiensét. A frontogenetikus függvény kialakításában a divergenciának és a deformációnak van kitüntetett szerepe. A frontogenetikus függvény alakja az egyszerűsítő feltételek után:

$$F = - \mathbf{n}_\Theta \cdot \left(\frac{\partial \Theta}{\partial x} \nabla_h u + \frac{\partial \Theta}{\partial y} \nabla_h v \right),$$

ahol $\mathbf{n}_\Theta = \frac{\nabla \Theta}{|\Theta|}$. Jelöljük β -val az x -tengely és a $\nabla_h \Theta$ vektor által bezárt szöveget. Ekkor:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x} = |\nabla_h \Theta| \cos \beta, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial y} = |\nabla_h \Theta| \sin \beta .$$

Írjuk be a frontogenetikus függvénybe a lineáris sebességi mező megfelelő alakját:

$$\begin{aligned} F &= - |\nabla_h \Theta| \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix} \left(\cos \beta \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} + \sin \beta \begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \right) = \\ &= - |\nabla_h \Theta| \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix} \left(\cos \beta \begin{bmatrix} a+b \\ -c \end{bmatrix} + \sin \beta \begin{bmatrix} c \\ (b-a) \end{bmatrix} \right) . \\ F &= - |\nabla_h \Theta| \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix} \left(\cos \beta \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\text{Div} + \text{Def}) \\ -\frac{1}{2}\xi \end{bmatrix} + \sin \beta \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\xi \\ \frac{1}{2}(\text{Div} - \text{Def}) \end{bmatrix} \right) . \\ F &= - |\nabla_h \Theta| \left(\frac{1}{2} \cos^2 \beta (\text{Div} + \text{Def}) + \frac{1}{2} (1 - \cos^2 \beta) (\text{Div} - \text{Def}) \right) = \\ &F = - |\nabla_h \Theta| \left(\cos^2 \beta \text{Def} + \frac{1}{2} (\text{Div} - \text{Def}) \right) = \end{aligned}$$

Elemezzük a kapott eredményt!

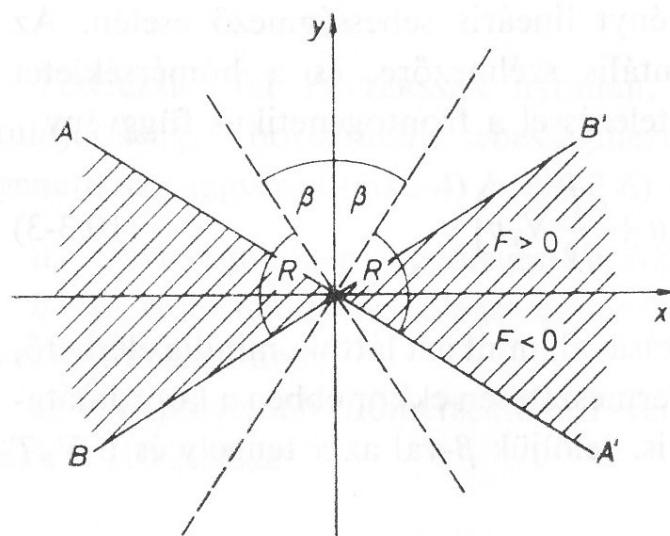
Az invariáns mennyiségek közül – ahogy már említettük – a transláció és az örvényesség nem játszik szerepet a frontogenetikus függvény alakításában. A konvergenciamező ($\text{Div} < 0$) frontogenezist, a divergenciamező ($\text{Div} > 0$) frontolízist generál. A tiszta deformációs mező frontkeletkezésre gyakorolt hatását a potenciális hőmérsékleti gradiens iránya, vagyis a β szög határozza meg. A felírásból következik, hogy tetszőleges horizontális szélmezőben, ahol fennáll, hogy $(|\text{Div}| \leq |\text{Def}|)$ mindig létezik olyan kritikus β_k szög, amelyre a frontogenetikus függvény értéke nulla ($F = 0$). Ekkor eltűnik a potenciális hőmérsékleti gradiens abszolút értékének a szorzója. A skalárszorzat nulla értékét keressük. A megoldás:

$$\text{Def} \cos(2\beta_k) + \text{Div} = 0,$$

$$\beta_k = \frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{\text{Div}}{\text{Def}}\right).$$

Ilyen szélmező frontogenetikus hatását mutatja a 3. ábra. Megjegyezzük, hogy divergenciamentes esetben – amikor az egyedüli frontalakító tényező a deformáció – a frontogenezis és a frontolízis szektora egyforma. Általános esetben a divergenciamező ($\text{Div} > 0$) a frontogenezis szektorának csökkenését, míg a konvergenciamező ($\text{Div} < 0$) annak növekedését okozza.

Az időjárási frontokra vonatkozó esettanulmányok kimutatták, hogy a felső troposzférában, a maximális szélesség szintjében (200 hPa - 300 hPa) a horizontális advekciónak a meghatározó szerepet, a közép troposzférában (500 hPa) ehhez társulnak a konvektív hatások (vertikális tag). Abban az esetben, ha a frontfelületek fejlődésében szerepet játszik a határréteg, illetve lényegesek a fázisátalakulási folyamatok (alsó- és közép troposzféra), már nem alkalmazható a potenciális hőmérsékletre vonatkozó feltételezés, miszerint az a légréteg konzervatív tulajdonsága. Itt a frontogenetikus függvény általános alakját kell használni. Amennyiben elhanyagolható a felszín hatása (turbulens hőszállítás), a fázisátalakulási folyamatokat a pseudo-ekvivalens hőmérséklet – mint új konzervatív mennyiség – alkalmazásával írják le a frontogenetikus függvényben.



3. ábra. A frontogenetikus szektor. x : a torlódási tengely, β_k határszög, F : frontogenetikus függvény. Götz G., Rákóczi F., 1981: A dinamikus meteorológia alapjai, Tankönyvkiadó, Budapest, 282. oldal.

XVII.3. A frontogenetikus függvény alkalmazása a szinoptikus analízisben

Kiindulási egyenletünk a potenciális hőmérséklet, pontosabban fogalmazva az átlagos potenciális hőmérséklet időbeli megváltozását leíró egyenlet:

$$\frac{d\Theta}{dt} = H + D,$$

ahol H jelenti a termikus folyamatok (latens hőfelszabadulás, sugárzási folyamatok), D pedig a turbulens diffúzió hatását. (Megjegyezzük, hogy ez az egyenlet szigorúan véve az átlagértékekre vonatkozik.)

Az $F = \frac{d}{dt} |\nabla_h \Theta|$ frontogenetikus függvény öt tag összegeként írható le. Ezek:

- konvergencia,
- deformáció,
- nyírási, csavarási hatás (görbület),
- hőfelszabadulás, sugárzási folyamatok,
- turbulens diffúzió.

Az egyes tagok alakjának és működésének megértéséhez induljunk ki a frontogenetikus függvény általános alakjából!

$$F = - \frac{\nabla_h \Theta}{|\nabla_h \Theta|} (\Theta_x \nabla_h u + \Theta_y \nabla_h v + \Theta_z \nabla_h w) + \frac{\nabla_h \Theta}{|\nabla_h \Theta|} \cdot \nabla_h \left(\frac{d\Theta}{dt} \right).$$

Először nézzük a jobb oldal második tagját! Ez tartalmazza a turbulens diffúzió, illetve a latens hőfelszabadulás és a sugárzási folyamatok hatását. E tag a következő összeg alakban adható meg:

$$\frac{\nabla_h \Theta}{|\nabla_h \Theta|} \cdot \nabla_h \left(\frac{d\Theta}{dt} \right) = \frac{1}{|\nabla_h \Theta|} (\nabla_h \Theta) \cdot \nabla_h D + \frac{1}{|\nabla_h \Theta|} (\nabla_h \Theta) \cdot \nabla_h H.$$

Most vizsgáljuk a frontogenetikus függvény első tagját, ami három frontogenetikus hatás együttesét tartalmazza. Az áttekinthetőség kedvéért – Hoskins munkája nyomán – alkalmazzunk indexes jelölést a parciális deriváltakra. Legyen pl.: $\frac{\partial \Theta}{\partial x} = \Theta_x$. Ekkor:

$$-\frac{\nabla_h \Theta}{|\nabla_h \Theta|} (\Theta_x \nabla_h u + \Theta_y \nabla_h v + \Theta_z \nabla_h w) = -\frac{1}{|\nabla_h \Theta|} \begin{pmatrix} \Theta_x \\ \Theta_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta_x u_x + \Theta_y v_x + \Theta_z w_x \\ \Theta_x u_y + \Theta_y v_y + \Theta_z w_y \end{pmatrix}.$$

E kifejezés további három hatást tartalmaz. Ezek:

$$-\frac{1}{|\nabla_h \Theta|} \frac{1}{2} (\Theta_x^2 + \Theta_y^2) (u_x + v_y) \quad (\text{konvergencia}),$$

$$-\frac{1}{|\nabla_h \Theta|} \frac{1}{2} (\Theta_x^2 - \Theta_y^2) (u_x - v_y) - \frac{1}{|\nabla_h \Theta|} \frac{1}{2} (2\Theta_x \Theta_y) (u_y + v_x) \quad (\text{deformáció}),$$

$$-\frac{1}{|\nabla_h \Theta|} (\Theta_z) (\Theta_x w_x + \Theta_y w_y) \quad (\text{nyírási, csavarási hatás, görbület}).$$

XVII.4. Termikus szél a frontálzónákban, geosztrofikus és ageosztrofikus hatások

Milyen fizikai folyamatok alakítják ki a termikus szél szerkezetét a front vonala mentén? Feltételezzük, hogy a termikus szél egyenlete minden időpillanatban teljesül.

Legyen a szélmező alakja:

$$u = u_g + u_a,$$

$$v = v_g + v_a,$$

illetve

$$\mathbf{v}_h = \mathbf{v}_g + \mathbf{v}_a,$$

ahol a g index jelöli a geosztrofikus, míg az a index az ageosztrofikus szélkomponenst.

$$\mathbf{v}_g = (u_g, v_g, 0),$$

$$\mathbf{v}_a = (u_a, v_a, 0),$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_g + \mathbf{v}_a + \mathbf{k}w.$$

A frontvonal legyen az y -tengellyel párhuzamos (tehát az (x, z) síkban vizsgálódunk, ahol az elmozdulás során nem kell figyelembe venni a Coriolis-paraméter változását).

Célunk, hogy leírjuk a frontális rendszerek fejlődését. A horizontális mozgásegyenletet és a termodinamikai egyenletet oldjuk meg; kétdimenziós feladatot vizsgálunk; a fázisátalakulások hatásától eltekintünk. Az x , és az y irányú mozgásegyenletek:

$$\frac{du}{dt} - fv_a = 0,$$

$$\frac{dv}{dt} + fu_a = 0.$$

A termodinamikai egyenletet felírásakor – az egyszerűség kedvéért – nem vesszük figyelembe a fázisátalakulási, a turbulens diffúziós és a sugárzási folyamatokat. (Ezek parametrizációja további adaléktagokat jelentene az egyenletekben.)

$$\frac{d\Theta}{dt} = 0.$$

A termikus szél egyensúlyát vizsgáljuk az (x, z) síkban mozgó frontfelület mentén. Kiindulási egyenletünk:

$$\frac{\partial v_g}{\partial z} \equiv v_{gz} \approx \frac{g}{fT} \frac{\partial T}{\partial x} \equiv \frac{g}{fT} T_x.$$

Hogyan írható fel ez a kifejezés a potenciális hőmérséklet segítségével? Felhasználva, hogy a potenciális hőmérséklet $\left[\Theta = T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{R}{c_p}} \right]$ x szerinti deriváltja

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x} = \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{R}{c_p}} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{R}{c_p} T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{R}{c_p}} \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\Theta}{T} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{f}{c_p} \frac{\Theta}{T} v_g \approx \frac{f}{g} \frac{\partial v_g}{\partial z} \Theta - \frac{f}{c_p} \frac{\Theta}{T} v_g \approx \frac{f}{g} \frac{\partial v_g}{\partial z} \Theta,$$

kapjuk, hogy

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x} = \Theta_x \approx \frac{f}{g} \frac{\partial v_g}{\partial z} \Theta = \frac{f}{g} v_{gz} \Theta.$$

(A deriváltakra az egyszerűbb kezelhetőség miatt az indexes jelölést használjuk.) Nézzük meg a frontálzóna mentén a termikus szél időbeli megváltozását leíró általános egyenletet! Vezessük be a teljes megváltozásra a

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial t} + u_g \frac{\partial}{\partial x} + v_g \frac{\partial}{\partial y} + u_a \frac{\partial}{\partial x} + v_a \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

kifejezést, illetve a

$$\frac{d_g}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_g \frac{\partial}{\partial x} + v_g \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

jelölést, ami a nem ageosztrofikus sebességgel történő áthelyeződést adja meg. (Ilyen értelemben szerepel a kifejezésben a vertikális sebesség.) A kétféle teljes derivált közötti kapcsolatot a

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla = \frac{d_g}{dt} + u_a \frac{\partial}{\partial x} + v_a \frac{\partial}{\partial y} = \frac{d_g}{dt} + \mathbf{v}_a \cdot \nabla$$

kifejezés adja meg, ahol $\mathbf{v}_a = (u_a, v_a, 0)$.

Azzal a feltételezéssel élünk, hogy a termikus szélegyenlet minden időpillanatban teljesül, miközben az advekción felírásában nem számolunk az ageosztrofikus szélel. Feltesszük, hogy a nyomási mező a geosztrofikus szélegyenlet szerint adaptálódik az áramlási mezőhöz.

$$\frac{d_g(g\Theta_x)}{dt} = \frac{d_g(fv_{gz}\Theta)}{dt}.$$

Írjuk fel a termodinamikai egyenletet!

$$0 = \frac{d\Theta}{dt} = \frac{\partial\Theta}{\partial t} + u_g \frac{\partial\Theta}{\partial x} + v_g \frac{\partial\Theta}{\partial y} + w \frac{\partial\Theta}{\partial z} + u_a \frac{\partial\Theta}{\partial x} + v_a \frac{\partial\Theta}{\partial y}.$$

Ezt megszorozva a g nehézségi gyorsulással, majd x szerint differenciálva:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{d(\Theta g)}{dt} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial(\Theta g)}{\partial t} \right) + u_g \left(\frac{\partial^2(\Theta g)}{\partial x^2} \right) + v_g \left(\frac{\partial^2(\Theta g)}{\partial x \partial y} \right) + w \left(\frac{\partial^2(\Theta g)}{\partial x \partial z} \right) + \\ &+ u_a \left(\frac{\partial^2(\Theta g)}{\partial x^2} \right) + v_a \left(\frac{\partial^2(\Theta g)}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\hat{\alpha} u_g}{\hat{\alpha} x} \frac{\partial(\Theta g)}{\partial x} + \frac{\hat{\alpha} v_g}{\hat{\alpha} x} \frac{\partial(\Theta g)}{\partial y} + \\ &+ \frac{\hat{\alpha} w}{\hat{\alpha} x} \frac{\partial(\Theta g)}{\partial z} + \frac{\hat{\alpha} u_a}{\hat{\alpha} x} \frac{\partial(\Theta g)}{\partial x} + \frac{\hat{\alpha} v_a}{\hat{\alpha} x} \frac{\partial(\Theta g)}{\partial y}. \end{aligned}$$

Átrendezve az egyenletet:

$$\begin{aligned} \frac{d_g(\Theta_x g)}{dt} &= -u_a \frac{\partial^2(\Theta g)}{\partial x^2} - v_a \frac{\partial^2(\Theta g)}{\partial x \partial y} - \frac{\hat{\alpha} w}{\hat{\alpha} x} \frac{\partial(\Theta g)}{\partial z} - \frac{\hat{\alpha} u_g}{\hat{\alpha} x} \frac{\partial(\Theta g)}{\partial x} - \frac{\hat{\alpha} v_g}{\hat{\alpha} x} \frac{\partial(\Theta g)}{\partial y} + \\ &+ \left(-\frac{\hat{\alpha} u_a}{\hat{\alpha} x} \frac{\partial(\Theta g)}{\partial x} - \frac{\hat{\alpha} v_a}{\hat{\alpha} x} \frac{\partial(\Theta g)}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Az indexes jelölés alkalmazásával pedig:

$$\frac{d_g(\Theta_x g)}{dt} = -g \mathbf{v}_a \cdot \nabla_h \Theta_x - w_x \frac{\partial(\Theta g)}{\partial z} - g \mathbf{v}_{gx} \cdot \nabla_h \Theta - g \mathbf{v}_{ax} \cdot \nabla_h \Theta .$$

A részecskemódszernél tanult Brunt–Vaisala-frekvencia definícióját felhasználva:

$$N^2 = \frac{-F}{\Delta z} = -g \frac{\Theta'}{\Theta \Delta z} \approx g \frac{\Delta \Theta}{\Delta z} \frac{1}{\Theta} \approx \frac{1}{\Theta} \frac{\partial(\Theta g)}{\partial z} ,$$

ahol Θ' a potenciális hőmérséklet eltérése az átlagértéktől. Az adott pillanatban mért ($\Theta + \Theta'$) potenciális hőmérséklet nem más, mint a Δz távolságról odasodródó örvény pillanatnyi potenciális hőmérséklete. Ez azt jelenti, hogy a vizsgált z magasságtól Δz távolságban az átlagos potenciális hőmérséklet éppen $(\Theta + \Theta')$. Most már kifejezhetjük a Braunt-Vaisala-frekvenciát a potenciális hőmérsékleti magasság szerinti megváltozásával. Az egyenlet új alakja:

$$\frac{d_g(\Theta_x g)}{dt} = \underbrace{-g \mathbf{v}_{gx} \cdot \nabla \Theta}_{\text{I}} - \underbrace{\Theta N^2 w_x}_{\text{II}} - \underbrace{g \mathbf{v}_a \cdot \nabla \Theta_x}_{\text{III}} - \underbrace{g \mathbf{v}_{ax} \cdot \nabla \Theta}_{\text{IV}} - \underbrace{g \mathbf{v}_{ax} \cdot \nabla \Theta}_{\text{V}} .$$

Az I tag a potenciális hőmérséklet zonális x irányú parciális deriváltjának teljes időbeli megváltozását adja meg geosztrofikus szél közelítés mellett (a termikus szélegyenlet bal oldalának teljes időbeli megváltozása). Ez a teljes időbeli derivált függ a geosztrofikus (II) tagtól, valamint az ezzel azonos nagyságrendű (III) tagtól, ami a vertikális instabilitás szerepét mutatja be az x irányú potenciális hőmérsékleti gradiens időbeli megváltozásában. A (IV) és a (V) tag az ageosztrofikus mozgás hatását írja le. A potenciális hőmérsékleti mező fejlődésében először a geosztrofikus tagnak, majd a vertikális instabilitásnak (III), s végül az ageosztrofikus szél erősödésével, az ageosztrofikus tagoknak (IV és V) jut egyre nagyobb szerep.

Következő lépésként nézzük meg a termikus szélegyenlet jobb oldalának időbeli megváltozását a $\frac{d_g}{dt}(fv_{gz})$ tagot! Hogyan alakul a geosztrofikus szélnyírás időbeli változása az elmozduló frontfelület mentén?

$$\frac{d_g(fv_{gz} \Theta)}{dt} = fv_{gz} \frac{d_g(\Theta)}{dt} + \Theta \frac{d_g(fv_{gz})}{dt} = -fv_{gz} \mathbf{v}_a \cdot \nabla \Theta + \Theta \frac{d_g(fv_{gz})}{dt} \sim \Theta \frac{d_g(fv_{gz})}{dt} .$$

Itt kihasználtuk, hogy $\frac{d\Theta}{dt} = 0$. A vertikális szélnyírás időbeli megváltozásának megértéséhez induljunk ki az y irányú mozgásegyenletből.

$$\frac{dv}{dt} + fu_a = 0 ,$$

illetve

$$\frac{d}{dt} fv + f^2 u_a = v \frac{df}{dt} = v^2 \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t} ,$$

ami tovább alakítható.

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u_g \frac{\partial v}{\partial x} + v_g \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + u_a \frac{\partial v}{\partial x} + v_a \frac{\partial v}{\partial y} = -f^2 u_a + v^2 \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Deriváljuk a fenti egyenletet Z szerint! (A geosztrofikus szélnyírás teljes időbeli megváltozását vizsgáljuk.)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + u_g \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + v_g \frac{\partial v}{\partial y \partial z} + w \frac{\partial v}{\partial z \partial z} + \frac{\partial u_g}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} + \\ + u_a \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + v_a \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + \frac{\partial u_a}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v_a}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial y} = -f^2 \frac{\partial u_a}{\partial z} - \frac{\partial v^2}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y}, \end{aligned}$$

ami tovább alakítva:

$$\begin{aligned} \frac{d_g v_{gz}}{dt} + \frac{d_g v_{az}}{dt} + \mathbf{v}_{gz} \cdot \nabla(fv_g) + \mathbf{v}_{gz} \cdot \nabla(fv_a) + w_z v_{gz} + w_z v_{az} + \\ + \mathbf{v}_a \cdot \nabla(fv_{gz}) + \mathbf{v}_a \cdot \nabla(fv_{az}) + \mathbf{v}_{az} \cdot \nabla(fv_g) + \mathbf{v}_{az} \cdot \nabla(fv_a) = -f^2 u_{az} + 2(v_g + v_a)(v_{gz} + v_{az}) \frac{\partial f}{\partial y}. \end{aligned}$$

Az egyenlet átrendezése után:

$$\begin{aligned} \frac{d_g v_{gz}}{dt} = -\mathbf{v}_{gz} \cdot \nabla(fv_g) - \mathbf{v}_{gz} \cdot \nabla(fv_a) - w_z v_{gz} - w_z v_{az} - \mathbf{v}_a \cdot \nabla(fv_{gz}) + \\ - \mathbf{v}_a \cdot \nabla(fv_{az}) - \mathbf{v}_{az} \cdot \nabla(fv_g) - \mathbf{v}_{az} \cdot \nabla(fv_a) - f^2 u_{az} + 2(v_g + v_a)(v_{gz} + v_{az}) \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d_g (fv_{az})}{dt}. \end{aligned}$$

Elhanyagolva a Coriolis-paraméter meridionális megváltozását (β) tartalmazó utolsó tagot, eltekintve a vertikális szélesség magasságszerinti változását tartalmazó tagoktól, és kihasználva, hogy

$$|\mathbf{v}_{gz} \cdot \nabla(fv_g)| > |\mathbf{v}_{gz} \cdot \nabla(fv_a)|,$$

valamint

$$|\mathbf{v}_{az} \cdot \nabla(fv_g)| > |\mathbf{v}_{az} \cdot \nabla(fv_a)|,$$

kapjuk a geosztrofikus szélnyírás időbeli megváltozását meghatározó főbb tagokat:

$$\frac{d_g v_{gz}}{dt} = -\mathbf{v}_{gz} \cdot \nabla(fv_g) - f^2 u_{az} - \mathbf{v}_a \cdot \nabla(fv_{gz}) - \mathbf{v}_{az} \cdot \nabla(fv_g) - \frac{d_g (fv_{az})}{dt}.$$

I II III IV V VI

Az egyenletben szereplő hat tag különböző nagyságrendű. A bal oldalon a legnagyobb két tag a (II) és a (III), majd ezt követi a (IV) és a (V). A geosztrofikus hatást a (II) tag tükrözi. A geosztrofikus és az ageosztrofikus szélkomponensek együtt szerepelnek a (IV), (V) és a (VI) tagban. A mozgásegyenletből leszámaztatott (III) tag pedig tisztán ageosztrofikus hatást mutat.

A frontális rendszerek kialakulásakor a kezdetben a tisztán geosztrofikus tag alakítja a termikus szélmezőt (a kiindulási időpontban, $t = t_0$ -ban az ageosztrofikus szélkomponens nulla), majd az ageosztrofikus szél és ezt követően az ageosztrofikus szél inhomogenitásának erősödésével egyre fontosabbá válnak a kezdetben még kicsi ageosztrofikus (III-VI) tagok.