

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Meteorológiai Tanszék

Légtömegek kaotikus mozgásának vizsgálata passzív nyomelem sodródásának követésével



Készítette:

Haszpra Tímea

V. éves meteorológus hallgató

Témavezetők:

Dr. Tasnádi Péter egyetemi tanár, ELTE Meteorológiai Tanszék

Dr. Tél Tamás egyetemi tanár, ELTE Elméleti Fizikai Tanszék

Budapest, 2010

Tartalomjegyzék

1. BEVEZETÉS	3
2. A KÁOSZ ÉS KAOTIKUS SODRÓDÁS TULAJDONSÁGAINAK ÁTTEKINTÉSE	5
2.1. A KAOTIKUS VISELKEDÉS JELLEMZŐI	5
2.2. A SODRÓDÓ RÉSZECSKÉK MOZGÁSEGYENLETEI	7
2.3. A KAOTIKUS VISELKEDÉS MÉRŐSZÁMAI	9
2.3.1. <i>Ljapunov-exponens</i>	9
2.3.2. <i>Topologikus entrópia</i>	10
2.3.3. <i>Fraktáldimenzió, információs dimenzió, korrelációs dimenzió</i>	10
3. A KAOTIKUS SODRÓDÁS ÉS JELENTŐSÉGE A LÉGKÖRBE.....	14
4. A VIZSGÁLATAINKBAN HASZNÁLT ADATOK ÉS MÓDSZEREK	20
4.1. A SZÉLMEZŐ	20
4.2. AZ ALKALMAZOTT MÓDSZEREK	22
5. KEZDETI FELTÉTELEKRE VALÓ ÉRZÉKENYSÉG	24
5.1. NÉHÁNY RÉSZECSCKE SODRÓDÁSA	24
5.2. LJAPUNOV-EXPONENS	25
6. BONYOLULT GEOMETRIAI MEGJELENÉS	27
6.1. EGY SZENNYEZÉSFELHŐ TERJEDÉSE	27
6.2. TOPOLOGIKUS ENTRÓPIA	31
6.3. FRAKTÁLDIMENZIÓ	33
6.4. INFORMÁCIÓS DIMENZIÓ	37
6.5. KORRELÁCIÓS DIMENZIÓ	39
6.6. KÖZEL AZONOS TERÜLETŰ DOBOZOK ALKALMAZÁSA A DIMENZIÓK SZÁMÍTÁSÁHOZ.....	43
7. A FÉLTEKE BEBORÍTÁSÁNAK IDEJE	48
7.1. KÖRBEÉRÉSI IDŐ	50
7.2. HOMOGENIZÁLÓDÁSI IDŐ	52
8. A MODELL-EREDMÉNYEK ÖSSZEVETÉSE LÉGKÖRI MEGFIGYELÉSEKKEL ...	54
8.1. A KASATOCHI VULKÁN KITÖRÉSE	54
8.2. RÖVID TARTÓZKODÁSI IDEJŰ LÉGKÖRI ÖSSZETEVŐK SODRÓDÁSA	58
9. ÖSSZEFOGLALÁS.....	60
KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS	63
IRODALOMJEGYZÉK.....	64
FÜGGELÉK.....	67
F.1. AZ INTERPOLÁCIÓK VIZSGÁLATA	67
F.1.1. <i>1/r²-es interpoláció</i>	68
F.1.2. <i>Bilineáris interpoláció</i>	69
F.1.3. <i>Biköbös spline interpoláció</i>	69
F.1.4. <i>Eredmények</i>	72
F.2. A DIFFÚZIÓ SZEREPE A SODRÓDÁSBAN.....	78

1. Bevezetés

A légkör nagyskálájú cirkulációja légtömegek és nyomjelző anyagok keveredését okozza. Ez a keveredés számos légköri jelenségben fontos szerepet játszik. Ezek közé tartozik például az emberi eredetű légszennyezés terjedése, az antarktisi ózonlyuk kialakulása, vagy olyan aktuális problémák, mint a vulkánkitörések során levegőbe kerülő hamunak, gázoknak és aeroszol részecskéknél a sodródása. Gondoljunk csak arra, hogy az izlandi Eyjafjallajökull vulkán 2010. áprilisi kitörésekor levegőbe került hamufelhő miatt Európa számos részén repülési tilalmat rendeltek el, amely amellet, hogy megnehezítette az utazni vágyók életét, a légitársaságoknak is hatalmas gazdasági veszteségeket okozott. Mivel a szabad légköri áramlásoknak fontos szerepük van a nyomanyagok szállításában, ezért lényeges kérdés az itt zajló sodródás tulajdonságainak tanulmányozása.

Dolgozatomban elsősorban könnyű részecskék, gázok sodródásával foglalkozom. A sodródás jellemzésére használatos egyik módszer, ha olyan nyomjelző anyagok trajektóriáit követjük, amelyek passzívak és anyagi tulajdonságaik azonosak a közegével. Ekkor a részecskék pillanatnyi sebessége megegyezik az áramlás sebességével. Az áramlás (a szélmező) időben változik, kétdimenziós időfüggő áramlásban történő sodródásban pedig általában bonyolult, kaotikus mozgások alakulnak ki.

A légkörben a felszíntől távolabbi rétegekben az áramlatok közelítőleg kétdimenziós (állandó potenciális hőmérsékletű) felületek mentén szállítják a légtömegeket, ezért numerikus kísérleteinkben a részecskék trajektóriáit izentrop felületek mentén számítottuk. A vizsgálatokhoz használt szélmező adatai az ERA-Interim adatbázisából származnak.

A szélmező komponenseit csak adott ($1,5^\circ \times 1,5^\circ$, 6 óra) felbontásban ismerjük. Azonban a részecskék nem feltétlenül rácspontokban helyezkednek el, így sebességkomponenseiket a környező rácspontok sebességértékeiből interpolációval becsültük. A megfelelő interpolációs eljárást annak alapján választottuk ki, hogy olyan áramlási mezőben, ahol ismerjük a pontos sebességértékeket, melyik interpoláció adja a valósághoz legközelebbi értékeket a sodródás jellemzőinek számításakor (ld. Függelék, F.1. fejezet).

A dolgozat célja a szabad légkörben zajló kaotikus sodródás vizsgálata, annak bemutatása, hogy a kaotikus viselkedés milyen mennyiségekkel jellemezhető, és a főbb tulajdonságai hogyan jelennek meg a sodródási képeken. Ezek a jellemzők a kezdeti

feltételekre való érzékenység (a mozgás hosszú távon előrejelezhetetlen, két egymáshoz közeli részecske pályája kis idő elteltével erősen eltér egymástól), az időben szabálytalan mozgás és a bonyolult, de egyben rendezett (fraktál szerkezetű) geometriai megjelenés. Ha egy közeg valamilyen tulajdonsága (például a nyomjelző anyag koncentrációja) kezdetben eltérő a közeg különböző tartományaiban, a nyomanyagok áramlási térben történő szabálytalan, kaotikus mozgása hatékony keveredést idéz elő. Az említett tulajdonságokra passzív nyomjelző anyagok, illetve az ezekből álló részecskesokaságok terjedése, eloszlása utal a sodródási képeken.

A 2. fejezetben bemutatjuk a kaotikus viselkedés tulajdonságait, illetve a kaotikus sodródás példáján keresztül megismerkedhetünk azzal, hogy ezek a vonások milyen mennyiségekkel számszerűsíthetők. A 3. fejezetben áttekintést adunk a szabad légkörben zajló sodródási folyamatok vizsgálatában a szakirodalomban eddig bemutatott eredményekről, illetve a már vizsgált mérőszámokról (pl. Ljapunov-exponens, korrelációs dimenzió).

A 4. fejezetben a felhasznált adatok, illetve az alkalmazott módszerek ismertetése következik. Az 5. és 6. fejezetben szimulációink segítségével megmutatjuk, hogy egy kezdetben koncentrált szennyezésfelhő sodródása során egyre jobban széteszlik, a sodródási képen finom szálak szerkezetet alakít ki. A fejezetekben sorra vesszük, hogy a kaotikus mérőszámok szemléletesen mit jelentenek, és megbecslünk olyan mennyiségeket is, amelyeket tudomásunk szerint légköri sodródásban még nem vizsgáltak (pl. topológikus entrópia, információs dimenzió). Bemutatjuk, hogy a szennyezésfelhő szálainak hossza időben sebesen nő, a gyűrődések eredményeképpen pedig a kezdetben kicsiny felhő előbb-utóbb beteríti az egész féltekét. Így a kaotikus jellemzőkön kívül meghatározzuk, hogy a felhők átlagosan mennyi idő alatt érnek körbe egy féltekén, valamint mennyi időbe telik, mire nagyjából egyenletesen beborítanak egy féltekét (7. fejezet). Ezt az időtartamot eddig részletesebben csak forgó kádás kísérletekben vizsgálták (*Homonnai, 2008*). Mi meghatározzuk a körbeérési és homogenizálódási idők földrajzi és évszakos eloszlását is.

A 8. fejezetben egy vulkánkitörés gázfelhőjének példáján keresztül összevetjük a szimulációval kapott sodródási képeket a légköri megfigyelésekkel, és a műholdfelvételek segítségével megbizonyosodhatunk róla, hogy a szimulációval bemutatott sodródási tulajdonságok megfelelnek a légkörben valóban lejajló folyamatoknak. Az utolsó fejezetben az eredmények összefoglalásával zárjuk a dolgozatot.

2. A káosz és kaotikus sodródás tulajdonságainak áttekintése

2.1. A kaotikus viselkedés jellemzői

Már régen megfigyelték, hogy a sok összetevőből álló rendszerekben igen bonyolult viselkedés valósulhat meg. Ilyen például a részecskék bonyolult pályán való bolyongása egy szobában, ami a részecskék egymást követő ütközésének következménye. Mivel ezek a rendszerek számtalan kölcsönható részecske együtteséből állnak, a mozgás bonyolultsága nem meglepő. Azonban kevés összetevőből álló, egyszerű, determinisztikus rendszerekben is kialakulhatnak időben bonyolult, szabálytalan jelenségek. Ennek feltétele, hogy a rendszerben nemlinearitás legyen jelen. Ez azt jelenti, hogy a mozgás nem egyenesen arányosan függ a mozgást eredményező hatástól, hanem annak összetettebb függvénye. Az ilyen rendszerekben létrejövő szabálytalan mozgást kaotikusnak nevezzük.

Henri Poincaré (1854 – 1912) francia matematikus 1890-ben egy nagyon leegyszerűsített, három testből álló Naprendszer stabilitását vizsgálta. Megállapította, hogy a három, egymás gravitációs terében mozgó test nemperiodikus pályákon haladhat, bonyolult útvonalakat járhat be. A kaotikus mozgás lehetősége először ekkor merült fel.

A fizikai rendszerek fejlődését általában differenciálegyenletekkel írhatjuk le. Ezek a differenciálegyenletek ugyan alkalmasak arra, hogy egy rendszer viselkedését modellezzék, azonban az egyenletek analitikus megoldását megtalálni, a rendszer összetevőinek mozgását meghatározni az egyenletekből gyakran nagyon nehézkes vagy akár egyáltalán nem is lehetséges. A számítógépek megjelenésével, fejlődésével és elterjedésével a numerikus szimulációk szerepe felértékelődött a különböző fizikai folyamatok vizsgálatában, és a kaotikus mozgás tulajdonságainak tanulmányozása, grafikus megjelenítése könnyebbé vált.

Edward Lorenz (1917 – 2008) amerikai meteorológus 1963-ban számítógéppel, numerikusan vizsgált egy három nemlineáris differenciálegyenletből álló, termikus konvekciót leíró modellt (*Lorenz, 1963*). Egy alkalommal a korábbi szimuláció eredményeit kevesebb tizedesjegyre gépelte vissza, mint ahogyan eredetileg a számítógép számolt velük. Meglepetésére ez a kis pontatlanság rövid idő után nagy eltéréseket eredményezett a szimulációban a korábban kiszámolt értékekhez képest. Ezzel világossá

vált, hogy egyszerű, nemlineáris egyenletekkel leírható kis szabadságfokú rendszerekben megjelenhet a káosz és az előrejelezhetetlenség problémája.

A két tudós kapcsán fentebb említett *időben szabálytalan mozgás* és a *kezdeti feltételekre való érzékenység*, a kezdeti eltérések gyors növekedése a kaotikus viselkedés fő ismérvei (Tél és Gruiz, 2002). Ha a kiindulási állapot változóit csak kis bizonytalansággal tudjuk meghatározni (a mért mennyiségek pontatlanságából, a mérési hibából adódóan), akkor ez a hiba a mozgás során hamar megnövekszik. A hibahatáron belül lévő kiindulási állapotokból egészen eltérő helyzetek is kialakulhatnak, azaz a folyamat előrejelezhetetlenné válik. A meteorológiai alkalmazásokban ez vezetett az ensemble (együttes) előrejelzések módszerének kidolgozásához. Az ensemble módszer azon alapul, hogy a kezdeti feltételekben jelen lévő vagy a modellek felírásában rejlő bizonytalanságot figyelembe véve több előrejelzést készítenek. Az előrejelzések együttesét tekintve lehetségessé válik a valószínűségi megközelítés, és következtetni lehet az előrejelzés bizonytalanságára is. (Götz, 2001)

A kiinduló helyzetbeli kis eltérések felerősödése az instabilitás következménye. Léteznek olyan fizikai folyamatok, ahol az instabilitás csak a mozgás egy-egy állapotában lép fel. Ilyen például a hegyére állított ceruza esete: ha a ceruza már kitért az instabil függőleges állapotából, a felbillenés után már nem bukkan föl több instabilitás, az írószerszám egyszerűen feldől. Ezzel szemben a kaotikus mozgás során végig instabil állapotok között mozog a test, ezért a mozgás hosszú távon megjósolhatatlan, annak ellenére, hogy a leíró egyenletek determinisztikusak.

A kaotikus rendszerek harmadik vonása a *bonyolult, de egyben rendezett, fraktál szerkezetű geometriai megjelenés*, amely a fázistérbeli mozgás követésekor figyelhető meg (ekkor a rendszer időbeli fejlődését olyan koordináta-rendszerben ábrázoljuk, ahol a tengelyeken a rendszer különböző változói tüntetjük fel) (Tél és Gruiz, 2002). Számos fraktál közös tulajdonsága az egzakt önhasonlóság: alkalmasan megválasztott részek kellő nagyítással azonosakká válnak az egész fraktállal. Más fraktálok esetében csak statisztikus értelemben beszélhetünk önhasonlóságról: a kis nagyított részletek nem egyeznek meg teljes mértékben az egész képpel, megjelenésük azonban ugyanazokat a tulajdonságokat tükrözi (Götz, 2001).

Egy áramlásban történő szennyezés terjedését, keveredését figyelve a fent említett tulajdonságok szabad szemmel is láthatóvá válnak, mert ebben az esetben – mint látni

fogjuk – a fázistér megegyezik az állapottérrel. Így a káosz jellemzői könnyen megjeleníthetők laboratóriumi kísérletekkel és szennyezések terjedését modellező numerikus szimulációkkal is. A szennyezések szétterjedése során bonyolult mintázatok alakulnak ki a folyadékban, és a kezdetben egymáshoz közeli részecskék pályái gyorsan eltávolodnak egymástól, azaz a szennyezés sodródása kaotikus.

A kaotikus sodródás kifejezés először Hassan Aref egy konferenciaközleményének a címében jelent meg 1982-ben, majd 1984-ben látott napvilágot az első kaotikus sodródással foglalkozó cikk (Aref, 1984). Aref ismerte fel, hogy egyszerű, időben szabályosan változó áramlások esetén is megfigyelhető a folyadék-részecskék szabálytalan, kaotikus mozgása, a szomszédos részecskék gyorsan messzire kerülnek egymástól. A kaotikus sodródás felfedezésének, megismerésének történetét, az elért eredményeket Aref (2002) cikke foglalja össze.

A következő szakaszban megismerkedhetünk a sodródó részecskék mozgását leíró differenciálegyenletekkel, valamint ezeknek a léggöri sodródásban alkalmazott formájával. Majd kaotikus viselkedés tulajdonságainak leírására, számszerűsítésére használatos mérőszámoknak és szemléletes jelentésüknek a bemutatása következik a kaotikus sodródás példáján keresztül.

2.2. A sodródó részecskék mozgásegyenletei

Amikor egy részecske a folyadékkal együtt halad, sodródásról beszélünk. A sodródó részecskékről feltesszük, hogy pontszerűek, és ugyanolyan sűrűségűek, mint amilyen közegben mozognak. Ekkor a részecskék semmi más nem tesznek, mindössze követik a folyadék áramlását, és minden pillanatban azonnal felveszik a folyadék sebességét ($\vec{v}_{folyadék}$). Nagy skálán a turbulencia és az általa felerősített diffúzió hatása már elhanyagolhatóvá válik (ld. Függelék, F.2. fejezet), így esetünkben a passzív sodródás formálisan:

$$\vec{v}_{részecske} = \vec{v}_{folyadék} \quad (2.2.1)$$

Tegyük fel, hogy a folyadék sebességét ismerjük minden egyes pontban adott pillanatban (esetünkben ezt úgy érjük el, hogy a rácson adott szélmező értékeit a megfelelő helyre interpoláljuk). Ha a folyadék x , illetve y irányú sebességkomponensei (u, v) adottak a kétdimenziós áramlás (x, y) koordinátájú terében és időben (t), akkor

$$\vec{v}_{\text{folyadék}} = [u(x, y, t), v(x, y, t)]. \quad (2.2.2)$$

A részecske sebességét az elmozdulásának időderiváltja adja:

$$\vec{v}_{\text{részecske}} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right). \quad (2.2.3)$$

Mivel a részecske sebessége megegyezik a folyadék sebességével adott helyen, adott pillanatban, a fenti összefüggésekből egy közönséges differenciálegyenlet-rendszert kapunk:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= u(x, y, t), \\ \frac{dy}{dt} &= v(x, y, t), \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

amely az (x, y) pontban lévő részecske mozgásegyenleteinek felel meg. Ezekből a differenciálegyenletekből és az $x(t=0) = x_0$, $y(t=0) = y_0$ kezdeti feltételekből meghatározható a részecske $(x(t), y(t))$ pályája.

A légkörben a részecskék mozgását célszerűbb polárkoordinátákkal leírni. Tetszőleges λ hosszúsági és φ szélességi koordinátájú pontban definiált lokális derékszögű koordinátarendszerben az x tengely zonálisan nyugatról keletre, míg az y tengely a meridián mentén délről északra irányul. Ekkor a (λ, φ) földrajzi pontban elhelyezkedő részecske sebességkomponensei polárkoordinátákkal a

$$\frac{dx}{dt} = R \cos \varphi \frac{d\lambda}{dt} \quad \text{és} \quad \frac{dy}{dt} = R \frac{d\varphi}{dt} \quad (2.2.5)$$

alakban fejezhetők ki (Götz és Rákóczi, 1981).

Ezzel a (2.2.4) két mozgásegyenlete így írható át:

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda}{dt} &= \frac{u(\lambda, \varphi, t)}{R \cos \varphi}, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{v(\lambda, \varphi, t)}{R}, \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

ahol λ és φ jelöli a földrajzi hosszúságot, illetve szélességet, R a Föld középpontjától mért távolság, $u(\lambda, \varphi, t)$ és $v(\lambda, \varphi, t)$ a helyi sebességmező zonális és meridionális sebességkomponensei. Így egy részecske pályáját $\lambda(t=0) = \lambda_0$, $\varphi(t=0) = \varphi_0$ kezdeti feltétel figyelembe vételével $(\lambda(t), \varphi(t))$ írja le.

Káosz a legalább háromdimenziós fázistérben fordulhat elő. A fázistér dimenzióját az elsőrendű autonóm (időváltozót expliciten nem tartalmazó) egyenletek száma adja meg (Tél és Gruiz, 2002). Így egy háromdimenziós áramlásnak nem szükséges időfüggőnek lennie ahhoz, hogy a sodródás kaotikus legyen benne. Kétdimenziós áramlásokban viszont a sodródás csak akkor lehet kaotikus, ha az áramlás időfüggő: a két nem autonóm egyenletet új változó (pl. $\mu := t$) és egy harmadik egyenlet bevezetésével ($d\mu/dt = 1$) autonóm alakra hozhatjuk, így három elsőrendű autonóm egyenletünk lesz, a fázistér dimenziója három, ahol már megjelenhet a káosz.

A részecskék mozgását leíró fenti (2.2.6) differenciálegyenletekben az áramlás (a szélmező) időfüggő, az áramvonalak és a részecskék trajektóriái általában különböznek. Mivel az egyenletekben a jobb oldal függ az időtől, ezért a sodródásban általában bonyolult, kaotikus viselkedés alakul ki.

Fontos hangsúlyozni, hogy a szabad légkörben más jellegű a sodródás, mint a felszínhez közeli planetáris határrétegben. Az általunk vizsgált szabad légkörbeli folyamatokkal ellentétben a határrétegben a diffúzió hatását nem hanyagolhatjuk el.

2.3. A kaotikus viselkedés mérőszámai

2.3.1. Ljapunov-exponens

A kaotikus sodródás során tehát két, egymáshoz közeli kezdőhelyzetből indított részecske tipikusan exponenciálisan távolodik egymástól. Ha két közeli részecskét veszünk az $\vec{r} = (x_0, y_0)$ pont körül, amelyeknek a távolsága kezdetben $D(0)$, a távolodás mértékét a lokális Ljapunov-exponens jellemzi (Tél és Gruiz, 2002):

$$D(\vec{r}, t) = D(0) \cdot e^{\lambda(\vec{r})t}, \quad (2.3.1.1)$$

ahol $D(\vec{r}, t)$ jelöli a t idő utáni távolságot, a $\lambda(\vec{r})$ pedig a lokális Ljapunov-exponens. Ahhoz, hogy a fenti összefüggés érvényes legyen, fel kell tételezni, hogy t idő elteltével a $D(\vec{r}, t)$ távolság még elég kicsi. A (véges idejű) Ljapunov-exponens a t idő függvényében ábrázolt $\ln D(\vec{r}, t)$ görbére illesztett egyenes meredekségéből becsülhető.

A Ljapunov-exponens az előrejelezhetetlenség mérőszáma, a szomszédos pályák gyors eltávolodását, a kezdőfeltételekre való érzékenységet, az áramlás által előidézett keveredés mértékét fejezi ki. (Tél és Gruiz, 2002).

2.3.2. Topologikus entrópia

A 6.2 fejezetben látni fogjuk, hogy ha a kezdőfeltételek egy halmazáról (szennyezésfelhő) indítunk részecskéket, az összefüggő halmaz rövid idő alatt szálas szerkezetűvé nyúlik, bonyolult alakúra gyűrődik, és a tapasztalat szerint a vonalszakasz hossza elegendően hosszú idő után már exponenciálisan nő. A növekedés mértékét a topologikus entrópia írja le:

$$L(t) \sim e^{ht}, \quad (2.3.2.1)$$

ahol $L(t)$ jelöli a vonaldarab hosszát a t időpillanatban, a h paramétert pedig topologikus entrópiának nevezzük. A topologikus entrópia a bonyolultság, szabálytalanság mérőszáma. (Tél és Gruiz, 2002)

2.3.3. Fraktáldimenzió, információs dimenzió, korrelációs dimenzió

A szennyezésfelhő kaotikus sodródásakor kialakuló bonyolult struktúrát az úgynevezett *fraktáldimenzióval* lehet jellemezni. Fedjük le a keletkező alakzatot azonos méretű dobozokkal, amelyek oldalainak a hossza ε . Legyen az alakzat lefedéséhez szükséges dobozok száma N , ami természetesen függ a dobozok nagyságától, ε -tól. N annál nagyobb, minél kisebb ε , azaz a lefedő dobozok száma a felbontással nő, mégpedig a következőképpen (Tél és Gruiz, 2002):

$$N(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-D_0}, \text{ ha } \varepsilon \text{ kicsi.} \quad (2.3.3.1)$$

A (2.3.3.1) összefüggést átrendezve a (2.3.3.2) definiálja a vizsgált alakzat D_0 fraktáldimenzióját:

$$D_0 \sim \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}, \text{ ha } \varepsilon \text{ kicsi.} \quad (2.3.3.2)$$

Ez a szám hagyományos geometriai alakzatokra megegyezik azzal a dimenzióval, amit társítani szoktunk hozzá: D_0 értéke pontra 0, vonalra 1, kétdimenziós alakzatra, például körlapra 2.

A (2.3.3.1) arányosság tetszőleges kétdimenziós alakzat példáján könnyen megérthető: ε oldalhosszúságú dobozok esetén egy doboz területe ε^2 . Ha az alakzatot N darab ε méretű dobozzal tudjuk letakarni, akkor az

$$A = N\varepsilon^2 \quad (2.3.3.3)$$

egyenlettel számíthatjuk ki a síkidom A területét. Ebből

$$N = A/\varepsilon^2, \text{ azaz } N \sim \varepsilon^{-2} \text{ és } D_0 = 2. \quad (2.3.3.4)$$

Léteznek azonban olyan alakzatok is, amelyek szerteágazók, tagoltak, a pontok bizonyos halmazainak dimenziója csak törtszámmal adható meg. A tapasztalat szerint az ilyen rendszerek felületéhez nem rendelhető mérőszám, mert az értéke függ a mérés pontosságától. A felület növekszik a mérési felbontás finomításával, és ez több nagyságrenden keresztül megfigyelhető. (*Tél és Gruiz, 2002*)

Egy alakzat fraktáldimenziója a (2.3.3.2) arányosság alapján tehát leolvasható az őt lefedő dobozok számának felbontásfüggéséből. Emiatt szokták ezt dobozszámláló dimenzióknak (angolul box-counting dimension) is nevezni (*Alligood et al., 1996; Götz, 2001*).

A fraktáleloszlások jellemzésére használhatjuk az úgynevezett *információs dimenziót* is, amely tükrözi az eloszlás inhomogenitását. Egy alakzat fraktáldimenziójának számításakor egyforma súllyal vesszük figyelembe a lefedéshez használt összes dobozt, annak ellenére, hogy néhol az alakzat „sűrűbb” (azaz több pont esik egy dobozba), másutt pedig „ritkább” (kevesebb pont található egy dobozban). A tapasztalat szerint a fraktálokon kialakuló eloszlások igen inhomogének, maguk is fraktáloknak tekinthetők, amelyeknek a dimenziója eltér a D_0 fraktáldimenziótól. (*Götz, 2001; Tél és Gruiz, 2002*)

Annak érdekében, hogy figyelembe vegyük az egyes dobozok „fontosságát”, fedjük le az alakzatot ε oldalhosszúságú dobozokkal, és tegyük fel, hogy ismert a lefedő dobozok $P_i(\varepsilon)$ valószínűség-tartalma, azaz az i -edik dobozban lévő pontok (részecskék) relatív gyakorisága. Ekkor $\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} P_i(\varepsilon) = 1$, ahol $N(\varepsilon)$ jelöli a nem üres dobozok számát. Az eloszlások inhomogenitását általában az információtartalmuk (Shannon-féle entrópia) jellemzi:

$$\ln I(\varepsilon) = -\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} P_i(\varepsilon) \cdot \ln P_i(\varepsilon). \quad (2.3.3.5)$$

Ez akkor a legnagyobb, ha homogén az eloszlás ($P_i(\varepsilon) = 1/N(\varepsilon)$, $i = 1, \dots, N(\varepsilon)$, azaz minden relatív gyakoriság azonos):

$$\ln I(\varepsilon)_{\max} = -\ln 1/N(\varepsilon) = \ln N(\varepsilon). \quad (2.3.3.6)$$

A (2.3.3.5) kifejezésben $\ln I(\varepsilon)$ függ ε -tól: minél finomabb a felbontás, annál tagoltabb az alakzat, így annál nagyobb az információ. A tapasztalat szerint az információtartalom növekedése $\ln(1/\varepsilon)$ -nal arányos:

$$D_1 \ln(1/\varepsilon) \sim \ln I(\varepsilon) = -\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} P_i(\varepsilon) \cdot \ln P_i(\varepsilon), \text{ ha } \varepsilon \text{ kicsi.} \quad (2.3.3.7)$$

A D_1 együtthatót információs dimenzióknak nevezzük, amely a fraktáeloszlás tagoltságára jellemző mérőszám, és megadja, hogy hányszorosára nő az információtartalom, ha az eloszlás meghatározásához használt felbontást finomítjuk. Az információs dimenzió a fraktáldimenzióval ellentétben nemcsak az alakzatot lefedő dobozok számától, hanem a kitöltöttségüktől is függ. (Tél és Gruiz, 2002)

Homogén eloszlás esetén belátható, hogy a fraktáldimenzió és az információs dimenzió megegyeznek:

$$D_1 = D_0. \quad (2.3.3.8)$$

Nem homogén eloszlásban, kaotikus viselkedésre jellemző esetekben mindig a

$$D_1 < D_0 \quad (2.3.3.9)$$

egyenlőtlenség teljesül. Az információs dimenzió annál jobban eltér a fraktáldimenziótól, minél inhomogénebb az eloszlás. (Götz, 2001; Tél és Gruiz, 2002)

A fraktáldimenzió és az információs dimenzió csak kettő a számos dimenzió közül, amelyekkel a kaotikus folyamatok, fraktálok jellemezhetők. A *korrelációs dimenzió* (D_2) egyik számítási módja egyszerű és nem nagy számításigényű, ezért numerikus kísérletekben különösen alkalmas a folyamatok dimenziójának meghatározására.

Legyen $H(r)$ azoknak a részecskepároknak a száma a szennyezésfelhőben, amelyeknek a távolsága kisebb, mint r . Ekkor ha r kicsi és teljesül a

$$H(r) \sim r^{D_2}, \quad (2.3.3.10)$$

arányosság, akkor a D_2 -t korrelációs dimenzióknak nevezzük. A részecskepárok távolságának meghatározása általában kisebb számításigényű feladat, mint a lefedő dobozok és a bennük található részecskék számának követése, így a korrelációs dimenzió becslésére gyakran alkalmazzák ezt az összefüggést. (Alligood et al., 1996)

Kimutatható, hogy a (2.3.3.10) definíció ekvivalens a korrelációs dimenzió egy másik számítási módjából adódó definícióval (Götz, 2001). Az előzőekben használt

jelölésekkel itt $\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} P_i^2(\varepsilon)$ ε -tól való függéséből következtethetünk a vizsgált alakzat korrelációs dimenziójára:

$$\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} P_i^2(\varepsilon) \sim \varepsilon^{D_2}, \text{ ha } \varepsilon \text{ kicsi,} \quad (2.3.3.11)$$

így a D_2 az $\ln \varepsilon$ függvényében ábrázolt $\ln \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} P_i^2(\varepsilon)$ pontokra illesztett egyenes meredekségéből becsülhető.

Munkánk során léggöri sodródási folyamatokban meghatároztuk az előbbieken felsorolt mérőszámokat néhány részecske, illetve egy-egy szennyezésfelhő esetén. A dolgozatban bemutatjuk, hogy a becsült értékek szemléletesen mit jelentenek a kaotikus sodródás folyamatában.

A következő fejezetben ismertetjük a szabad léggör különböző magasságaiban zajló sodródási folyamatok vizsgálatában a szakirodalomban eddig bemutatott eredményeket.

3. A kaotikus sodródás és jelentősége a légkörben

Az antropogén eredetű légszennyezés, a különböző légköri összetevők, a vulkánkitörésekkor a magasba lövellt hamu, gázok, aeroszol részecskék szabad légkörben való terjedése mind hatással lehetnek az élővilágra, a társadalomra, a gazdaságra.

A vulkánkitörésekkor levegőbe kerülő hamu erősen károsíthatja a repülőgépek hajtóműveit, akár a leállításukat is okozhatja (*Sándor és Wantuch, 2005*). Az Eyjafjallajökull vulkán 2010. áprilisi kitörései után az Európa fölé sodródó hamufelhő annyira kockázatosá tette volna a légi közlekedést, hogy számos járatot töröltek és Európa-szerte légtérzárakat rendeltek el. A vulkánműködés szerepet játszik a Föld átlaghőmérsékletének alakulásában is: a kitörések nagy mennyiségű finom port és hamut, kén-dioxidot juttatnak a légkörbe, ezek (a kén-dioxid esetében a képződő szulfát-részecskék) csökkentik a felszínre érő besugárzást, így a troposzférában hőmérsékletcsökkenést eredményeznek (*Péczely, 1979*).

A légköri áramlásokkal a magasabbra feljutó, hosszan a légkörben tartózkodó szennyezőanyagok a kibocsátási pontjuktól messzire elsodródhatnak, nagyobb térségben is szétterjedhetnek, elkeveredhetnek. Így már nem csak a kibocsátási hely környékén lokálisan, hanem egy nagyobb, kiterjedt terület fölött, akár egy félteke jelentős részén is kifejthetik ártalmas hatásukat (pl. baleseti szennyezőanyag-kibocsátás, stb.).

A sztratoszférában található ózonréteg elnyeli a Napból érkező, az élővilág számára káros (például a bőrrák kialakulásában lényeges szerepet játszó) ultraibolya sugárzás egy részét. A felszínre lejutó ultraibolya sugárzás mennyiségét jelentős befolyásoló ózonlyuk kialakulásában és eltűnésében is fontos szerepet töltenek be a különböző légköri összetevők kémiai reakciói és a sodródási folyamatok.

Mivel a szabad légköri áramlásoknak fontos szerepük van a nyomanyagok szállításában, ezért lényeges kérdés az itt történő sodródás részletesebb megismerése.

A légköri áramlásokban zajló sodródási jelenségeket többen vizsgálták a légkört modellező laboratóriumi forgó kádás kísérletekben, valamint különböző analízis, reanalízis vagy globális cirkulációs modellekből származó szélmezőket felhasználó numerikus modellek segítségével.

Behringer et al. (1991) laboratóriumi forgó kádás kísérletek megfigyelései alapján numerikus modellt alkotott, amellyel a kaotikus sodródást vizsgálta. A modellel

kétdimenziós, összenyomhatatlan folyadékban létrejövő kvázigeosztrofikus áramlást szimuláltak. Az áramlásban megjelenő jet két oldalán kváziperiodikus áramlás esetén gyors keveredést figyeltek meg. A jet azonban minden esetben akadályként viselkedett, rajta keresztül nem tapasztaltak jelentős transzportot még abban az esetben sem, ha a sebességmező turbulens volt.

Szintén forgó kádas kísérletekben tanulmányozta a kaotikus sodródást, diszperziót különféle áramlási viszonyok mellett *Salamon et al.* (1993; 1994). Lamináris áramlás esetén a követett részecskék szétterjedésében szuperdiffúziót tapasztaltak (a részecskék áthelyeződésének szórásnégyzete az időben hatványfüggvény szerint nő, ahol a hatványkitevő 1 és 2 közötti). Ezzel szemben a kísérleteikben a turbulens áramlásban zajló sodródás esetén nem lépett fel a lamináris áramlásban tapasztalt szuperdiffúziós viselkedés.

Homonnai (2008) a közepes szélességek áramlási viszonyai között történő részecskesodródást modellezte laboratóriumi körülmények között. *Salamon et al.* (1994) eredményeivel szemben, a kísérletekben a kifejlett turbulens tartományban is szuperdiffúziót tapasztalt. Ezen kívül vizsgálta a részecskéknek az edényben való körbeérésének az idejét, valamint a légkörre jellemző dimenziótlan számok ismeretében becslést adott arra vonatkozólag, hogy a mérsékelt övezetben egy szennyezésfoltnak a féltéken való körbeéréséhez mennyi idő szükséges.

A forgó kádas kísérletek mellett a valós szélviszonyokat figyelembe vevő légköri áramlásokban is szimulálták a sodródást.

Különböző kutatások igazolják, hogy a valódi, háromdimenziós légköri mozgásokat az izentrop (állandó potenciális hőmérsékletű) felületek mentén számolt trajektóriák jobban közelítik, mint az izobár (állandó nyomású) felületek mentén számított trajektóriák vagy a felszínkövető trajektóriák (*Merril et al.*, 1986; *Stohl*, 1998). Izentrop koordinátákban, adiabatikus és nem viszkózus körülmények között a részecskék trajektóriái kétdimenziósak. Az izentrop felületek mentén számított részecskepályák a troposzférában a háromdimenziós modellezett trajektóriák után a legpontosabbak, míg a sztratoszférában a két módszerrel meghatározott trajektóriák pontossága csaknem azonos (*Stohl and Seibert*, 1998).

Pierrehumbert and Yang (1993) a légkörben a 315 K-es izentrop felületen vizsgálta a kétdimenziós kaotikus keveredést passzív nyomjelző anyag segítségével. A felhasznált

szélességadatok globális modellből származtak. Tapasztalataik szerint a planetáris és szinoptikus skálájú örvények nagyon gyorsan finom szerkezetű alakzatokat formálnak a kezdetben sima nyomjelző mezőből. Megmutatták, hogy egy közepes szélességen induló, kezdetben lokalizált kis szennyezésfelhő szálas szerkezetűvé válik, és hossza időben sebesen nő. A felhő zonális mérete tíz nap elteltével időben lineárisan növekszik (szuperdiffúzió), míg meridionális szétterjedése időben gyökös növekedést tanúsít (klasszikus diffúzió). Munkájukban bemutatták, hogy a Ljapunov-exponenst finom szerkezetű térbeli eloszlás jellemzi, valamint megbecsülték a szennyezésfelhő korrelációs dimenzióját a kibocsátást követő egy, illetve két hónap elteltével. Több különböző vizsgálattal igazolták, hogy a trópusok és a trópusokon kívüli területek között egy részleges akadály helyezkedik el, amely gátolja a két térség közötti keveredést.

Egy későbbi tanulmányukban *Yang and Pierrehumbert (1994)* arra próbálták fényt deríteni, hogy milyen tényezők határozzák meg a relatív nedvességet a felső troposzférában. Ehhez egyszerű, a vízgőz advekciónak és kondenzációnak szimuláló modellt alkalmaztak, amelyben az előző cikkhez hasonlóan egy globális modell szélesség adatait használták föl, és számításokat ugyancsak a 315 K-es izentrop felületen végeztek. Tapasztalataik szerint a nedves és száraz levegősávok *Pierrehumbert and Yang (1993)* tanulmányával összhangban szálas, fraktál szerkezetekbe formálódnak (1. ábra). A kialakuló nedves, illetve felhős területek kiterjedését fraktáldimenzióval jellemezték, amely a modellükben a trópusoktól a sarkok felé távolodva csökkenő értéket mutatott (egy pixel felhővel borítottnak tekintettek, ha a relatív nedvessége nagyobb volt, mint 80%).

A szálas szerkezetek felbukkanását, amelyek a kaotikus sodródás következményei, már *Newell et al. (1992)* is megfigyelte troposzférikus vízgőzáramok számításakor. A szálaknak, amelyeknek a hossza jóval meghaladta a szélességüket, egy hasonlattal élve a „tropospheric river” (troposzférikus folyó) elnevezést adták.

Pierrehumbert and Yang (1993) és *Yang and Pierrehumbert (1994)* munkáiból kiderül, hogy a kezdetben kicsiny szennyezésfolt vagy részecskesokaság a sodródás során egyre nagyobb területre terjed szét. *Huber et al. (2000)* két, troposzférában található izentrop felületen (315 K és 330 K) vizsgálta a részecskék meridionális diszperzióját a szennyezésfelhők kibocsátását követő első tíz napban. A szimulációik alapján a trópusokon kívüli terjedést a szuperdiffúzió jellemzi, ami összhangban áll a forgó kádas kísérletek eredményeivel.



1. ábra: Relatív nedvesség a 315 K-es izentrop felületen az advekcíós-kondenzációs modellben 60 nap elteltével. A sötét árnyalatok a száraz levegőnek, a világos árnyalatok a nedves levegőnek felelnek meg (Yang and Pierrehumbert, 1994)

A troposzféra áramlásai jelentős szerepet játszanak a különböző nyomjelző anyagok szállításában, a szennyezőanyagok vagy üvegházgázok globális diszperziójában. A baroklin örvények rövid élettartamuk ellenére fontos szerepet töltenek be a közepes szélességeken a troposzféra áramlási viszonyainak kialakításában. *Von Hardenberg et al.* (2000) egy egyszerűsített globális cirkulációs modell szélmezejében, ilyen örvények terében vizsgálta meg a 315 K-es izentrop felületen a kaotikus keveredés, sodródás mérőszámait: a Ljapunov-exponenst, a 2^o-os felbontással kapott Shannon-féle entrópiát (amely a mező inhomogenitását méri) és a részecskék diszperzióját. Kimutatták, hogy a Ljapunov-exponens ott vesz fel nagyobb értéket, és a diszperzió is ott a legnagyobb, ahol jelentős szélnyírás lép fel, azaz az örvények közötti tartományokban. Viszont az örvények belsejében általában nem feltétlenül jellemzők a kis Ljapunov-exponensek vagy a gyenge diszperzió, csak a cut-off területeken. Ebben a régióban a Shannon-féle entrópia alapján sincs igazán keveredés, ezzel szemben az örvények határain erős keveredés figyelhető meg.

Nemcsak troposzférában, hanem sztratoszférában zajló sodródási folyamatoknak is lényeges szerep jut különböző légköri jelenségek alakításában, létrejöttében. A sztratoszférában főként az antarktisi ózonlyuk kialakulásával kapcsolatban történtek sodródással kapcsolatos vizsgálatok.

Bowman (1993) az antarktisi poláris örvényben és az azon kívüli tartományban elemezte a keveredést különböző izentrop felületeken a Déli-félteke tavaszán. A szélesség adatokat a Climate Analysis Center és a National Meteorological Center analízisei szolgáltatták. A keveredés és a sodródás jellemzésére Ljapunov-exponenseket számított, és vizsgálta a részecskék diszperzióját. A 450 K-es szinten és afölött a Ljapunov-exponensek a poláris örvény belsejében feleakkorának bizonyultak ($\lambda \approx 0,1$ 1/nap), mint az örvényen kívül ($\lambda \approx 0,2$ 1/nap), és hasonlóképpen a diszperziót is egy nagyságrenddel kisebbnek találta az örvényen belül (10^5 m²/s), mint a kinti területeken ($5 \cdot 10^5$ m²/s). Ezen a szinten az örvény határát igen kevés trajektória keresztezte. Alacsonyabb szinteken azonban a keveredés erősebbnek mutatkozott, és az örvény határán is nagyobb légcseré volt észlelhető.

Hasonló eredményekkel találkozhatunk *Mizuta and Yoden* (2001) cikkében is, akik modellezett áramlásban, ideális, barotrop poláris örvényben vizsgálták a kaotikus keveredést. *Bowman* (1993) munkájával összhangban az örvényen belül kisebb mértékű, kívül nagyobb fokú elkeveredést tapasztaltak, és a poláris örvény határa ebben a modellezett esetben is akadályozta az örvényen kívüli és belüli légtömegek cserélődését. A Ljapunov-exponens értékei is hasonlóan alakultak. Emellett a részecskék diszperziójának és a keveredésnek jellemzésére megbecsülték a korrelációs dimenziót. Ez megerősítette, hogy a kezdetben a féltekén véletlenszerűen elszórt részecskék a nyúlásnak és a gyűrődéseknek köszönhetően 30 nap alatt vonalszerű alakzatba rendeződtek, majd ezután egyre jobban térkitöltővé váltak.

A kaotikus keveredés, terjedés következtében létrejövő komplex, szálak szerkezetű mintát *Sutton et al.* (1994) is megfigyelte a sztratoszférában a műholdas adatokat felhasználó szimulációjával kirajzolt dinitrogén-oxid eloszlásmezőben. A szálak felépítés igen nagy skálán, 100 km-es és annál nagyobb léptékben jelent meg, és több napon keresztül fennmaradt.

A keveredés folyamán kialakuló fraktál szerkezetű nyomanyagmezőnek a kémiai reakciókban játszott szerepét *Wonhas and Vassilicos* (2003) elemezték részletesebben közepes szélességek fölött a ClO gyökök deaktivációjának ($\text{ClO} + \text{NO}_2 \rightarrow \text{ClONO}_2$) példáján. A ClO gyök a katalitikus ózonbomlás folyamatában játszik szerepet, azonban a fenti reakció még az ózon pusztítása előtt deaktiválhatja a ClO-t. *Wonhas and Vassilicos* (2003) a ClO és az NO₂ mező határának fraktáldimeziójának számítására a félteke speciális lefedését alkalmazta. A Földgömbön Északi-sark középpontú spirált definiáltak. A

spirálkarok és az egymástól azonos távolságokra lévő, erre merőleges vonalak határoztak meg egy-egy dobozt. Ezzel a lefedéssel szimulációikban a kezdetben az É. sz. 60°-tól északra található, ClO-ban gazdag és az ettől délre elhelyezkedő NO₂-ban bővelkedő levegő határának fraktáldimenziója a kiindulásbeli 1-ről (vonal) 15 nap alatt 1,5-re nőtt, és várakozásaik szerint a határvonal több nap elteltével egyre jobban térkitöltővé vált.

A továbbiakban a dolgozatban a felhasznált szélesség adatok és alkalmazott módszerek bemutatása után sorra vesszük, hogy a kaotikus sodródás jellemzői hogyan jelennek meg a sodródási képeken, és a 2.3. fejezetben felsorolt mérőszámok szemléletesen mit jelentenek. Ezek közül néhány mérőszám (Ljapunov-exponens, korrelációs dimenzió) előfordul mások korábbi kutatásaiban, így ezeket összehasonlíthatjuk az általunk kapott értékekkel. Ezeken kívül meghatároztunk olyan mennyiségeket (topologikus entrópia, illetve információs dimenzió), amelyeket tudomásunk szerint légköri sodródásban még nem vizsgáltak.

A kaotikus tulajdonságok számszerűsítésén kívül numerikus kísérleteket végeztünk arra vonatkozólag, hogy a kezdetben kicsiny, később egyre jobban széteszló szennyezésfelhő mennyi idő alatt ér körbe a féltekén, illetve mennyi idő szükséges ahhoz, hogy a szennyezésfelhő nagyjából egyenletesen beterítsen egy féltekét. Ezt az időtartamot eddig behatóbban csak a közepes szélességek áramlási viszonyait modellező forgó kádas kísérletekben vizsgálták (*Homonnai, 2008*).

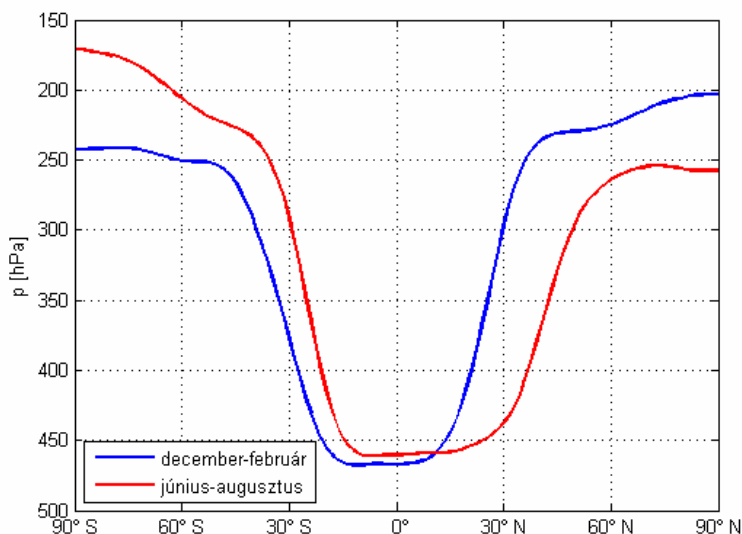
4. A vizsgálatainkban használt adatok és módszerek

4.1. A szélmező

Az előző fejezetben említett tanulmányokhoz hasonlóan a dolgozatban a részecskék trajektóriáit mi is izentrop felületek mentén számítjuk.

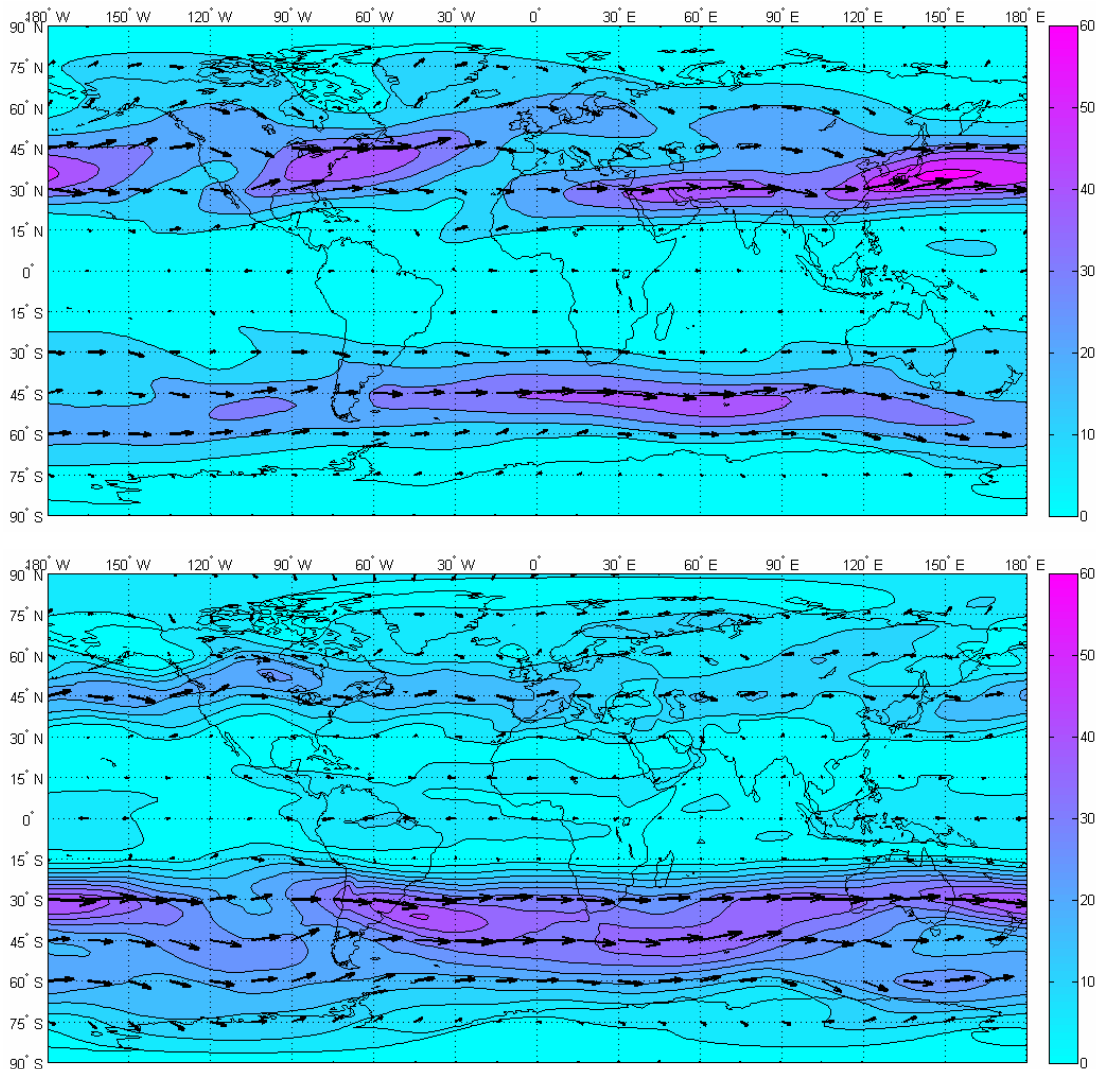
A szélmező $u(\lambda, \varphi, t)$ zonális, $v(\lambda, \varphi, t)$ meridionális szélességek izentrop felületekre vonatkozó adatai az ECMWF (European Center for Medium-Range Weather Forecasts) ERA-Interim reanalízis adatbázisából származnak (http://data-portal.ecmwf.int/data/d/interim_daily/levtype=pt/). A bárki által hozzáférhető, interneten elérhető változat térbeli felbontása $1,5^\circ \times 1,5^\circ$, időbeli felbontása 6 óra. A kaotikus sodródás mérőszámait, illetve a szétterjedő szennyezésfelhő átlagos körbeérési és homogenizálódási idejét egy téli (2006. december - 2007. február) és egy nyári (2007. június - augusztus) sebességmezőben vizsgáltuk. Ekkor vizsgálataink céljára a szabad légkörben található 330 K-es izentrop felületet választottuk. A 8. fejezetben a Kasatochi vulkán kitöréséhez készített szimulációhoz a 2008. augusztus 7-31-i, a kilövellt anyagok magasságának (11-15 km) megfelelő 350 K-es és 370 K-es szélmezőt használtuk.

A 2. ábrán látható, hogy a 330 K-es izentrop felület az Északi-félteke telén a sarkok közelében 200-250 hPa-ig nyúlik, míg a trópusokon a 470 hPa-nál találjuk. Nyáron az északi sarkvidéken megközelíti a 250 hPa-t, a Déli-sark környékén 170-200 hPa a nyomása.



2. ábra: A 330 K-es szint zonálisan és időben átlagolt nyomása a 2006. december-2007. február, illetve a 2007. június-augusztus időszakban

Ez az izentrop felület tehát már a planetáris határréteg fölött, a szabad légkörben található: a trópuson a közép troposzférában helyezkedik el, a sarkvidékek környékén a felső troposzférába és az alsó sztratoszférába emelkedik.



3. ábra: Átlagos szélesség [m/s] a 330 K-es izentrop felületen a 2006. december - 2007. február (fent) és a 2007. június-augusztus (lent) időszakban

A vizsgált téli és nyári időszakban az izentrop felületen uralkodó átlagos szélviszonyokról (szélességről és szélirányról) a 3. ábra ad tájékoztatást. Jól látszanak a közepes szélességeken jelenlévő, általában nyugati irányú, nagy (40-70 m/s) szélességek és a trópuson megfigyelhető, többnyire keleties, kisebb (0-5 m/s) értékek. A december-február időszakban kisebb az eltérés a két félteke átlagos szélviszonyai között, mint a június-augusztus hónapokban.

4.2. Az alkalmazott módszerek

A sebességmező értékeit az említett $1,5^\circ \times 1,5^\circ$ -os rácson és 6 órás időbeli felbontásban ismerjük. Azonban a részecskék trajektóriájának számításához közbülső helyeken vett sebességértékekre is szükségünk van, ezért megfelelő interpolációs eljárást kellett keresnünk. A legjobb interpolációs eljárás kiválasztására megvizsgáltuk, hogy olyan áramlási mezőben, ahol mindenütt ismerjük a pontos sebességértékeket, melyik interpoláció adja a valósághoz képest a legkisebb eltérést a sodródás jellemzőinek számításakor (ld. Függelék, F.1. fejezet). Vizsgálataink során azt tapasztaltuk, hogy az alkalmazott interpolációs eljárások közül a valódi értékeket a térben biköbös spline interpolációval számított sebességmezőben zajló sodródási jellemzők közelítik a legjobban.

Stohl et al. (1995) eltérő meteorológiai helyzetekben vizsgálta négy napra különböző interpolációkkal meghatározott trajektóriák pontosságát. Azt tapasztalta, hogy a legpontosabb trajektóriákat a horizontálisan biköbös interpolációval és az időben lineáris interpolációval számolt sebességkomponensek eredményezik, továbbá, hogy az időbeli interpolációból adódó hibák meghaladják a térbeli interpoláció miatt fellépő hibákat.

Az időbeli interpolációhoz és a részecskék követéséhez szükséges megfelelő időbeli felbontást 12 óra (*Merril et al.*, 1986) és 24 óra (*Pierrehumbert and Yang*, 1993) közé becsülték, így a dolgozatban használt ERA-Interim adatbázis 6 órás felbontása alkalmasnak tűnik a jó minőségű trajektóriák számításához.

Ezen eredmények alapján a sebességkomponensek térbeli interpolálására biköbös spline, időbeni interpolálására lineáris interpolációt alkalmaztunk. A biköbös spline mellett szól az a fontos tulajdonsága is, hogy divergenciamentes áramlásokban biztosítja a tömegmegmaradást. (*Bermejo*, 1990; *Staniforth and Côté*, 1991).

Meg kell említeni, hogy vannak olyan sodródási jellemzők (pl. körbeérési idő, homogenizálódási idő), amelyeknél azt tapasztaltuk, hogy az eredményeket nem nagyon befolyásolja, milyen interpolációt választunk. Azonban más mennyiségekben, amelyekben a szennyezésfelhő finom, szálás szerkezetű alakzattá való fejlődése szerepet játszik (szálhossz, fraktáldimenzió), a térben $1/r^2$ -es interpolációval nem kaptunk fizikailag helytálló eredményeket, mivel ez az interpolációs eljárás sokkal jobban szétszórja a szennyezésfelhő részeit, azok inkább egyedi pontokká, mint vonalak részeivé válnak.

A részecskék követésére Fortran programot írtam, amely a részecskék pályáit a (2.2.6) közöséges differenciálegyenletek numerikus megoldásával számítja negyedrendű Runge—Kutta-módszerrel, rögzített lépésköz mellett.

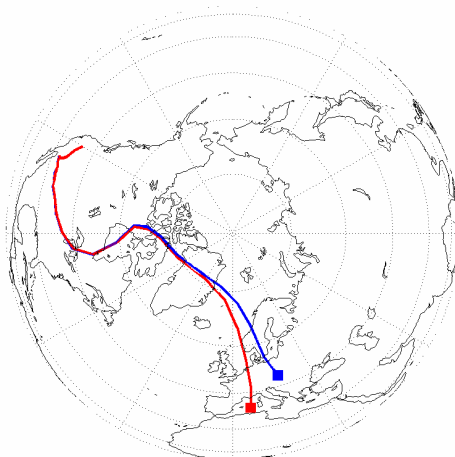
A következő fejezetekben bemutatjuk vizsgálataink eredményeit: a kaotikus sodródás 2.3. fejezetben felsorolt jellemzőit, majd a szennyezésfelhők féltekén való körbeéréséhez és homogenizálódásához szükséges idő földrajzi és évszakos eloszlását.

5. Kezdeti feltételekre való érzékenység

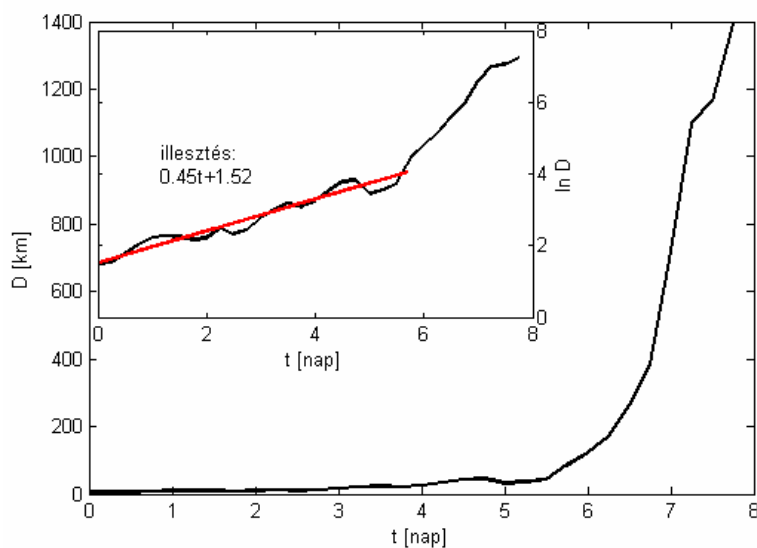
5.1. Néhány részecske sodródása

A kaotikus rendszerek igen érzékenyek a kezdőfeltételekre, jellemző a közeli pályák gyors (exponenciális) eltávolodása, ezért a mozgás hosszú távon előrejelezhetetlen. A kiindulási állapotra való érzékenységet figyelhetjük meg a 4.a ábrán, ahol két, kezdetben egymáshoz közeli részecske útvonalának szétválását követhetjük nyomon a 330 K-es izentrop felületen. A két részecske az É. sz. 40°, Ny. h. 120° középpont körül (San Francisco közelében), egymástól 4,5 km-re indul 2006. december 1-jén.

a)



b)



4. ábra: Két közeli, 2006. december 1-jén induló részecske 8 nap alatt megtett pályája (a), illetve a távolságuk az idő függvényében (fekete) és a 0-5. napra illesztett exponenciális görbe (piros) (b)

A kibocsátástól számított 6. nap elteltével a közöttük lévő távolság már meghaladja a 120 km-t, és egyre sebesebben nő. A 8. napon a részecskék 1400 km-re kerülnek egymástól, tehát a kezdeti eltérés több mint 300-szorosára növekszik egy hét alatt. Ahogy a 4.b ábrán is láthatjuk, a távolság időfüggése jól közelíthető exponenciális függvénnyel (piros egyenes).

5.2. Ljapunov-exponens

A sodródás során tehát két, kezdetben szomszédos részecske közötti távolság tipikusan exponenciálisan növekszik.

A lokális Ljapunov-exponensek becsléséhez a (2.3.1.1) összefüggést használtuk fel, és a szimulációk során a részecskék távolságát gömbi főkörök mentén számítottuk:

$$\cos \gamma_{12} = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos(\lambda_1 - \lambda_2). \quad (5.2.1)$$

Itt γ_{12} jelöli a részecskék gömbi távolságát, λ_1 és λ_2 , illetve φ_1 és φ_2 a két részecske hosszúsági és szélességi koordinátáit.

A 4.b ábráról az adatokra illesztett függvényből leolvastva a lokális Ljapunov-exponens $\lambda = 0,45$ 1/nap.

Egy-egy pont körül a részecskék távolodásának mértéke eltérő lehet attól függően, hogy a két részecske milyen irányban helyezkedik el a pont körül. Adott földrajzi helyre meghatározhatjuk a lokális átlagos Ljapunov-exponenst is, ha a hely körül több részecskepárt indítunk, és követjük azok pályáját. A részecskepárok közötti távolságok logaritmusának átlagából számítható az adott helyre vonatkozó $\bar{\lambda}(\vec{r})$ átlagos Ljapunov-exponens:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln D_i(\vec{r}, t) = \overline{\ln D_i(\vec{r}, t)} \sim \bar{\lambda}(\vec{r}) \cdot t, \quad (5.2.2)$$

ahol a felülvonás az n részecskepárra vonatkozó átlagot jelöli, $D_i(\vec{r}, t)$ az i -edik részecskepár távolsága.

Az 1. táblázatban néhány, szintén december 1-jére, 5 napra vonatkozó lokális átlagos Ljapunov-exponenst soroltunk fel az É. sz. 40° , Ny. h. 120° közelében, amelyeket $n = 5000$ részecskepár segítségével becsültünk. Látható, hogy igen nagy különbségek

lehetnek kis területen belül is az egyes helyekre vonatkozó értékek között. Ezen a területen a Ljapunov-exponensek átlaga 0,29 1/nap, szórása 0,12 1/nap.

Ny. h. É. sz.	122°	121°	120°	119°	118°
42°	0,27	0,22	0,30	0,29	0,33
41°	0,18	0,10	0,17	0,10	0,25
40°	0,29	0,44	0,25	0,56	0,25
39°	0,17	0,21	0,41	0,24	0,37
38°	0,51	0,25	0,42	0,28	0,46

1. táblázat: Néhány pont 5 napra vonatkozó lokális átlagos Ljapunov-exponense [1/nap] 2006. december 1-jén

Jelentősen más kezdőfeltételt véve, 2007. július 1-jén, Magyarország környékén, a az É. sz. 47°, K. h. 19° középpont körüli 2°-os mezőben a Ljapunov-exponensek átlaga 0,28 1/nap-nak, míg a szórása 0,20 1/nap-nak adódott.

A troposzférában a légköri Ljapunov-exponensek földrajzi eloszlásával kapcsolatban *Pierrehumbert and Yang* (1993) végzett kutatásokat. Megállapították, hogy λ nagyon finom szerkezetű területi eloszlással rendelkezik: az egymástól mindössze 1°-ra induló pályák Ljapunov-exponensei akár ötszörös szorzóval is eltérhetnek egymástól. Kutatásaik szerint a légköri Ljapunov-exponensek többnyire 0,1 - 0,6 1/nap közé esnek, és a λ hisztogramján hegyes csúcs jelenik meg $\lambda = 0$ -nál, ami kis számú nem kaotikus pálya jelenlétére utal. Ehhez hasonló eredményekről számolt be *Von Hardenberg et al.* (2000) és *Wright* (2003) is, bár *Wright* (2003) a Ljapunov-exponensek globális földrajzi eloszlását homogénabbnak találta, mint *Pierrehumbert and Yang* (1993). Ezt a jelenséget a számottevően hosszabb integrálási időből adódó átlagolódnási hatásokkal magyarázta (*Pierrehumbert and Yang* (1993): 10, 30 és 60 nap; *Wright* (2003): 365 nap).

A szabad légkörben szimulációink alapján a Ljapunov-exponensek átlaga $\bar{\lambda} \approx 0,3$ 1/nap, ami összhangban áll *Pierrehumbert and Yang* (1993), *von Hardenberg et al.* (2000) és *Wright* (2003) eredményeivel. Ez a szám azt fejezi ki, hogy a részecskék mozgásának előrejelzési hibája átlagosan 3-4 naponta e-szeresére (körülbelül 2,71-szeresére) nő.

6. Bonyolult geometriai megjelenés

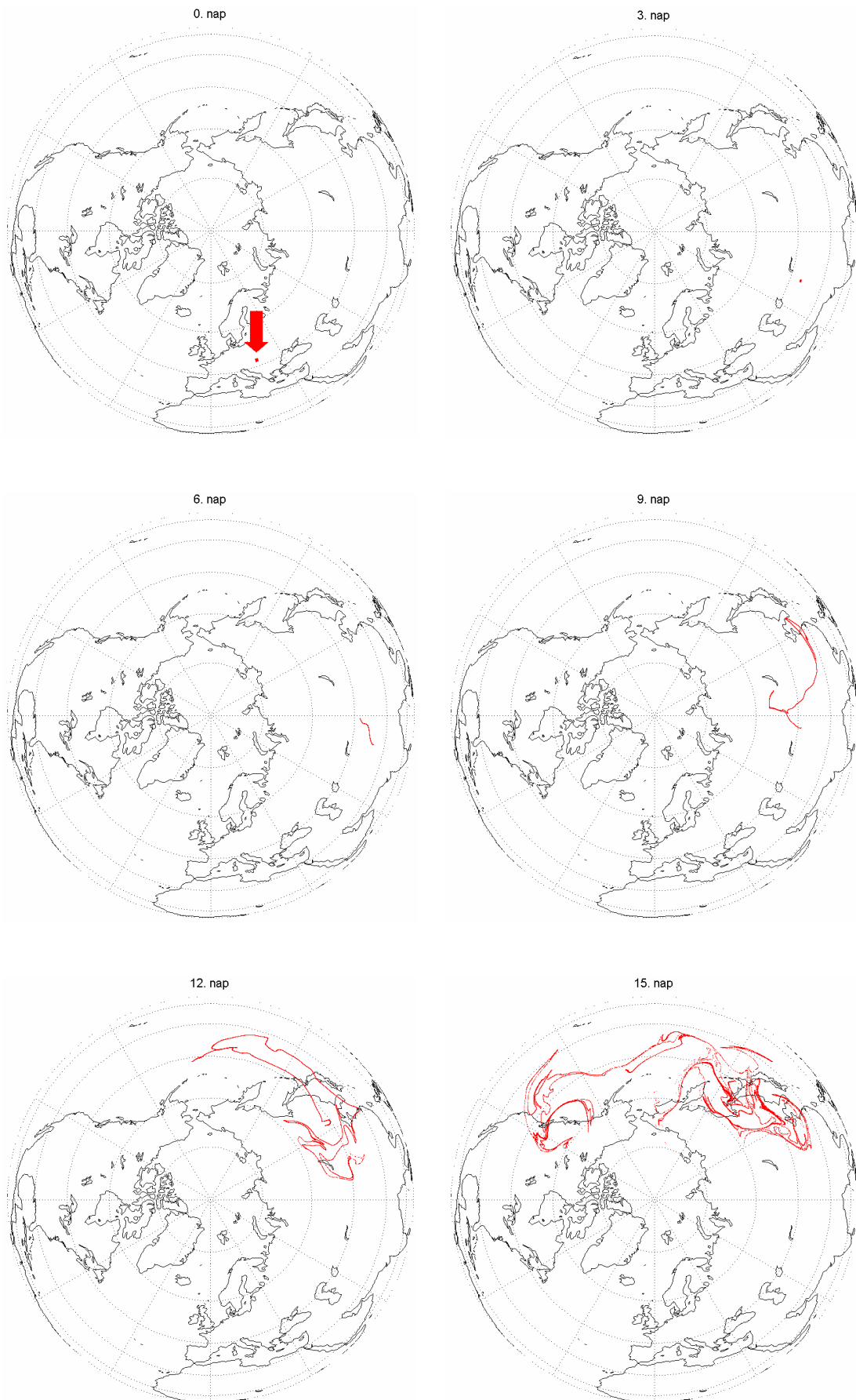
6.1. Egy szennyezésfelhő terjedése

Szennyezésterjedési problémákban nem néhány részecske, hanem egy kisebb-nagyobb tartományt kitöltő szennyezésfelhő terjedésének a követése a lényeges. A szennyezésfelhő pontjai alkotják azt a részecskesokaságot, amelynek minden eleme a felhő kezdeti alakjából indul.

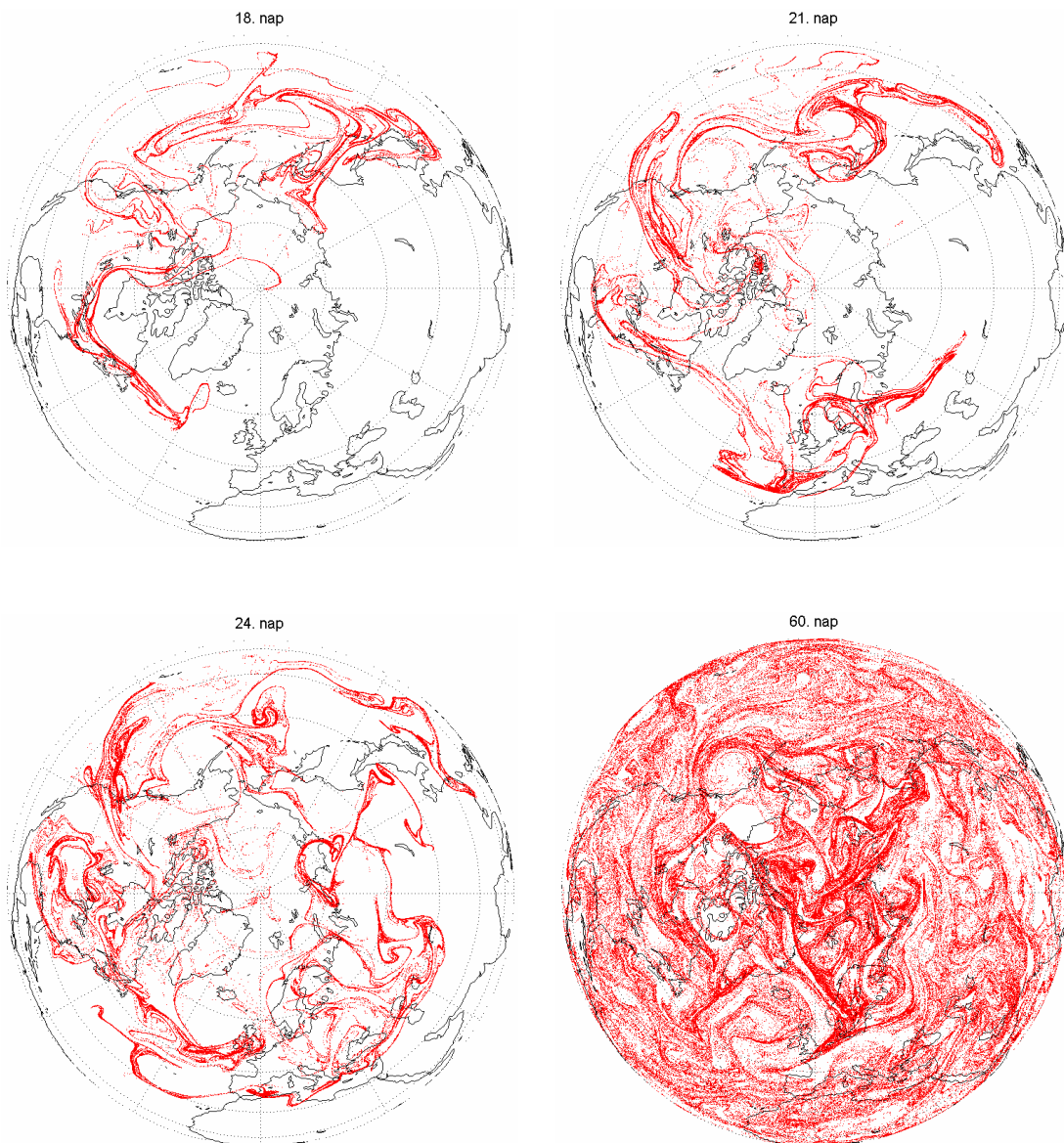
Az 5. ábrán egy kezdetben koncentrált $1^\circ \times 1^\circ$ -os szennyezésfelhő tipikus széteszlását láthatjuk. A felhőt 2007. július 1-jén az É. sz. 47° , K. h. 19° -ról (Magyarország) indítottuk, és a részecskéinek pályáit a 330 K-es izentrop felület mentén számoltuk. A szennyezésfelhő 10 km-es magasságban indul, és $2,5 \cdot 10^5$ darab részecske összességéből áll. A felhő eleinte még koncentrált marad, de elkezd deformálódni. Néhány nap elteltével a felhő egyre jobban deformálódik, nyúlik, széthúzódik, kacsok alakulnak ki, amelyek egyre vékonyabb és hosszabb szálakká fejlődnek.

A vonalszerű alakzat hossza egyre jobban nyúlik, a 9. naptól kezdődően pedig megfigyelhetők az ábrán a szálak szerkezet gyűrődései is. A szálak hosszúságának növekedése és az egymást követő gyűrődések végül azt eredményezik, hogy a szennyezésfelhő részecskéi előbb-utóbb betérítik a féltekét. A két félteke között szinte nincs átjárás, a másik féltekére a részecskéknek csak nagyon kis része jut át.

A megfigyelésekkel összhangban a sodródási képek is azt mutatják, hogy a szennyezésfelhő nem egy szélességi kör mentén terjed és oszlik szét, hanem szálak, fraktál alakzatban teríti be a féltekét, amelyen sűrűsödések (nagyobb szálvastagság) és ritkulások figyelhetők meg (ld. 21. és 24. nap).



5. ábra: 2007. július 1-jén az É. sz. 47°, K. h. 19°-ról indított 1°×1°-os, $2,5 \cdot 10^5$ részecskéből álló szennyezésfelhő szétterjedése



5. ábra (folytatás): 2007. július 1-jén az É. sz. 47°, K. h. 19°-ról indított 1°×1°-os, 2,5·10⁵ részecskéből álló szennyezésfelhő szétterjedése

Megvizsgálhatjuk, hogy milyen pályát ír le a részecskék tömegközéppontja. A tömegközéppontot a következőkben ismertetett módon számítjuk. Legyenek a részecskék hosszúsági, illetve szélességi koordinátái $\lambda_i, \varphi_i, i = 1, \dots, n$ (ahol n a szennyezésfelhő részecskéinek száma). Először kiszámítjuk a részecskesokaság térbeli tömegközéppontját háromdimenziós Descartes-i koordináta-rendszerben, amelynek középpontja a Föld középpontja, x tengelye a K. h. 0° felé, y tengelye a K. h. 90° felé, z tengelye pedig az Északi-sark irányába mutat. A részecskék térbeli koordinátái:

$$\begin{aligned}
x_i &= R \cos \varphi_i \cos \lambda_i, \\
y_i &= R \cos \varphi_i \sin \lambda_i, \quad i = 1, \dots, n, \\
z_i &= R \sin \varphi_i,
\end{aligned}
\tag{6.1.1}$$

ahol R az izentrop felületnek a Föld középpontjától mért távolsága. A vizsgálatainkhoz alkalmazott izentrop felületek a felszín fölötti 5-15 km magasságban helyezkednek el, ami a Föld átlagos sugarának (6370 km) csupán néhány ezreléke. Ezért a számításokhoz az $R = 6370$ km értéket használtuk.

Az x_i, y_i, z_i ($i = 1, \dots, n$) koordinátákból kiszámítjuk a részecskék térbeli $(x_{tkp}, y_{tkp}, z_{tkp})$ tömegközéppontját, amely a Föld belsejébe esik:

$$\begin{aligned}
x_{tkp} &= \sum_{i=1}^n x_i / n, \\
y_{tkp} &= \sum_{i=1}^n y_i / n, \\
z_{tkp} &= \sum_{i=1}^n z_i / n.
\end{aligned}
\tag{6.1.2}$$

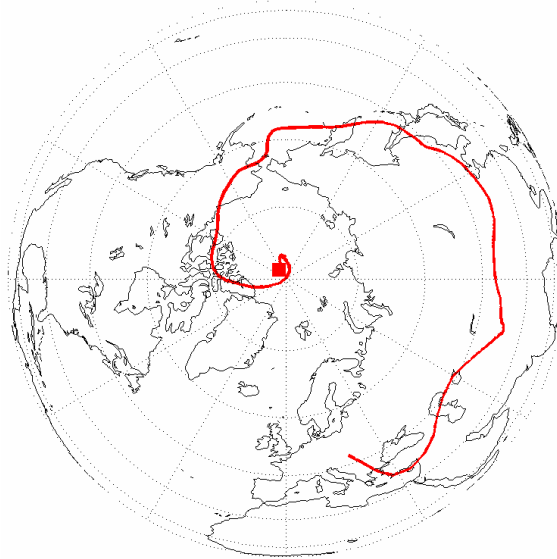
A tömegközéppont a szennyezésfelhő szétoszlása közben egyre közelebb esik a Föld tengelyéhez, hiszen (ahogy az 5. ábrásorozaton is látható) a részecskék a félteke egyre nagyobb részére terjednek szét.

A tömegközéppont hosszúsági (λ_{tkp}) és szélességi (φ_{tkp}) koordinátái:

$$\begin{aligned}
\lambda_{tkp} &= \arctan \left(\frac{y_{tkp}}{x_{tkp}} \right), \\
\varphi_{tkp} &= \arctan \left(\frac{z_{tkp}}{\sqrt{x_{tkp}^2 + y_{tkp}^2}} \right).
\end{aligned}
\tag{6.1.3}$$

A szétterjedés során nagyléptékben a szennyezésfelhő egyre nagyobb területet foglal el, egyre egyenletesebben oszlik el a féltekén (kisebb skálán megfigyelhetők a kacsok, szálak vastagodásai és vékonyodásai). A tömegközéppontnak a Föld tengelyétől mért távolsága csökken ($\sqrt{x_{tkp}^2 + y_{tkp}^2}$ kicsi), így φ_{tkp} egyre kevésbé tér el a 90° -tól.

A 6. ábra az 5. ábrásorozatnak megfelelően szétterjedő szennyezésfelhő tömegközéppontjának pályáját mutatja sugárirányban a felszínre visszavetítve. A tömegközéppont a felhő szétoszlása folyamán egyre jobban megközelíti a Föld forgástengelyét.



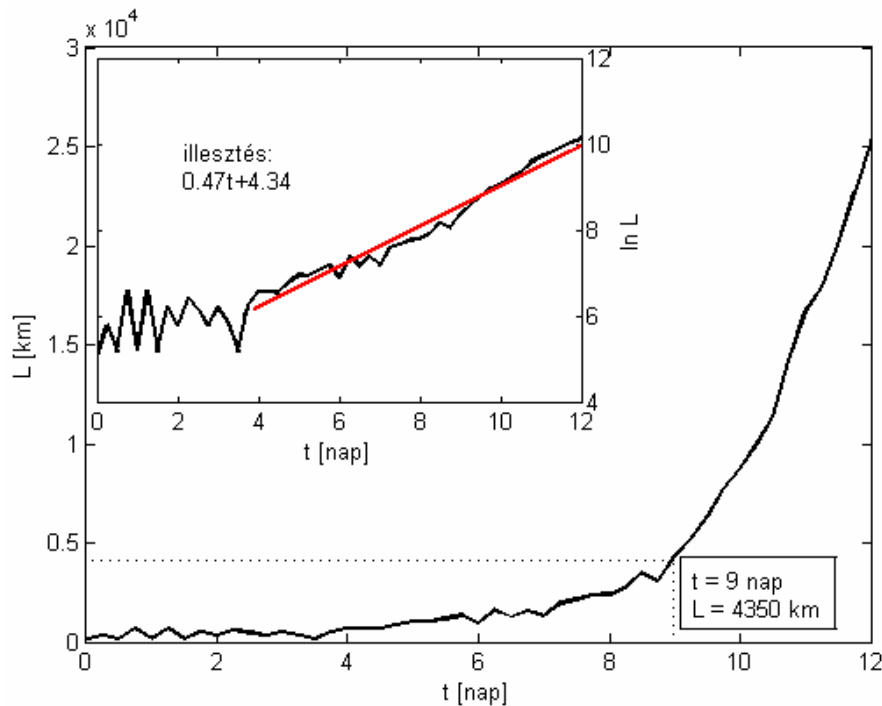
6. ábra: Az 5. ábrán indított szennyezésfelhő tömegközéppontjának pályája az első 30 napban (a végpontot a piros négyzet jelöli)

6.2. Topologikus entrópia

Az 5. ábra mutatja, hogy az eleinte kompakt szennyezésfelhő hamar deformálódik, szálas, szövevényes szerkezetűvé fejlődik. A szabálytalanság, bonyolultság mértékét, egy vonaldarab megnyúlási arányát a 2.3.2. fejezetben definiált topologikus entrópiával számszerűsíthetjük. Ezt a mennyiséget a szennyezésfelhőre a (2.3.2.1) összefüggés alapján becsüljük meg.

A szennyezésfelhő terjedése során a fejlődő szálak hosszát úgy határozzuk meg, hogy megszámláljuk, hogy hány megfelelően kicsi méretű „doboz”-ra van szükség ahhoz, hogy lefedjük az alakzatot. A dobozok méretének ismeretében ($2^\circ \times 2^\circ$) következtethetünk a szál hosszára. Ennek a módszernek az a hátránya, hogy a felhő véges sok pontszerű részecskéből áll (ez jelen esetben $2,5 \cdot 10^5$), így előbb-utóbb a dobozok méretének szempontjából már nem tekinthető egy „összefüggő” vonalnak, hanem különálló pontokra eshet szét, esetleg a részecskék bizonyos területen olyan messzire kerülnek egymástól, hogy dobozszámlálásnál a vonal szétszakadását észleljük. Ekkor kevesebb doboz fed le az alakzatot, mint amennyi a folytonos vonalat takarná, és az exponenciális összefüggés nem lesz már érvényes. A mozgás elején pedig a szennyezésfelhőnél nagyobb méretű dobozokból számítva a felhő méretét, nagyobbak mutatják a felhőt a valóságos kiterjedésénél.

Az 5. ábrán indított szennyezésfelhő hosszának változását láthatjuk a 7. ábrán (fekete görbe). A 4. naptól kezdve az exponenciális függvény (piros görbe) valóban jól illeszkedik rá. A felhő kezdeti mérete 71 km, ez néhány nap alatt megsokszorozódik, a 9. napon már a Föld sugarának kétharmada a szál hossza (4350 km), amely elkezd gyűrődni is (ld. 5. ábra), a 12. napon pedig a kacsok mérete meghaladja a 25000 km-t is. Ebben az esetben a hossz meghatározásának időbeli korlátja 12 nap: az 5. ábrán a 12. nap után szabad szemmel is megfigyelhető, hogy egyes területeken a szálát már nem összefüggő vonalnak, hanem különálló pontoknak látjuk. A topologikus entrópia ebben az esetben az illesztett exponenciális függvény egyenletéből leolvassa: $h = 0,47$ 1/nap, azaz a vonaldarab körülbelül kétnaponta e-szeresére nyúlik.



7. ábra: A 2007. július 1-jén az É. sz. 47°, K. h. 19°-ról indított 1°×1°-os, $2,5 \cdot 10^5$ részecskéből álló szennyezésfelhő hossza az idő függvényében (fekete) és a 4-12. napra illesztett exponenciális görbe (piros)

A 2. táblázatban néhány, az É. sz. 47°, K. h. 19° földrajzi hely körüli 1°×1°-os szennyezésfelhő 4-12. napra vonatkozó topologikus entrópiáját tüntettük fel. Ezek között nem figyelhető meg olyan nagy mértékű változékonyság, mint az átlagos Ljapunov-exponensek esetén: a területen a topologikus entrópiák átlaga 0,46 1/nap, szórása 0,04 1/nap.

Ny. h. É. sz.	17°	18°	19°	20°	21°
49°	0,48	0,45	0,45	0,42	0,37
48°	0,41	0,41	0,45	0,43	0,42
47°	0,47	0,47	0,47	0,52	0,52
46°	0,47	0,45	0,53	0,49	0,45
45°	0,47	0,48	0,48	0,50	0,44

1. táblázat: 2007. július 1-jén indított, $1^\circ \times 1^\circ$ -os, $2,5 \cdot 10^5$ részecskéből álló szennyezésfelhők 4-12. napra vonatkozó topologikus entrópiája [1/nap]

Más szerzők légköri topologikus entrópia vizsgálatairól nincs tudomásunk, azonban összehasonlításképpen megemlíjtük, hogy az óceánokban, ahol sokkal lassabban zajlanak a sodródási folyamatok, a topologikus entrópia értéke ennél körülbelül egy nagyságrenddel kisebb: a Labrador-tengerben vizsgált trajektóriák esetén a topologikus entrópia 0,02 1/nap-nak adódott (*Thiffeault*, 2010).

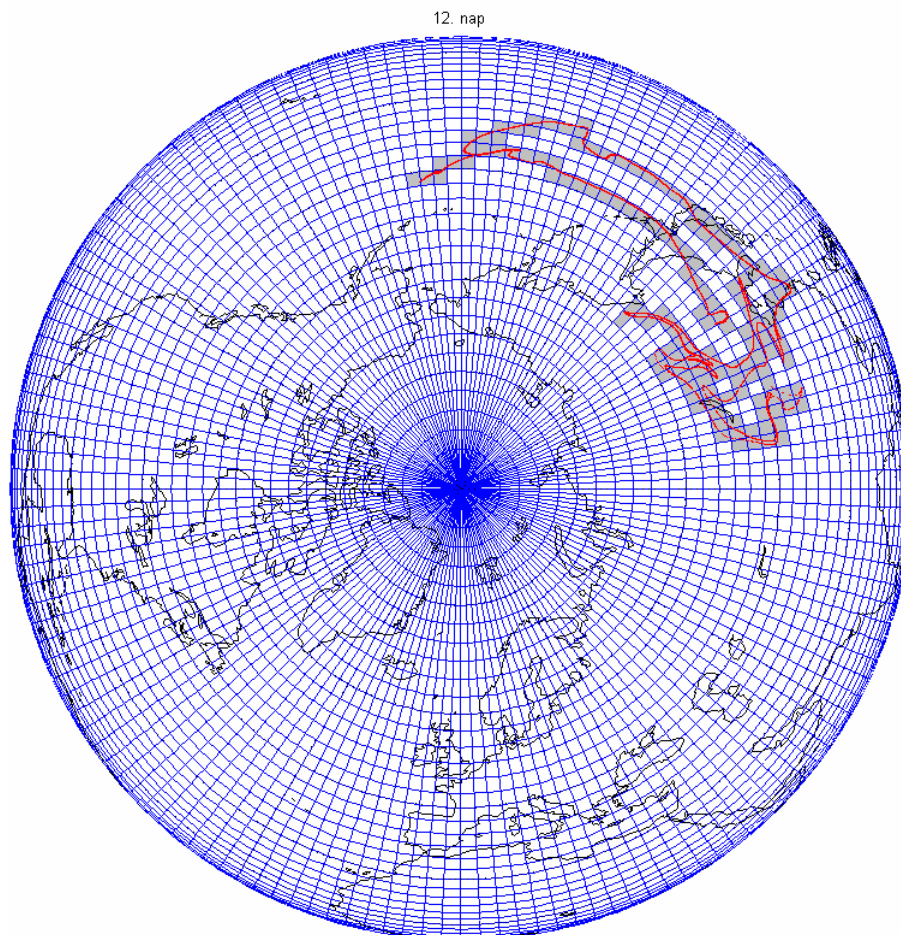
6.3. Fraktáldimenzió

A kaotikus viselkedés, ahogyan az 5. ábrarozaton is láthatjuk, bonyolult geometriai szerkezetek (fraktálok) felbukkanásával jár, amelyeket a 2.3.3. fejezetben is felsorolt különböző dimenziókkal lehet jellemezni. A dimenziók kiszámításához szükséges a vizsgált alakzat (a szennyezésfelhő) egyforma oldalhosszúságú dobozokkal való lefedése, és a lefedő dobozok számának meghatározása. A szennyezésfelhő szétterjedése gömbfelületen megy végbe, a gömböt pedig nem lehetséges azonos méretű dobozokkal beborítani. Így első közelítésben a 8. ábrán látható lefedési módszert alkalmaztuk. Itt a dobozok oldalainak nagyságát szögekben mérjük, és a dobozokat az egymástól ε szögre elhelyezkedő szélességi és hosszúsági körök alkotják.

A felhő fraktáldimenzióját adott időpillanatban a (2.3.3.2) összefüggés alapján határozhatjuk meg. Esetünkben ε kicsinsége annak felel meg, hogy a lefedő dobozok oldalhosszúsága sokkal kisebb, mint a Föld kerülete, azaz fokokban mérve $\varepsilon \ll 360^\circ$.

A D_0 fraktáldimenziót tehát az $\ln N$ mennyiséget $\ln(1/\varepsilon)$ függvényében megadó grafikonból számíthatjuk ki. Ekkor az illetétt egyenesek meredeksége éppen D_0 . A dolgozatban $N(\varepsilon)$ -t az $\varepsilon = 0,2^\circ, 0,4^\circ, 0,8^\circ, 1^\circ, 1,2^\circ, 1,5^\circ, 1,8^\circ, 2,5^\circ, 3^\circ, 3,6^\circ, 4,5^\circ, 6^\circ, 7,2^\circ, 10^\circ, 12^\circ, 15^\circ, 20^\circ$ értékekre számítottuk. A követett részecskék száma alsó határt szab a lehetséges ε -oknak: túl kicsi ε esetén már különálló pontoknak érzékeljük a szennyezésfelhőt, miközben nagy dobozmérettel végezve a mérést $D_0 \approx 2$ eredményt

kapunk az alakzatra. Ha a mérési pontok ábrázolásakor a túlságosan kisméretű dobozokhoz tartozókat is figyelembe vesszük, akkor nem egyenes, hanem konkáv görbe adódik.

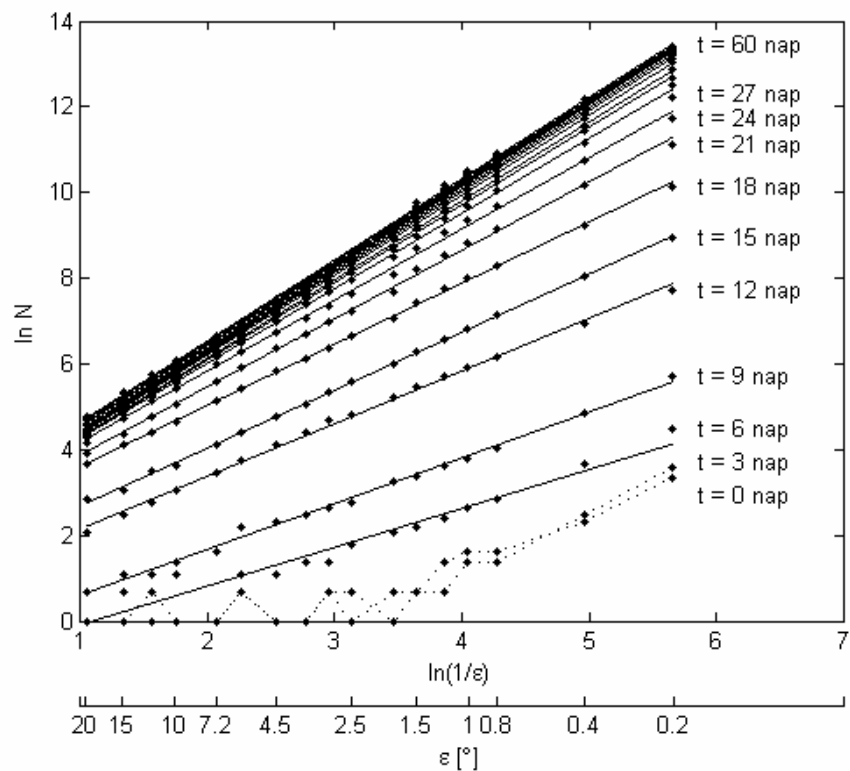


8. ábra: A Föld lefedése 2,5°-os dobozokkal, és az 5. ábrán látható szennyezésfelhőt (piros) lefedő dobozok (szürke) a 12. napon

A 9. ábrán egy 2007. július 1-jén az É. sz. 47° , K. h. 19° -ról induló $1^\circ \times 1^\circ$ méretű, $2,5 \cdot 10^7$ részecskéből álló szennyezésfelhő szétterjedése során 3 naponta illesztettünk egyeneseket a mérésekre (körök) 2 hónapon keresztül. A legelső, a nagyobb dobozméretű esetén közel vízszintes pontozott vonal a felhő indítását jelzi: ekkor a kicsiny szennyezésfelhő a Föld méretéhez viszonyítva még „pontoszerű”, az egyenes meredeksége 0, azaz a fraktáldimenzió is 0. (A szennyezésfelhő kezdetben a nála kisebb dobozok szemszögéből nézve kétdimenziós, így a $t = 0$ nap és a $t = 3$ nap esetén a $0,2^\circ$ -tól 1° -ig illesztett egyenes meredeksége 2-höz közeleli.) Ahogyan az idő telik, a felhő egyre jobban széteszik: bármekkora méretű dobozokkal is fedjük le a keletkező alakzatot, mindegyikből

egyre többre lesz szükség, így a mérési pontok és az illesztett egyenesek felfelé tolódnak. Mivel már nem pontszerű alakzatról van szó, az egyenesek meredeksége is növekszik. A 2. hónapban az illesztett egyenesek és a mérési pontok besűrűsödnek: ekkor a szennyezésfelhő kiterjedése már sokkal kevésbé növekszik, mint a mozgás elején.

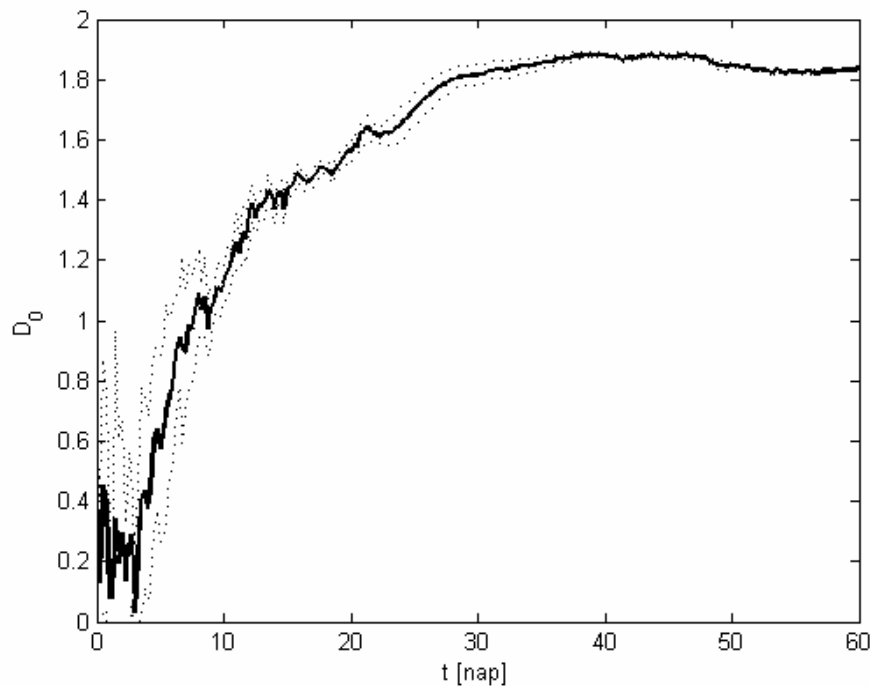
A 9. ábrán feltűnő, hogy az első néhány napban (0-6. nap) a mérési pontokra még a szennyezésfelhő kiterjedésénél nagyobb dobozok esetében sem illeszkednek jól az egyenesek. Ennek az előző bekezdésben említett magyarázat mellett még az is oka, hogy a szennyezésfelhő bármilyen kicsiny is, kerülhet bizonyos felbontásban éppen két (vagy több) doboz határára, bár valójában egyetlen doboz is lefedné. Ez okozza a mérési pontok elhelyezkedésének egyenestől való eltérését, de az 5. ábrán láthatjuk, hogy például a 3. napon a szennyezésfelhő valójában még mindig pontszerű. Ahogyan a felhő egyre nagyobb kiterjedésűvé válik, a mérési hiba elhanyagolhatóvá válik, hiszen egyre több doboz fed le az alakzatot. Jól látszik, hogy az első néhány naptól eltekintve a (2.3.3.1) arányosság két nagyságrenden keresztül teljesül.



9. ábra: A D_0 fraktáldimenzió becsléséhez 3 naponta illesztett egyenesek a 2007. július 1-jén az É. sz. 47° , K. h. 19° -ról indított $1^\circ \times 1^\circ$ -os, $2,5 \cdot 10^7$ részecskéből álló szennyezésfelhő szétterjedése esetén (ε : dobozméret, N : lefedő dobozok száma)

A 10. ábrán a D_0 fraktáldimenzió időbeli fejlődését (vastag fekete vonal) figyelhetjük meg, amely mellett feltüntettük az egyenesek illesztésének hibáját is (pontosított fekete vonal). Ez azt méri, hogy a pontok mennyire helyezkednek el az illesztett egyenes mentén, mekkora az illesztett egyenestől való átlagos négyzetes eltérésük. A D_0 menete összevetve a szennyezésfelhő terjedését bemutató 5. ábrásorozattal, könnyen értelmezhető.

A sodródás során a felhő kezdi elveszíteni kezdeti pontszerű, kompakt alakját, előbb-utóbb vonalszerűvé válik, így fraktáldimenziója 1-hez közelít. Majd a szálas szerkezet egymás utáni gyűrődéseivel, egyre nagyobb mértékű megnyúlásával a részecskesokaság beborítja szinte az egész féltekét, így kétdimenziós alakzathoz kezd hasonlítani, majdnem kitölti a rendelkezésére álló teret, és a fraktáldimenzió ekkor már megközelíti a 2-t.



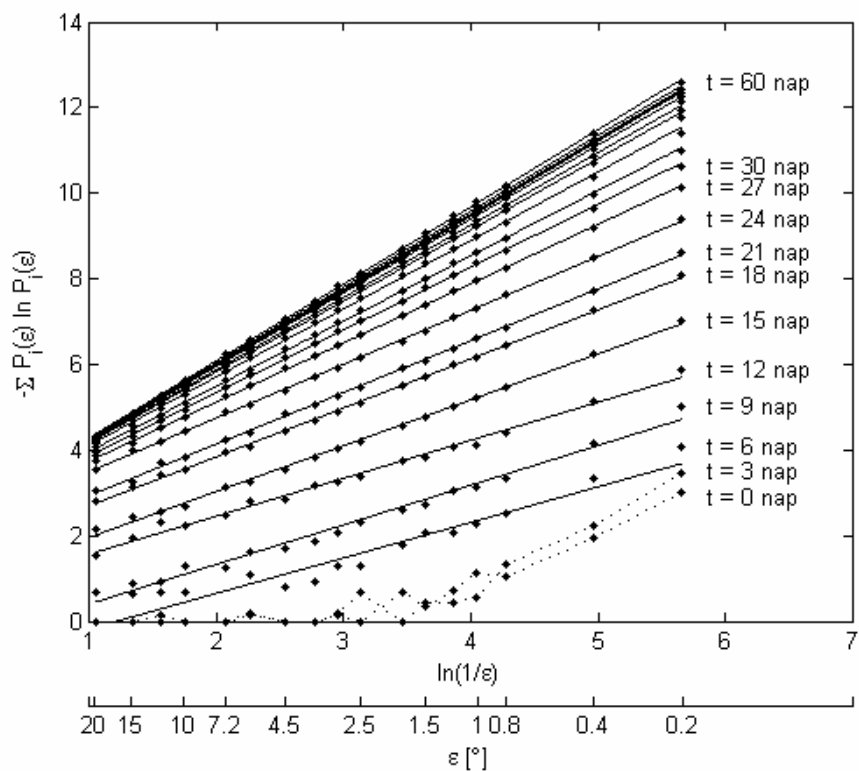
10. ábra: A D_0 (vastag fekete) fraktáldimenzió és az illesztés hibájának (pontosított fekete) időbeli változása a 2007. július 1-jén az É. sz. 47°, K. h. 19°-ról indított $1^\circ \times 1^\circ$ -os, $2,5 \cdot 10^7$ részecskéből álló szennyezésfelhő szétterjedése esetén

A fraktáldimenzió első néhány napban tapasztalható jelentős illesztési hibái és nagy ingadozásai az előzőekben említett mérési hiba következményei, és a valóságban a szennyezésfelhő kiterjedését tekintve nem tapasztalhatók. Észrevehető, hogy az illesztési

hiba valóban csökken az eltelt idő folyamán a felhő egyre nagyobb mértékű szétoszlásával párhuzamosan.

6.4. Információs dimenzió

A 11. ábra az előző fejezetekben vizsgált $1^\circ \times 1^\circ$ méretű szennyezésfelhő szétoszlása során mutatja, hogyan függ a (2.3.3.5) egyenlettel definiált $-\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} P_i(\varepsilon) \cdot \ln P_i(\varepsilon)$ információ $\ln(1/\varepsilon)$ -től. Az egyenesek meredeksége adja a D_1 információs dimenziót.



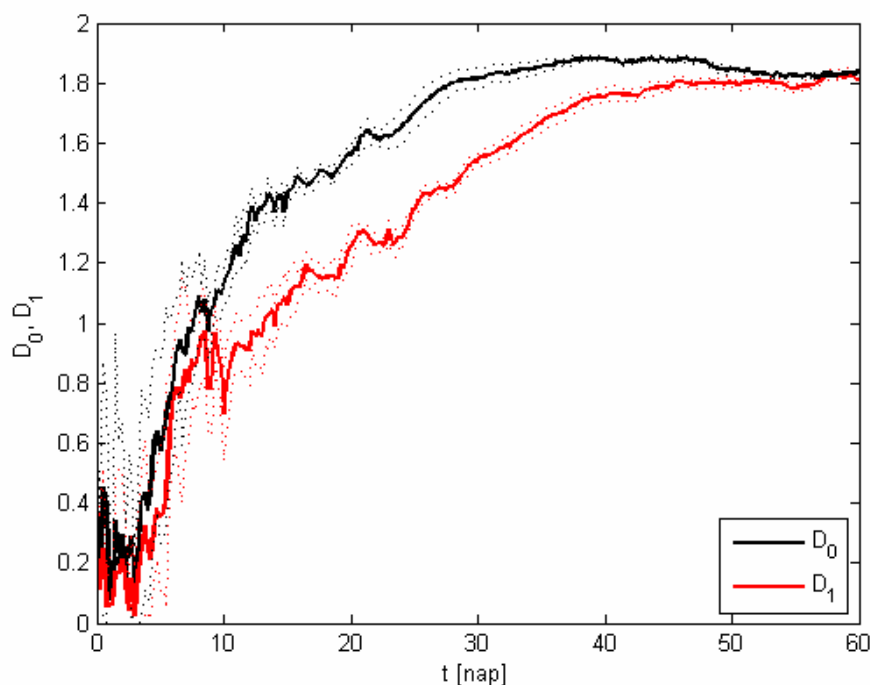
11. ábra: A D_1 információs dimenzió becsléséhez 3 naponta illesztett egyenesek a 2007. július 1-jén az É. sz. 47° , K. h. 19° -ról indított $1^\circ \times 1^\circ$ -os, $2,5 \cdot 10^7$ részecskéből álló szennyezésfelhő szétterjedése esetén (ε : dobozméret, $P_i(\varepsilon)$: lefedő dobozok relatív gyakorisága, $-\sum P_i(\varepsilon) \ln P_i(\varepsilon)$: információtartalom)

A 11. ábrán a fraktáldimenzió meghatározásához hasonlóan 3 naponta ábrázoltuk a méréseket (körök) és a rájuk illesztett egyeneseket. Kezdetben a szennyezésfelhőben a részecskék eloszlása egyenletes. Ebben az esetben az információs dimenzió azonos a fraktáldimenzióval. Ez a nagyobb dobozok esetén a pontozott, nagyjából vízszintes egyenes meredeksége, amely 0, míg a kisebb dobozok esetén megközelítőleg 2. A szétterjedés során, ahogyan az 5. ábrásorozaton is megfigyelhetjük, a szennyezésfelhő

előbb-utóbb elveszíti kezdeti homogén elrendeződését, sűrűsödések és ritkulások vehetők észre a sodródási képén. Az alakzat lefedéséhez egyre több doboz szükséges, így egyre nagyobbá válik az információtartalom is: az egyes időpillanatokhoz tartozó körök felfelé húzódnak.

Az információs dimenzió esetén is megfigyelhető a mérési hibából adódó rossz illeszkedés az első néhány napban, valamint a szétterjedés későbbi fázisaiban a fraktáldimenzióhoz hasonlóan itt is két nagyságrenden keresztül teljesül az információs dimenziót definiáló (2.3.3.7) arányosság.

A 12. ábra a D_1 információs dimenzió és az illesztés hibájának időbeli változását mutatja be a szennyezésfelhő D_0 fraktáldimenziójának fejlődése mellett.



12. ábra: A D_0 fraktáldimenzió és a D_1 információs dimenzió és az illesztések hibájának (pontosított fekete, illetve piros) időbeli változása a 2007. július 1-jén az É. sz. 47°, K. h. 19°-ról indított $1^\circ \times 1^\circ$ -os, $2,5 \cdot 10^7$ részecskéből álló szennyezésfelhő szétterjedése esetén

Az információs dimenzió kezdetben átfedi a fraktáldimenzió görbáját, vagy ahhoz közel fekszik. Ez arra utal, hogy ekkor még viszonylag egyenletes a szennyezésfelhő részecskéinek eloszlása, eleinte a kis szennyezésfelhő, később a fejlődő szál mentén. A felhő terjedése során azonban előbb-utóbb kialakul a néhol vastagabb, sűrűbb, másutt vékonyabb, ritkásabb szálak szerkezet, kacsok keletkeznek. Ezt jelzi, hogy az ábrán körülbelül a 9. naptól kezdve D_1 és D_0 görbéje elhajlik egymástól. Eleinte egyre jobban

eltérnek, ami a sodródási képen is felismerhető növekvő inhomogenitásokra utal. A 30. naptól a fraktáldimenzió és az információs dimenzió közötti különbség lassan csökkenni kezd, azaz a szétterjedt szennyezésfelhő ekkortól már kicsit kevesebb egyenatlenséget tartalmaz. Végül a vizsgált időszak vége felé (itt körülbelül az 58. naptól) a D_1 és a D_0 görbéje újra szinte átfedi egymást, azaz ekkor a féltéken a szennyezésfelhő eloszlása nagyjából homogénnek tekinthető (ld. 5. ábra, 60. nap).

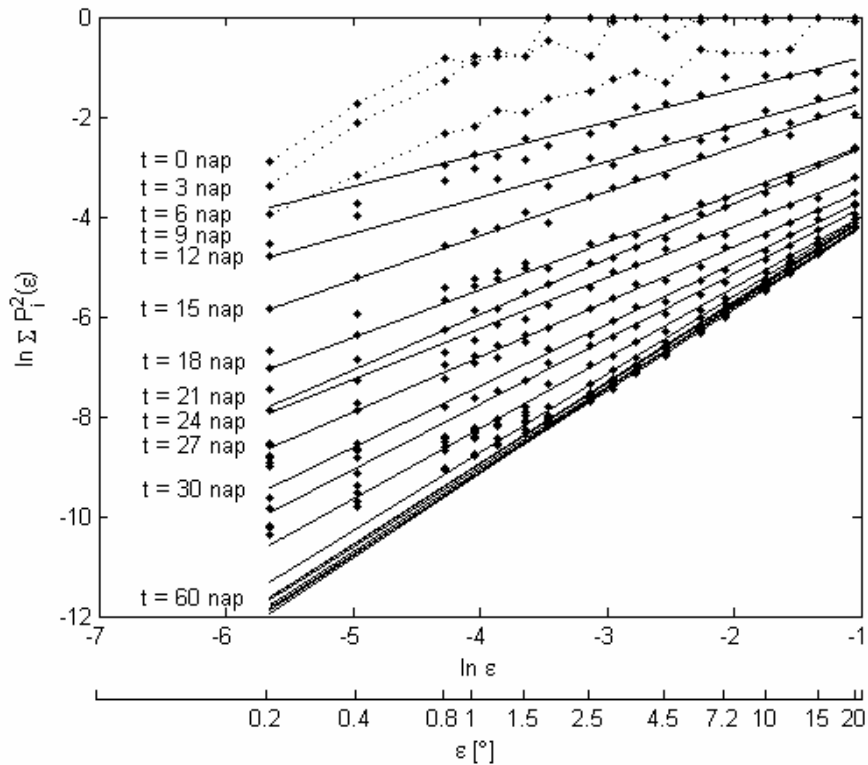
6.5. Korrelációs dimenzió

A korrelációs dimenzió egyik számítási módszere (2.3.3.10) egyszerűbb a fraktáldimenzió és az információs dimenzió számítási módjánál. Az irodalomban ezért gyakran ezzel a dimenzióval találkozhatunk, így ezt is megvizsgáltuk.

Mivel esetünkben az információs dimenzió számításához eleve szükség van a $P_i(\varepsilon)$ -ok meghatározására, így a (2.3.3.11) definíció alapján is meg tudjuk becsülni a korrelációs dimenziót.

Ez utóbbi méréseket és az illesztett egyeneseket szemlélteti a 13. ábra. A szennyezésfelhő indításakor nagy ε -ok esetén egy-egy doboz tartalmazza az összes részecskét, így $N(\varepsilon) = 1$ és $P_1(\varepsilon) = 1$, valamint $\ln P_1^2(\varepsilon) = 0$. Később, a szennyezésfelhő szétterjedésével, a lefedő dobozok egyre kevesebb részecskét tartalmaznak, azaz $P_i(\varepsilon)$ csökken (és minél kisebb a dobozméret, annál kevesebb részecske jut egy dobozban). Ezért az illesztett egyenesek is lefelé tolnak, és a meredekségük (D_2) nő.

A 13. ábrán észrevehető, hogy a mérési pontok kevésbé illeszkednek egy egyenesre, mint a fraktáldimenzió és információs dimenzió esetén. Az illeszkedés csupán a nagyobb dobozok ($1,8^\circ - 20^\circ$) esetén teljesül elfogadható mértékben, így a korrelációs dimenziót csak az ε -ok ezen intervallumára illesztett egyenesek meredekségéből becsültük.



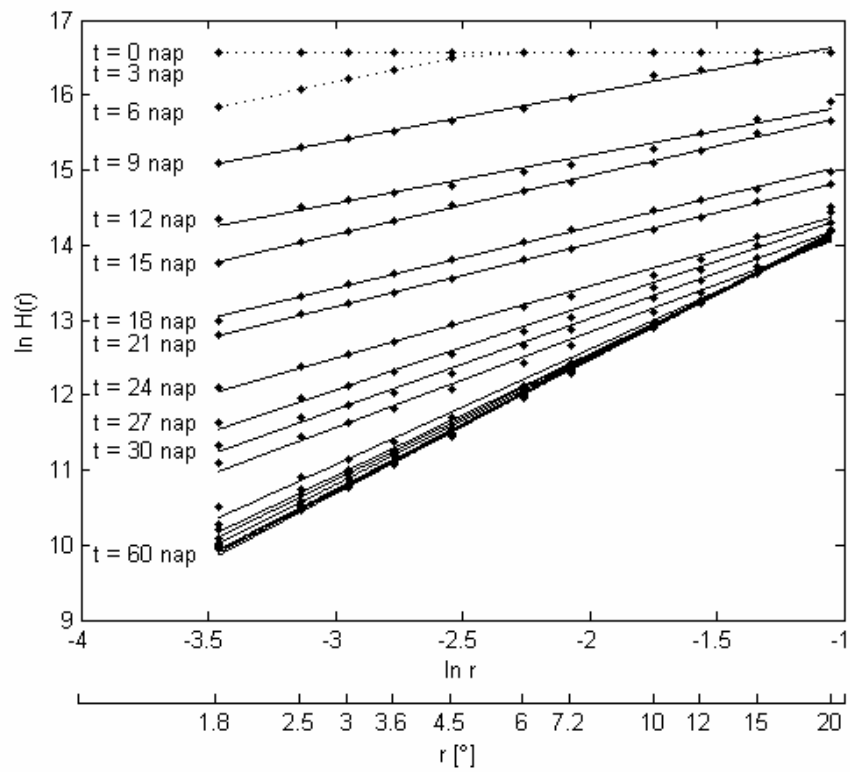
13. ábra: A D_2 korrelációs dimenzió becsléséhez 3 naponta illesztett egyenesek a 2007. július 1-jén az É. sz. 47° , K. h. 19° -ról indított $1^\circ \times 1^\circ$ -os, $2,5 \cdot 10^7$ részecskéből álló szennyezésfelhő szétterjedése esetén (ε : dobozméret, $P_i(\varepsilon)$: lefedő dobozok relatív gyakorisága)

A korrelációs dimenziót meghatároztuk a (2.3.3.10) arányosság alapján is, ahol az r távolságokat az előző módszernél alkalmazott $1,8^\circ - 20^\circ$ ε -ok értékeinek választottuk, és a szimulációkban a részecskék közötti távolságokat gömbi főkörök mentén számítottuk (14. ábra). Ebben az esetben kevesebb részecske alkotta a szennyezésfelhőt, mivel n db részecske esetén $n \cdot (n-1)/2$ távolságot kell megvizsgálni és összeszámolni. Ez már $n = 75^2 = 5625$ részecske esetén is körülbelül 2^{24} .

A 15. ábrán a kétféle módszerrel számított korrelációs dimenziók időbeli változása látható a fraktál- és információs dimenzió mellett.

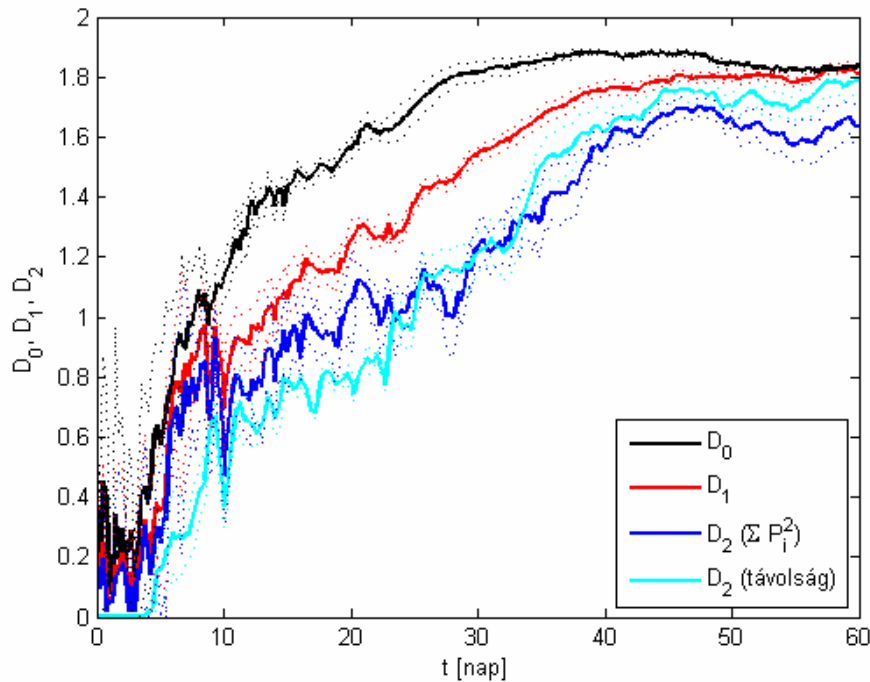
Igazolható, hogy $D_2 \leq D_1 \leq D_0$ mindig teljesül, és egyenlőség csak akkor áll fenn, ha a részecskék eloszlása homogén (Götz, 2001). Ez az egyenlőtlenség ezen az ábrán is megfigyelhető. A D_2 menetére a korrelációs dimenzió mindkét számítási módszerével hasonló görbét kapunk. Észrevehető, hogy ha a korrelációs dimenziót a távolságokat tartalmazó (2.3.3.10) definíció segítségével becsüljük, a mozgás kezdeténél nem lépnek fel

a dobozok elhelyezkedéséből adódó hibák: ekkor a szennyezésfelhőre a $D_2 = 0$ egyenlőség valóban teljesül, azaz a felhő a számított dimenzió alapján is pontszerű.



14. ábra: A D_2 korrelációs dimenzió becsléséhez 3 naponta illesztett egyenesek a 2007. július 1-jén az É. sz. 47° , K. h. 19° -ról indított $1^\circ \times 1^\circ$ -os, 5625 részecskéből álló szennyezésfelhő szétterjedése esetén (r : részecskék közötti távolság, $H(r)$: az r távolságon belül lévő részecskepárok száma)

A Föld görbültsége miatt az ε szög oldalhosszúságú dobozok mérete a gömbön nem egyforma. Amíg a szennyezésfelhő meridionális kiterjedése nem nagy, a doboznagyság sem változik sokat, azonban később a sarkok vagy az Egyenlítő közelében a méretük jelentősen eltérhet egymástól. Az előző bekezdésben említettek mellett a távolságok alapján becsült korrelációs dimenzió másik előnye, hogy kiküszöböli ezt a problémát. A 15. ábrából az is kitűnik, hogy a vizsgált időszak végéhez tartva a (2.3.3.10) összefüggés segítségével kapott korrelációs dimenzió csekélyebb mértékben tér el a fraktáldimenziótól és az információs dimenziótól, mint a (2.3.3.11) arányosság alapján meghatározott korrelációs dimenzió. Az információs dimenzióhoz hasonlóan a távolság alapú korrelációs dimenzió által felvett értékek is arra utalnak, hogy a szennyezésfelhő a kibocsátásától számított 60. nap környékén már meglehetősen egyenletes eloszlással fedi le a Föld egyik féltekéjét, ami összhangban áll az 5. ábra utolsó (60. nap) képével.



15. ábra: A D_0 fraktáldimenzió, a D_1 információs dimenzió, a relatív gyakoriságok ($D_2 (\sum P_i^2)$) és a részecskék közötti távolságok (D_2 (távolság)) segítségével számított korrelációs dimenzió időbeli fejlődése és az illesztések hibájának (pontosított fekete, piros, kék, világoskék) időbeli változása a 2007. július 1-jén az É. sz. 47° , K. h. 19° -ról indított $1^\circ \times 1^\circ$ -os, $2,5 \cdot 10^7$, illetve 5625 részecskéből álló szennyezésfelhő szétterjedése esetén

A korrelációs dimenziók becslésében az illesztések bizonytalanságai a szennyezésfelhő terjedésének kezdetét leszámítva közel azonosak. Ám amint már említettük, induláskor a távolság alapú becslés a valóságot jobban leíró korrelációs dimenziót ad, és a sodródási képek, illetve az fraktál- és információs dimenzió 50-60. nap között felvett egymáshoz közeli értékei alapján a (2.3.3.10) összefüggésből számított korrelációs dimenzió valószínűleg pontosabb a dobozok kitöltöttségéből meghatározott korrelációs dimenziónál. Ezen tapasztalatok alapján numerikus számítások során érdemes a (2.3.3.10) összefüggést használni a szennyezésfelhők korrelációs dimenziójának becslésére.

Az eredményeinket összevetettük *Pierrehumbert and Yang* (1993) munkájával. Ők a szennyezésfelhő elindítását követő 30. és 60. napon adtak becslést a korrelációs dimenzióra. A 30. napon $D_2 \approx 0,3$, tehát a felhő pontszerű eloszlást mutat, míg a mi szimulációnkban $D_2 \approx 1,2$, azaz inkább a szálak szerkezet jellemző. A 60. napon már kisebb a különbség a két eredmény között: $D_2 \approx 1,4$, illetve $D_2 \approx 1,6-1,7$. Az eltérések okai a különböző időjárási helyzetek lehetnek.

6.6. Közel azonos területű dobozok alkalmazása a dimenziók számításához

Ha a fraktáldimenziót, az információs dimenziót és a korrelációs dimenziót a szennyezésfelhőt lefedő dobozok számának, kitöltöttségének a dobozmérettől való függéséből számítjuk, az előző fejezetekben említett számítási módszerek nem teljesen korrektek, hiszen nem egyforma méretű dobozokkal fedjük le az alakzatokat. A 8. ábra jól mutatja, hogy a hosszúsági és szélességi körök által határolt dobozok mérete a sarkok felé erősen csökken. A 3. táblázatban az Egyenlítőnél és közvetlen a sarkoknál elhelyezkedő dobozok méretét találjuk a Földsugar négyzetének egységében (R^2), az utolsó oszlopban pedig a két terület hányadosa van feltüntetve. Látható, hogy minél kisebb a lefedéshez alkalmazott dobozméret, annál nagyobb ez az arány.

ε [°]	$A_{Egy.} [R^2]$	$A_{sark} [R^2]$	$A_{Egy.}/A_{sark}$	ε [°]	$A_{Egy.} [R^2]$	$A_{sark} [R^2]$	$A_{Egy.}/A_{sark}$
0,2	1,218E-05	2,127E-08	572,96	3	2,740E-03	7,176E-05	38,19
0,4	4,874E-05	1,701E-07	286,48	3,6	3,945E-03	1,240E-04	31,82
0,8	1,949E-04	1,361E-06	143,24	4,5	6,162E-03	2,421E-04	25,45
1	3,046E-04	2,658E-06	114,59	6	1,095E-02	5,737E-04	19,08
1,2	4,386E-04	4,593E-06	95,49	7,2	1,575E-02	9,909E-04	15,89
1,5	6,853E-04	8,971E-06	76,39	10	3,031E-02	2,652E-03	11,43
1,8	9,868E-04	1,550E-05	63,66	12	4,354E-02	4,577E-03	9,51
2,5	1,903E-03	4,153E-05	45,83	15	6,776E-02	8,921E-03	7,60
				20	1,194E-01	2,105E-02	5,67

3. táblázat: A féltekék lefedéséhez alkalmazott dobozok területe a Földsugar négyzetének egységében (R^2) az Egyenlítőnél ($A_{Egy.}$) és közvetlen a sarkoknál elhelyezkedő (A_{sark}) dobozok esetében, és a két terület hányadosa ($A_{Egy.}/A_{sark}$)

Abból a célból, hogy a dobozméreték ilyen nagymértékű változékonyságát kiküszöböljük, a félteke egy másik felosztását is definiáltuk. Ez a felbontás azon alapul, hogy minden egyes doboz területe közel azonos legyen. A szélességi körök szerinti felosztást meghagytuk olyannak, amilyen eddig volt: azaz ebben a felosztásban is a dobozok két oldalát az egymást ε szögenként követő szélességi körök határozzák meg (16. ábra). Azonban a másik két oldalának hosszúsági koordinátái az előzőekkel ellentétben egymástól nem ε szögre, hanem szélességi körönként különböző szögekre helyezkednek el olyan módon, hogy minden doboz területe nagyjából egyforma legyen (a teljesen azonos méretű dobozokkal való lefedés nem lehetséges).

Egy $\lambda_1, \lambda_2, \varphi_1, \varphi_2$ ($\lambda_1 < \lambda_2, \varphi_1 < \varphi_2$) hosszúsági és szélességi körök által meghatározott egységnyi sugarú gömbnégyyszögnek a felülete:

$$A = (\lambda_2 - \lambda_1)(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1). \quad (6.6.1)$$

Esetünkben adott szélességi körön lévő doboz felületének számításakor $\varphi_2 = \varphi_1 + \varepsilon$, és legyen $\lambda_2 - \lambda_1 = \varepsilon'(\varphi_1)$. Legyen az Egyenlítőnél elhelyezkedő dobozokra $\varepsilon'(\varphi_1 = 0) = \varepsilon$, azaz az Egyenlítő két oldalán a dobozok mind a négy oldala szögben mérve egyenlő. Ezeknek a dobozoknak a területe így

$$A_{Egy.} = \varepsilon(\sin \varepsilon - \sin 0) = \varepsilon \sin \varepsilon. \quad (6.6.2)$$

Adott szélességi körön lévő doboz szélességi kör menti $\varepsilon'(\varphi_1)$ oldalhosszát először úgy választjuk meg, hogy ezzel a területtel megegyezzen:

$$A_{Egy.} = \varepsilon \sin \varepsilon := A_{\varphi_1} = \varepsilon'(\varphi_1)(\sin(\varphi_1 + \varepsilon) - \sin \varphi_1). \quad (6.6.3)$$

Ebből a φ_1 szélességi körön lévő doboz szélességi körökkel párhuzamos oldalai szögben kifejezve:

$$\varepsilon'(\varphi_1) = \varepsilon \frac{\sin \varepsilon}{\sin(\varphi_1 + \varepsilon) - \sin \varphi_1}. \quad (6.6.4)$$

Ha $\varepsilon \ll \varphi_1$, akkor a (6.6.4) egyenletből $\varepsilon'(\varphi_1) \approx \varepsilon / \cos \varphi_1$, amely megkapható két kicsiny, λ és $\lambda + d\lambda$ szélességi, illetve φ és $\varphi + d\varphi$ hosszúsági körök által határolt gömbnégyyszög területének ($R^2 \cos \varphi \cdot d\varphi \cdot d\lambda$) egyenlőségéből is (Götz és Rákóczi, 1981).

Mivel a Földgömb teljes lefedésének érdekében a szélességi köröket egész számú dobozoknak kell kitöltenie, az alkalmazott ε'' zonális dobozméret $\varepsilon'(\varphi_1)$ -től kis mértékben eltér. Adott szélességi kör mentén így

$$db(\varphi_1) = \text{round} \left(\frac{2\pi}{\varepsilon'(\varphi_1)} \right) \quad (6.6.5)$$

darab doboz foglal helyet, ahol a round a legközelebbi egész számra való kerekítést jelzi. Így a dobozok zonális oldalhossza a φ_1 szélességi körön:

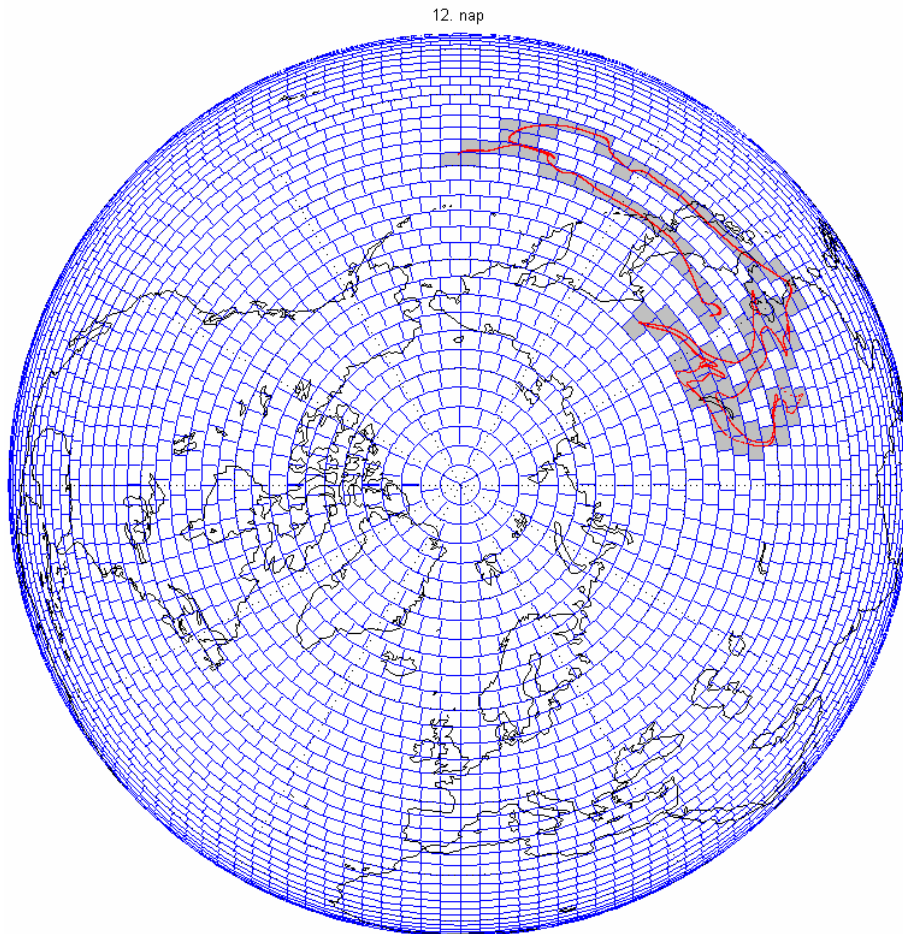
$$\varepsilon''(\varphi_1) = 2\pi / db(\varphi_1). \quad (6.6.6)$$

A dobozok területe tehát adott szélességi körön nem egyezik meg pontosan az Egyenlítőnél lévő dobozok nagyságával. Az egyenlítői és sarki dobozterületek

különbségéről a 4. táblázat nyújt információt. Látható, hogy a féltekére ezt az új lefedési módszert alkalmazva a $A_{Egy.}$ és A_{sark} aránya minden ε esetén közel van az egyhez.

ε [°]	$A_{Egy.}$ [R^2]	A_{sark} [R^2]	$A_{Egy.}/A_{sark}$	ε [°]	$A_{Egy.}$ [R^2]	A_{sark} [R^2]	$A_{Egy.}/A_{sark}$
0,2	1,218E-05	1,276E-05	0,9549	3	2,740E-03	2,870E-03	0,9547
0,4	4,874E-05	5,104E-05	0,9549	3,6	3,945E-03	4,133E-03	0,9546
0,8	1,949E-04	2,042E-04	0,9549	4,5	6,162E-03	6,456E-03	0,9544
1	3,046E-04	3,190E-04	0,9549	6	1,095E-02	1,147E-02	0,9541
1,2	4,386E-04	4,593E-04	0,9549	7,2	1,575E-02	1,651E-02	0,9537
1,5	6,853E-04	7,177E-04	0,9549	10	3,031E-02	3,182E-02	0,9525
1,8	9,868E-04	1,033E-03	0,9549	12	4,354E-02	4,577E-02	0,9514
2,5	1,903E-03	1,993E-03	0,9548	15	6,776E-02	7,136E-02	0,9495
				20	1,194E-01	1,263E-01	0,9452

4. táblázat: A féltekék lefedéséhez alkalmazott dobozok területe a Föld sugar négyzetének egységében az Egyenlítőnél ($A_{Egy.}$) és közvetlen a sarkoknál elhelyezkedő (A_{sark}) dobozok esetében, és a két terület hányadosa ($A_{Egy.}/A_{sark}$)

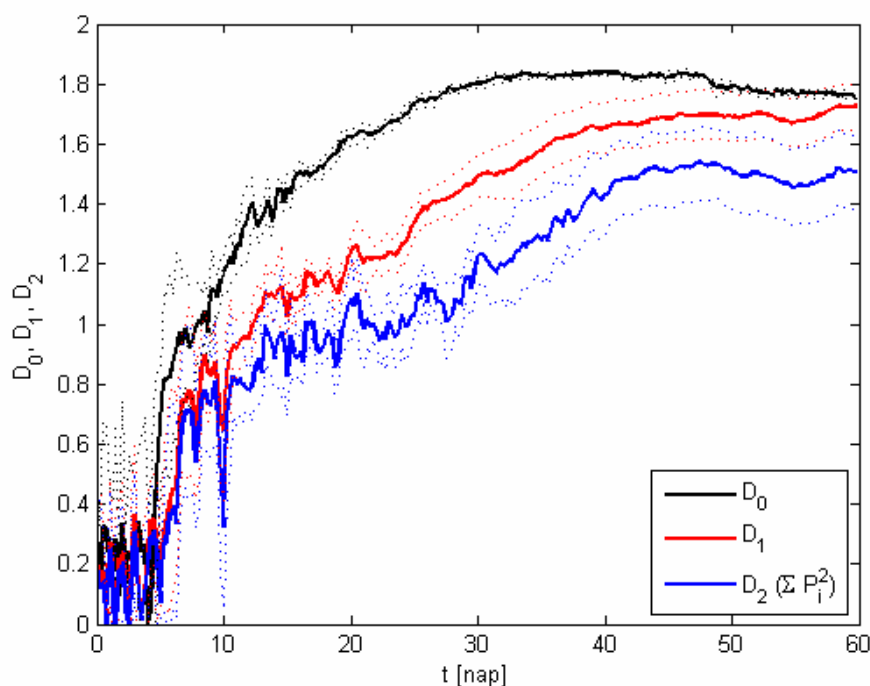


16. ábra: A Föld lefedése az Egyenlítőnél $\varepsilon = 2,5^\circ$ -nak megfelelő méretű dobozokkal, és az 5. ábrán látható szennyezésfelhőt (piros) lefedő dobozok (szürke) a 12. napon

A féltékének ez a lefedési módja azt eredményezi, ahogyan ez a 16. ábrán is megfigyelhető, hogy a sarkok felé közeledve egyre kevesebb doboz sorakozik egy-egy szélességi kör mentén.

Megvizsgáltuk ennek a lefedésnek a segítségével is a fraktáldimenziót, az információs dimenziót és a korrelációs dimenziót, valamint azt, hogy az előző fejezetekben bemutatott eredményekhez képest hogyan változnak ezek a mennyiségek a szennyezésfelhő terjedése, széteszlása során.

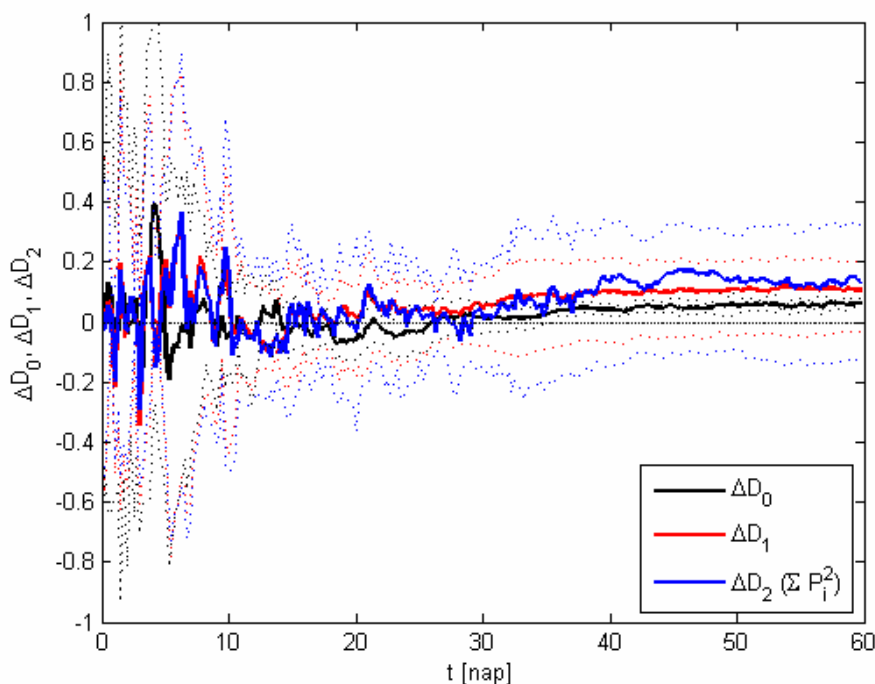
A 17. ábrát a 15. ábrával összevetve megállapíthatjuk, hogy a különböző dimenziók menete hasonlóan alakul a kétféle lefedés esetén: a kezdeti ingadozások után a 3. naptól kezdve a dimenziók gyors növekedése tapasztalható, ami megfelel annak, hogy a felhő sebesen szálas szerkezetű alakzattá fejlődik. Majd ezt követően körülbelül a 15. naptól kezdve mindkét ábrán már kisebb mértékű változásokat mutatnak a görbék.



17. ábra: A D_0 fraktáldimenzió, a D_1 információs dimenzió, a D_2 korrelációs dimenzió időbeli fejlődése és az illesztések hibájának (pontozott fekete, piros, kék) időbeli változása a 2007. július 1-jén az É. sz. 47°, K. h. 19°-ról indított $1^\circ \times 1^\circ$ -os, $2,5 \cdot 10^7$ részecskéből álló szennyezésfelhő szétterjedése esetén

A kétféle lefedéssel számított dimenziók különbsége (18. ábra) azt mutatja, hogy a vizsgált szennyezésfelhő esetén körülbelül egy hónap után az első lefedés segítségével számolt dimenziók nagyobbá válnak, mint a közel azonos területű dobozokkal való lefedésből származók. A kétféle lefedési módszerrel számított mennyiségek a

fraktáldimenzióban térnek el a legkevésbé: a 35. naptól kezdve $\Delta D_0 \approx 0,07$. A dobozok kitöltöttségét a legjobban tekintetbe vevő korrelációs dimenzió esetén a legnagyobb, körülbelül kétszer ekkora a különbség a 2. hónap folyamán: $\Delta D_2 \approx 0,13 - 0,14$, valamint a fraktál- és információs dimenzióhoz képest ΔD_2 időben sokkal változékonnyabb. Ez utóbbi valószínűleg a korrelációs dimenzió becsléséhez a mérési pontokra kevésbé jól illeszkedő egyeneseknek köszönhető.



18. ábra: A hosszúsági és szélességi körök által meghatározott dobozokat és a közel azonos területű dobozokat alkalmazó lefedésből származó fraktáldimenzió (ΔD_0), információs dimenzió (ΔD_1) és korrelációs dimenzió (ΔD_2) különbsége a 2007. július 1-jén az É. sz. 47° , K. h. 19° -ról indított $1^\circ \times 1^\circ$ -os, $2,5 \cdot 10^7$ részecskéből álló szennyezésfelhő szétterjedése esetén

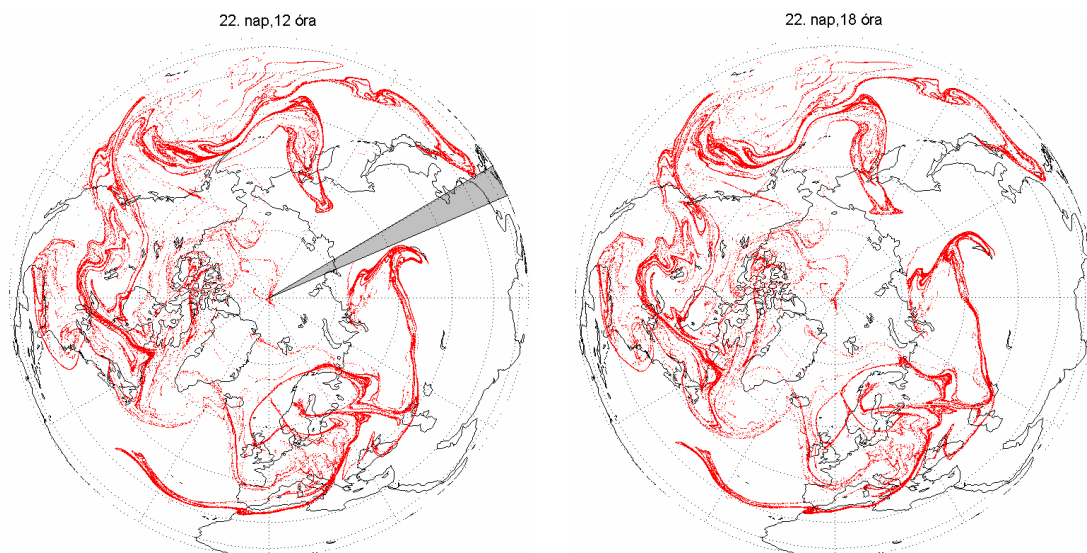
A lefedő dobozok közel azonos mérete következtében az ebben a fejezetben bemutatott lefedési módszer tekinthető a fraktál-, az információs és a korrelációs dimenzió eredeti definíciójának megfelelő választásnak.

7. A félteke beborításának ideje

Az előző fejezetekben láthattuk, hogy a kezdetben koncentrált szennyezésfelhő hogyan oszlik szét a Földön. Ezért a kaotikus jellemzők mellett érdemes azt is megvizsgálni, hogy mennyi idő szükséges ahhoz, hogy a szennyezésfelhő annyira szétterjedjen, hogy „körbe érjen” vagy pedig nagyjából egyenletes sűrűséggel beterítsen egy féltekét. Így hozzávetőleges adatokat kaphatunk arra vonatkozólag, hogy például vulkánkitörésekből vagy légszennyezési folyamatokból származó anyagoknak mennyi időbe telik globálisan beborítani egy féltekét.

*Körbeérési idő*nek neveztük el azt az időt, ami alatt a szétoszló szennyezésfelhő részecskéi minden hosszúsági kör mentén megjelennek. Körbeérésnek az számít, ha ugyan más szélességi körön, de a szennyezésfelhő „elejének” hosszúsági koordinátája megegyezik a felhő „hátljának” hosszúsági koordinátájával.

Ez technikailag úgy valósítható meg, hogy a féltekét a hosszúsági körök mentén kis oszlopokra (vizsgálatainkban 1°) osztjuk, és megnézzük, hogy az adott oszlopban hány részecske található. Azt az első időpontot, amikor már mindegyik oszlop tartalmaz részecskét, nevezzük a szennyezésfelhő körbeérési idejének (19. ábra).

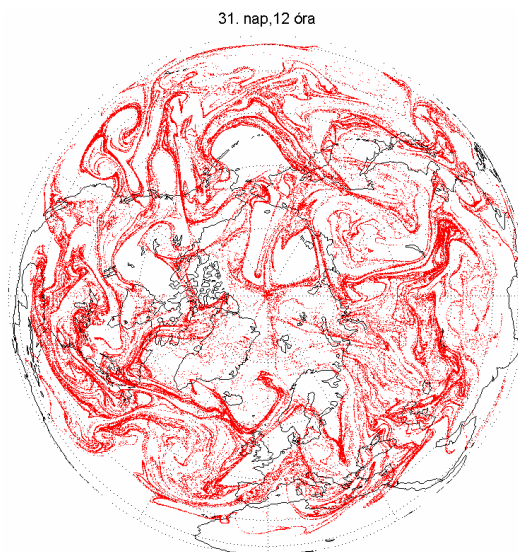


19. ábra: Az 5. ábrán indított szennyezésfelhőnek a körbeérést megelőző, illetve körbeéréskor elfoglalt helyzete

Az előző definíciót módosíthatjuk úgy is, hogy megköveteljük, ne csak egy, hanem meghatározott küszöbszámnál több részecskét tartalmazzon egy-egy oszlop. Ez alkalmas a részecskék sűrűségének figyelembevételére is. Ekkor szemügyre vehetjük, hogy mennyi idő alatt oszlik szét annyira a szennyezésfelhő, hogy a hosszúsági körök szerint közel egyenletesen beborítsa a féltekét (20. ábra). Ezt neveztük *homogenizálódási idő*nek. Ennek meghatározása során a küszöböt az oszlopokban való egyenletes eloszláskor fellépő részecskeszám negyedének választottuk, ugyanis ekkor már szabad szemmel nézve a részecskesokaság nagyjából egyenletesen oszlik el a féltekén. Vagyis a homogenizálódási idő t_{hom} az az első t időpont, amikor

$$n_i(t) \geq \frac{n}{db_{oszlop}} \cdot \frac{1}{4}, \quad i = 1, \dots, db_{oszlop} \quad (7.1)$$

teljesül, ahol n_i jelöli az i . oszlopban található részecskék számát, n az összes részecskének, db_{oszlop} pedig az oszlopoknak a száma.



20. ábra: Az 5. ábrán elindított szennyezésfelhő eloszlása a homogenizálódási idő elteltével

A szennyezésfelhők átlagos körbeérési és homogenizálódási idejének becsléséhez 30 napon keresztül (télen 2006. december 1-jétől, nyáron 2007. június 1-jétől kezdve) minden nap egyszer indítottunk egy-egy $1^\circ \times 1^\circ$ -os részecskesokaságot minden tizedik szélességi és minden harmincadik hosszúsági körről. A fentebb említett módszerekkel meghatároztuk azok körbeérési és homogenizálódási idejét, majd ezekből mind a

december-februári, mind a június-augusztusi időszakra 30 napos átlagot és szórást számoltunk az egyes földrajzi helyekre vonatkozóan.

7.1. Körbeérési idő

A 21.a ábrán az átlagos körbeérési időket láthatjuk a földrajzi hely és az évszak függvényében ábrázolva, valamint a 21.b ábrán a két évszakban zonálisan átlagolva, mellette az adott szélességi körre vonatkozó szórást feltüntetve.

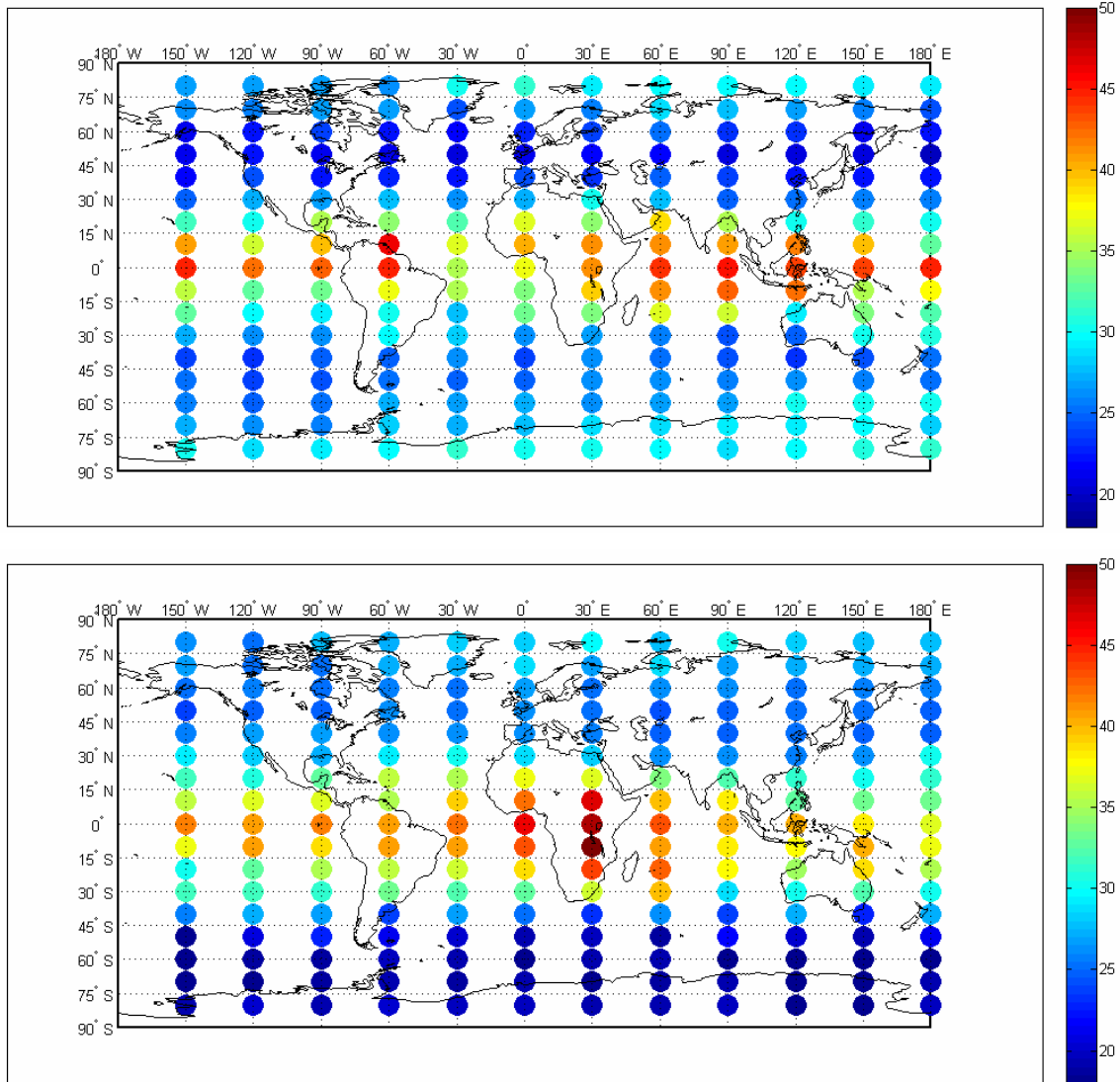
A 21.a, b ábrán jól látszik a körbeérési idő földrajzi szélességtől való függése: ahogyan a 3. ábra átlagos szélviszonyai alapján várható is, a légkörben közepes szélességeken érnek körbe a leghamarabb a szennyezésfelhők (átlagosan 15-30 nap), míg a trópusokról indított felhőknek ehhez akár másfél hónapra is szükségük lehet. A december-február időszakban csekélyebb a különbség a két félteke között, mint június-augusztusban.

A mérsékelt övben az adott félteke telén (azaz az Északi-féltekén a december-február, a Déli-féltekén a június-augusztus időszakban) a szennyezésfelhők körbeérése átlagosan 15-25 nap alatt történik, míg a féltekék nyarán 20-30 nap között változik. A sarkvidékekről induló szennyezésfelhők körbeérési ideje általában nagyobb (25-35 nap), mint a közepes szélességeken kibocsátott felhőké, kivéve a Déli-féltekén a június-augusztus időszak alatt szétterjedő felhőket.

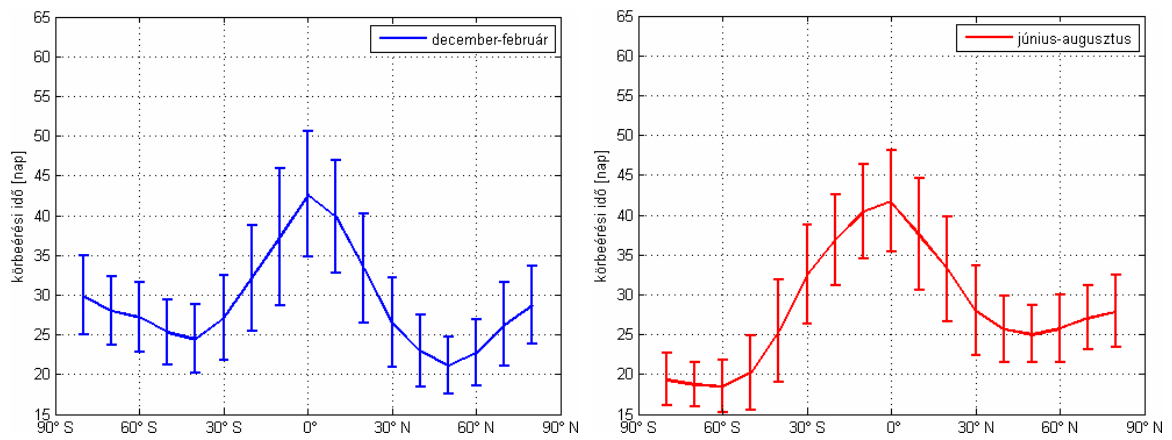
A 21.a ábrán megfigyelhető, hogy a december-február periódusban az átlagos körbeérési idő legnagyobb értékei Közép-Amerikában, a Csendes-óceán és az Indiai-óceán Egyenlítőhöz közeli területein jelennek meg. Ezzel szemben a június-augusztus időszak alatt az Afrika középső részéről induló szennyezésfelhőknek telik a legtöbb időbe, míg körbeérnek az Északi- vagy Déli-féltekén.

Az egyes földrajzi helyekre vonatkozó körbeérési idők szórása 2-15 nap között változik. A legnagyobb változékonyság a trópusokon fordul elő, itt ugyanis a szennyezésfelhő eleinte lassabban oszlik szét, később (az aktuális áramlásoktól függően) a részecskesokaság egy-egy része a mérsékelt övbe juthat, ahol a nagyobb szélességek uralma alá kerül. A körbeérési idő nagy szórásának (5-10 nap) oka a trópusi területekről való kitörés időpontjának változékonysága. A közepes és magas szélességekről indított szennyezésfelhők esetén a leggyakoribb szórások 2-6 nap közé esnek.

a)



b)



21. ábra: a) Az átlagos körbeérési idő [nap] a december-február (fent) és a június-augusztus (lent) időszakban, és b) az átlagos körbeérési idő zonális átlaga és szórása

7.2. Homogenizálódási idő

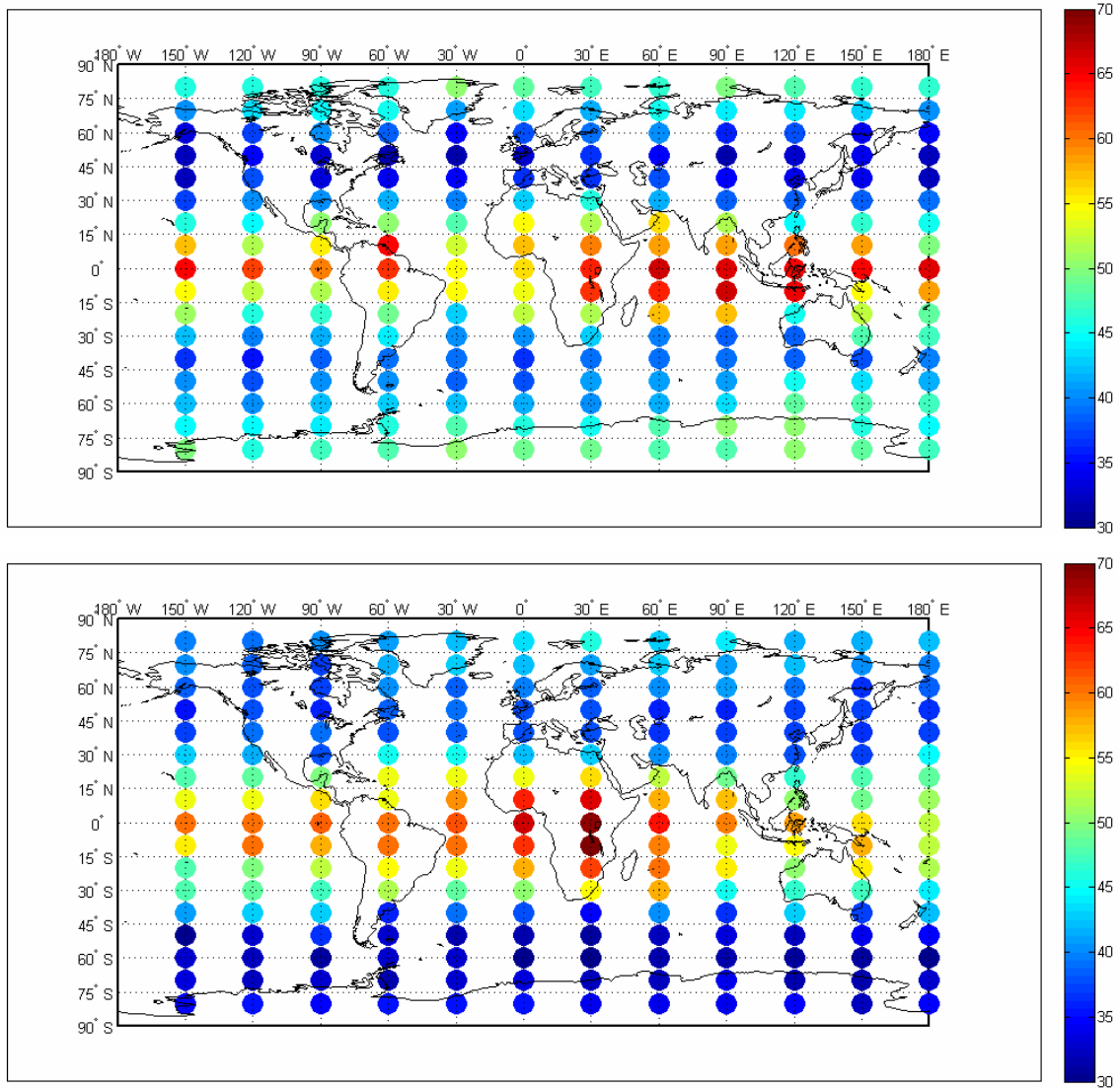
Mikor a szennyezésfelhő körbe ér a Föld körül, még nem egyenletesen borítja be az adott féltekét (19. ábra), éppen csak megjelenik minden hosszúsági kör mentén. Ahhoz, hogy nagyjából azonos részecskeeloszlást tapasztaljunk a féltekén, több idő szükséges.

A 22. ábrán láthatjuk az egyes földrajzi helyekre, adott évszakra vonatkozó átlagos homogenizálódási időt, amelyet a meridiánok mentén elhelyezkedő oszlopokban lévő részecskék kritikus száma alapján határoztunk meg ((7.1) összefüggés). Az átlagos homogenizálódási idő az átlagos körbeérési időhöz hasonlóan leginkább a földrajzi szélesség függvénye. A részecskék féltekén való közel egyenletesen eloszlásának elérése a trópusi területeken tart a legtovább (50-70 nap). Közepes szélességeken évszaktól függően a félteke telén átlagosan 30-40 nap, illetve a félteke nyarán 35-45 nap. A sarkvidékeken szintén nagyobb értékekkel találkozhatunk: a homogenizálódás a Déli-félteke telén a Déli-sark környékén 30-40, az Északi-sarkvidéken 40-45 nap alatt történik meg, míg az Északi-félteke telén a homogenizálódáshoz a pólusok közelében mindkét féltekén ennél pár nappal több, átlagosan 45-50 nap szükséges.

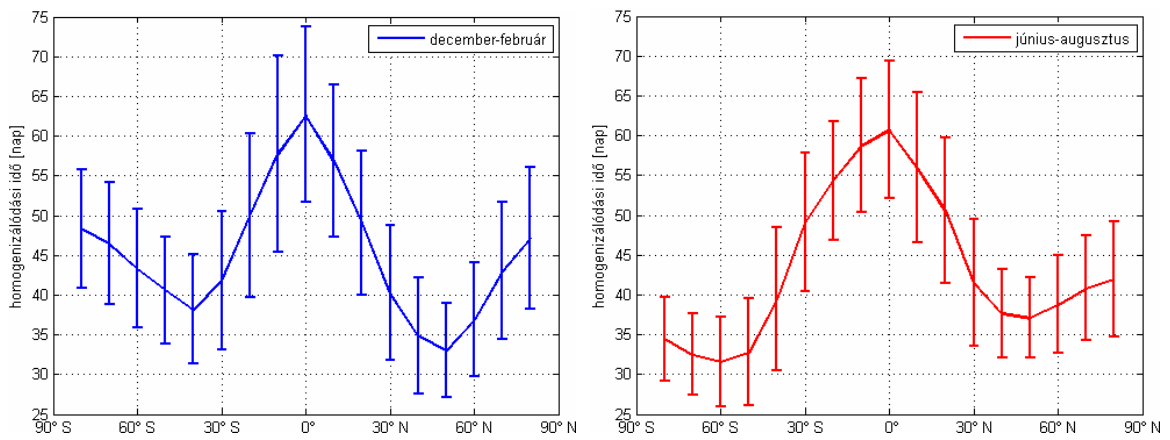
A homogenizálódási idők szórása a körbeérési idők szórásához hasonlóan nagy tartományban ingadozik, többnyire 5-15 nap közé esik. A körbeérési időhöz hasonlóan itt is jellemző a szórás zonális elrendeződése: a trópusokon lépnek fel a legnagyobb, míg a közepes és magas szélességeken a legkisebb szórások.

Ahogy várható is, a körbeérés és a homogenizálódás hamarabb történik meg a féltekék telén, mint nyarán. Ez annak köszönhető, hogy a földi légkörzés meghajtója az Egyenlítő és a sarkvidékek közötti hőmérsékletkülönbség, amely adott félgömbön télen nagyobb, mint nyáron (Czelnai et al., 1982). A 3. ábrán bemutatott szélviszonyok is azt mutatják, hogy télen nagyobb szélességekkel találkozhatunk, mint nyáron. A legkisebb körbeérési és homogenizálódási idők a Déli-féltekén a téli évszakban (június-augusztus) jelennek meg, ekkor kitűnnek a szélmezőben az itt uralkodó erős, átlagosan nyugatias irányú áramlatok.

a)



b)



22. ábra: a) Az átlagos homogenizálódási idő [nap] a december-február (fent) és a június-augusztus (lent) időszakban, és b) az átlagos homogenizálódási idő zonális átlaga és szórása

8. A modell-eredmények összevetése légköri megfigyelésekkel

8.1. A Kasatochi vulkán kitörése

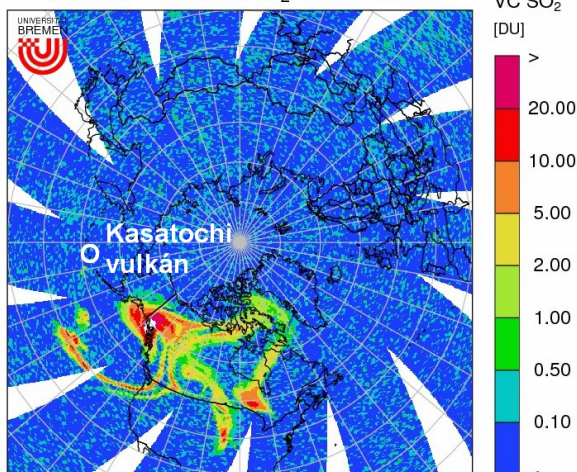
A műholdfelvételekről könnyen meggyőződhetünk arról, hogy a 6. fejezetben bemutatott sodródási tulajdonságok valóban megjelennek a légkörben.

Az Aleut-szigeteken található Kasatochi vulkán 2008. augusztus 7-8-ai kitöréseikor nagy mennyiségű hamu és kén-dioxid jutott a levegőbe, ami 11-15 km közötti magasságban terjedt szét a légkörben (*Waythomas et al.*, 2008). A MetOp-A műholdon működő GOME-2 (Global Ozone Monitoring Experiment-2) műszer méréseinek segítségével követhető a kén-dioxid felhő útja (23. ábra), amely augusztus 14-én érte el Európát, és további egy hétbe telt, amíg eljutott Alaszkába. A műholdas megfigyelések mellett összehasonlításképpen egyik szimulációnk eredményét láthatjuk. A szennyezésfelhő kezdőfeltételeit a műholdképek és a kitörési időpontok alapján határoztuk meg. A Kasatochi augusztus 7-én 22:01 UTC-kor, 8-án 1:50 és 4:35 UTC-kor tört ki, ezt követően pedig még 17 órán keresztül hamut lövellt a légkörbe (*Waythomas et al.*, 2008). A vulkánkitörés magassági adatai alapján az ERA-Interim adatbázisából kikeresztük az akkor 11 és 15 km között elhelyezkedő izentrop felületeket: ennek a kritériumnak a 350 K-es és a 370 K-es felület tett eleget.

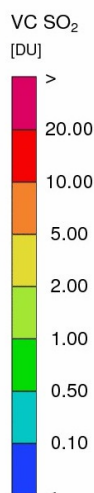
Így a szimulációban a szennyezésfelhőket a 350 K-es és a 370 K-es izentrop felületen indítottuk augusztus 8-án a három kitörésnek és további kilövelléseknek megfelelő 0 UTC-kor, 6 UTC-kor és 12 UTC-kor, a Ny. h. 173°, É. sz. 52° középpontú, 4° átmérőjű területről (kék ellipszis a 23. ábrán).

A 23. ábrán a különböző szinteken és a három időpontban indított részecskesokaságok eloszlása látható egymásra vetítve. A műholdképeken és a szimuláció képein is jól megfigyelhetők az időnként kinyúló vékony, hosszú szálak, kacsok, amelyek két örvény közötti sodródás során keletkeznek, illetve a terjedés lassulása, „beragadása”, amikor a kén-dioxid felhő egy halmaza bekerül egy örvénybe, és azzal együtt forog. A Kasatochi vulkánból származó anyagok feljutottak a sztratoszférába, egy fél hónap alatt körbekerülték a Földet (a szimulációnkban a körbeérési idő 15,5 nap), és a hónap végére nagyjából homogenizálódott a kén-dioxid eloszlása a féltekén (a (7.1) definíció szerint a homogenizálódási idő 21 nap).

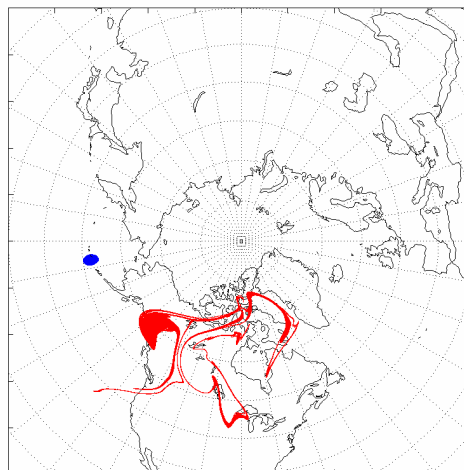
METOP GOME2 SO₂: 2008/08/12



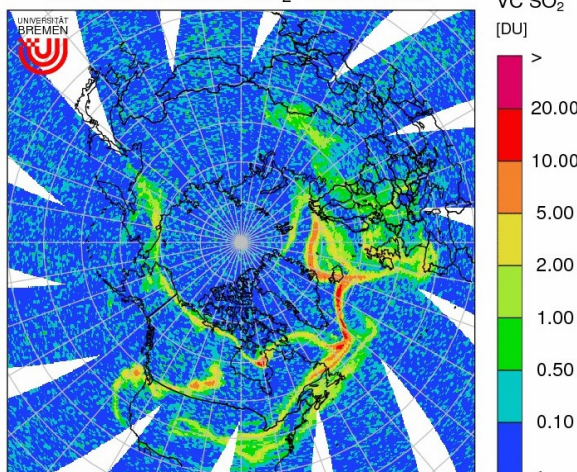
IUP Bremen © Andreas.Richter@iup.physik.uni-bremen.de



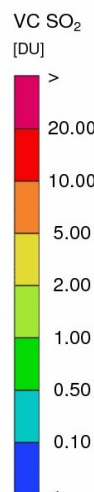
2008/08/12



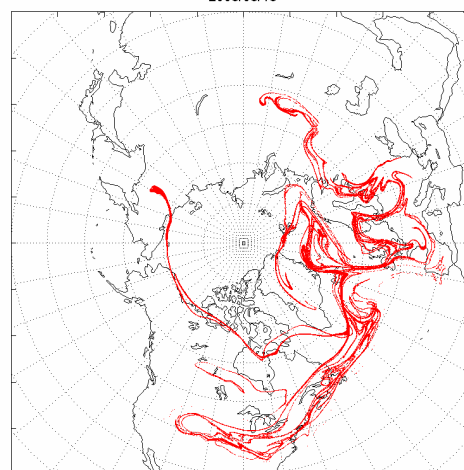
METOP GOME2 SO₂: 2008/08/16



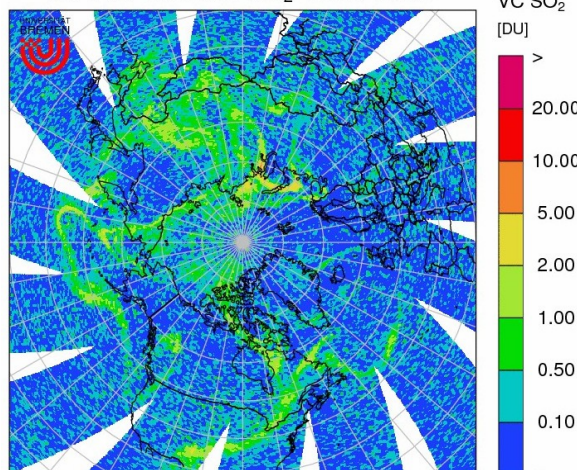
IUP Bremen © Andreas.Richter@iup.physik.uni-bremen.de



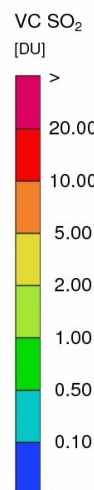
2008/08/16



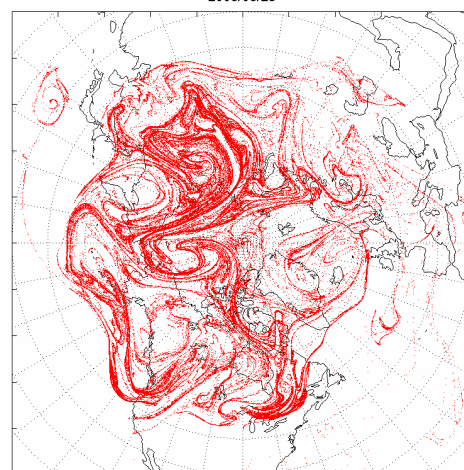
METOP GOME2 SO₂: 2008/08/25



IUP Bremen © Andreas.Richter@iup.physik.uni-bremen.de



2008/08/25



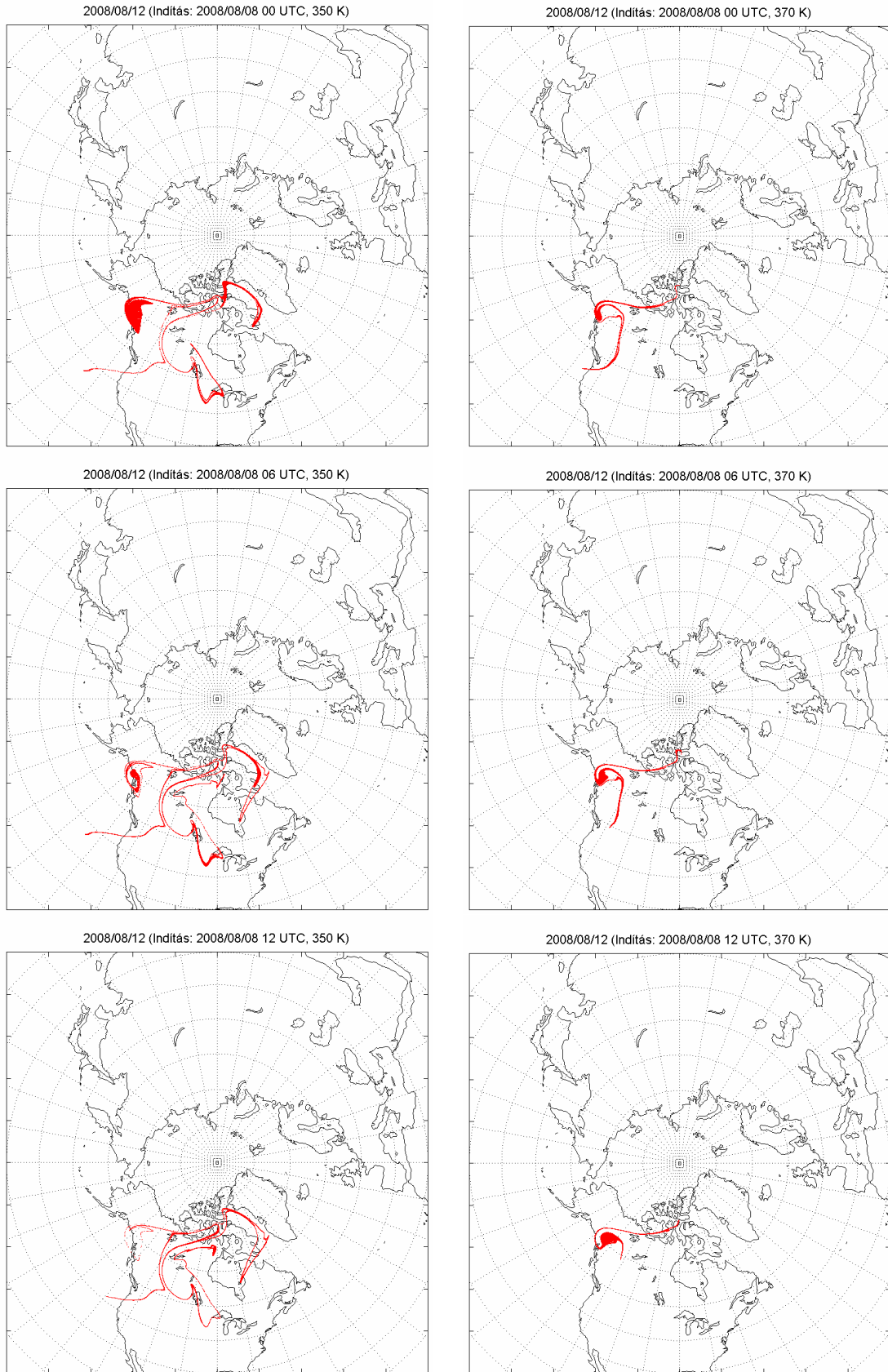
23. ábra: A Kasatochi vulkán kitörésekor felszabaduló kén-dioxid terjedése a légkörben (http://www.iup.uni-bremen.de/does/images/highlights/gome2_so2_kasatochi_large.gif) és a megfelelő szimuláció eredménye. A szennyezésfelhőket a 350 K-es és 370 K-es izentrop felületen indítottuk 2008. augusztus 8-án 0 UTC-kor, 6 UTC-kor és 12 UTC-kor a Ny. h. 173°, É. sz. 52° középpontú, 4° átmérőjű területről (kék).

A kaotikus mérőszámok közül az 5 napra vonatkozó Ljapunov-exponens a kén-dioxid felhő területén átlagosan 0,29 1/nap, míg a topologikus entrópia 0,36 1/nap értéket vett fel, a szórásuk pedig 0,2 1/nap-nak, illetve 0,1 1/nap-nak adódott.

A 24. ábrán a 2008. augusztus 12-én láthatjuk a szimulációk képeit a két izentrop szintet (350 K és 370 K), illetve a három indítási időpontot (2008. augusztus 8. 0 UTC, 6 UTC és 12 UTC) külön-külön feltüntetve. Megfigyelhető, hogy az egyes szintek eltérő áramlási viszonyai más-más sodródási képet eredményeznek. A 370 K-es felületen a szennyezésfelhő a 350 K-es szinthez képest sokkal csekélyebb mértékben oszlik szét, kevesebb szál alakul ki, amelyeknek a hossza így rövidebb is. A 23. ábrán az ehhez az időponthoz tartozó augusztus 12-ei sodródási képen az Alaszka és Kanada határán megjelenő sűrűbb, nagy kiterjedésű foltot a 24. ábra alapján főként a 350 K-es szintről 0 UTC-kor, illetve a 370 K-es szintről 12 UTC-kor elindított szennyezésfelhők részecskéi alkotják. Az Amerikai Egyesült Államok nyugati partjánál feltűnő két vékonyabb szál közül az északabbi a 350 K-es felület szennyezésfelhőiből, míg a déli a 370 K-es szinten éjfélkor induló részecskesokaságból tevődik össze. Megfigyelhető, hogy a Kanada belső területein, a Nagy-Tavak környékén vagy Grönlandtól nyugatra, a Baffin-öböl fölött sodródó szálak a 350 K-es felületen folyó szimulációkból származnak.

A műholdfelvételek és a szimulációból származó sodródási képek hasonlósága alátámasztja, hogy a légkör magasabb rétegeiben, nagy skálán zajló sodródási folyamatokat jól közelíti az általunk alkalmazott kétdimenziós sodródási modell.

Mivel a vulkánkitörések ritkák, és földrajzi eloszlásuk nem egyenletes, a tényleges körbeérési és homogenizálódási időkre nem áll rendelkezésre elegendő megfigyelés. Azonban a Kármán Laboratóriumban végzett forgó kádas kísérletek is azt mutatatták (*Homonnai*, 2008), hogy egy szennyezésfelhő féltekén való körbeéréséhez körülbelül egy hónap szükséges, és a terjedés nagyobb hőmérsékletkülönbségek esetén (tehát télen) gyorsabb, ami összhangban van az általunk kapott eredményekkel.

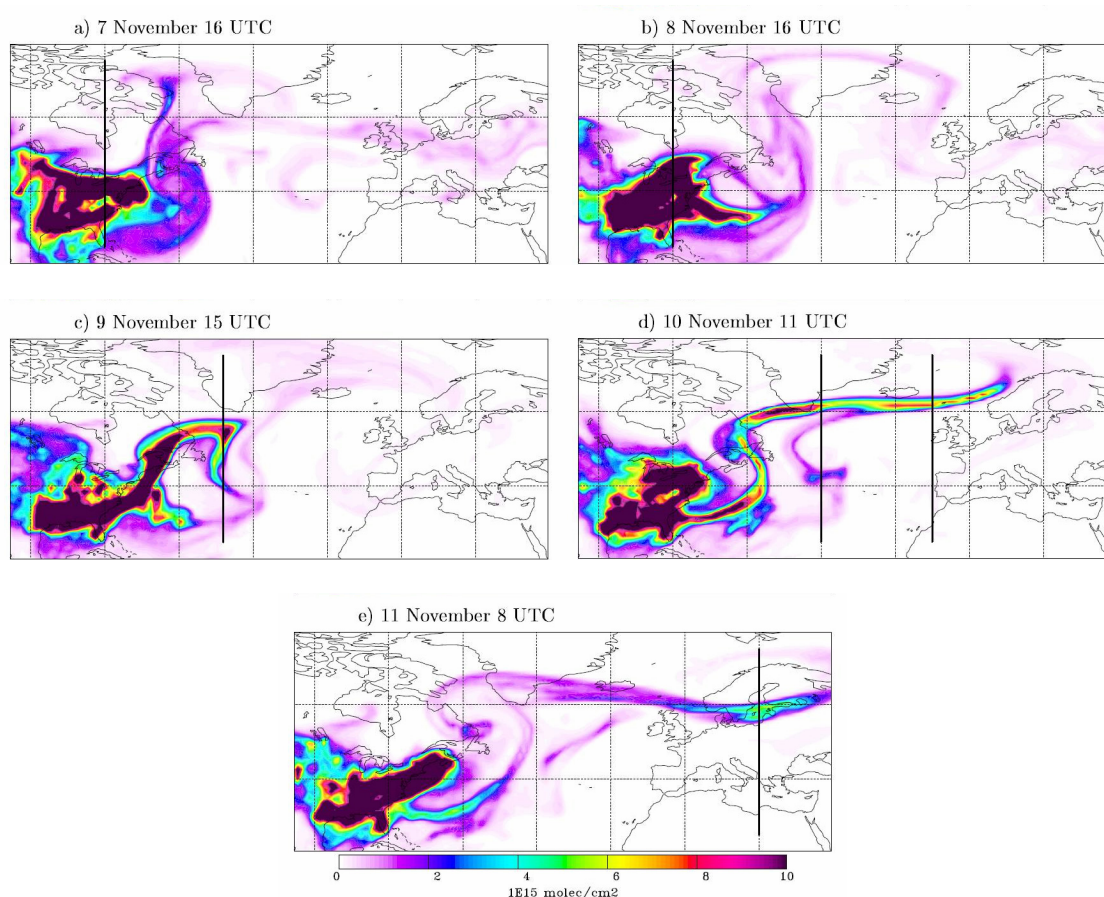


24. ábra: A Kasatochi vulkán kitöréséhez készített szimulációk 2008. augusztus 12-re vonatkozó eredményei a 350 K-es, illetve a 370 K-es szintről augusztus 8-án 0 UTC-kor, 6 UTC-kor és 12 UTC-kor, a Ny. h. 173°, É. sz. 52° középpontú, 4° átmérőjű területről indított szennyezésfelhők esetén

8.2. Rövid tartózkodási idejű légköri összetevők sodródása

A 6.2. fejezetben láthattuk, hogy egy vonaldarabnak a hossza már néhány nap elteltével exponenciálisan nyúlik. Így azt várjuk, hogy rövid tartózkodási idejű összetevők esetében is megfigyelhetők a légkörben a kaotikus sodródásra jellemző hosszan elnyúló szálak.

A 25. ábrán Észak-Amerikából származó nitrogén-oxidok terjedése mutat erre példát. A nitrogén-oxidok erősen reaktív gázok, légköri tartózkodási idejük a felső troposzférában is csupán 1-2 nap (a planetáris határrétegben órás nagyságrendű) (*Jaeglé et al.*, 1998), ezért általában a koncentrációjuk a forrásterületeken magas, távolabb pedig nagyságrendekkel alacsonyabb. A kontinensek közötti nyomanyag transzport azonban többnyire néhány napot, néhány hetet vesz igénybe (*Stohl et al.*, 2003).



25. ábra: Teljes légszlopra vonatkozó NO_x koncentrációk (10^{15} molekula/cm²) a FLEXPART modell alapján 2001. november a) 7-én, b) 8-án, c) 9-én, d) 10-én és e) 11-én. (*Stohl et al.*, 2003)

A 25. ábrán láthatjuk, hogy speciális meteorológiai feltételek mellett az Atlanti-óceán felett Észak-Amerikából egy hosszan kinyúló, elsodródó, vékonyabb szál formájában néhány nap alatt Európába is elérhet a szennyeződés. Ekkor kivételesen nagy zonális szélsőségek uralkodtak a térségben. (*Stohl et al.*, 2003)

Ez arra utal, hogy a kaotikus viselkedés, a sodródás során megjelenő bonyolult, szálas szerkezetek, a jellemzően hosszan elnyúló kacsok nemcsak passzív nyomelemek esetén képesek kialakulni. A szálasság akkor is megfigyelhető, ha reakciókban résztvevő gázok, szennyeződések sodródását vizsgáljuk, amelyek véges élettartamúak. Szimulációink alapján egy szennyezésfelhőben a szálas szerkezet néhány nap (általában 2-4 nap) után jelenik meg, így a légkörben az ennél nagyobb tartózkodási idejű szennyeződések esetén megfigyelhető.

A bonyolult fraktál szerkezetek jelenléte fontos szerepet játszik abban az esetben, ha a sodródó részecskék kémiaiilag aktívak. Légköri áramlásokban ezt a jelenséget, valamint a sodródó anyagok fraktáldimenziójának a kémiai reakcióegyenletekbe történő beépítését *Wonhas and Vassilicos* (2003) vizsgálták részletesebben.

9. Összefoglalás

A dolgozatban numerikus szimuláció segítségével passzív nyomjelző anyagok követésével bemutattuk a szabad légkörben történő kaotikus sodródás jellemzőit.

Láthattuk, hogy a közeli részecskepályák exponenciálisan távolodnak egymástól, azaz a rendszer érzékeny a kezdőfeltételekre és a mozgás hosszú távon előrejelezhetetlen.

Egy szennyezésfelhő sodródása, szétoszlása során megfigyelhettük a felhő kezdeti alakjának deformálódását, hosszú, vékony szálak kifejlődését, amelyek az idő előrehaladtával összegyűrődnek, finom, szálas, tekervényes, fraktál szerkezetű képet alakítanak ki a féltekén. Néhány esetre megbecsültük a Ljapunov-exponenst, amely térben finom szerkezetű eloszlást mutat, valamint meghatároztuk a topologikus entrópiát, amely a Ljapunov-exponenshez képest homogénabb térbeli eloszlással rendelkezik. A Ljapunov-exponensek átlagos értékét más tanulmányokkal összehangban 0,3 1/nap-nak találtuk, míg a légköri áramlásokban eddig még tudomásunk szerint nem vizsgált topologikus entrópia tipikus értéke a szimulációink alapján 0,4 1/nap. Ezek a mérőszámok a kaotikusság erősségére utalnak: minél nagyobb az értékük, annál kaotikusabb a rendszer.

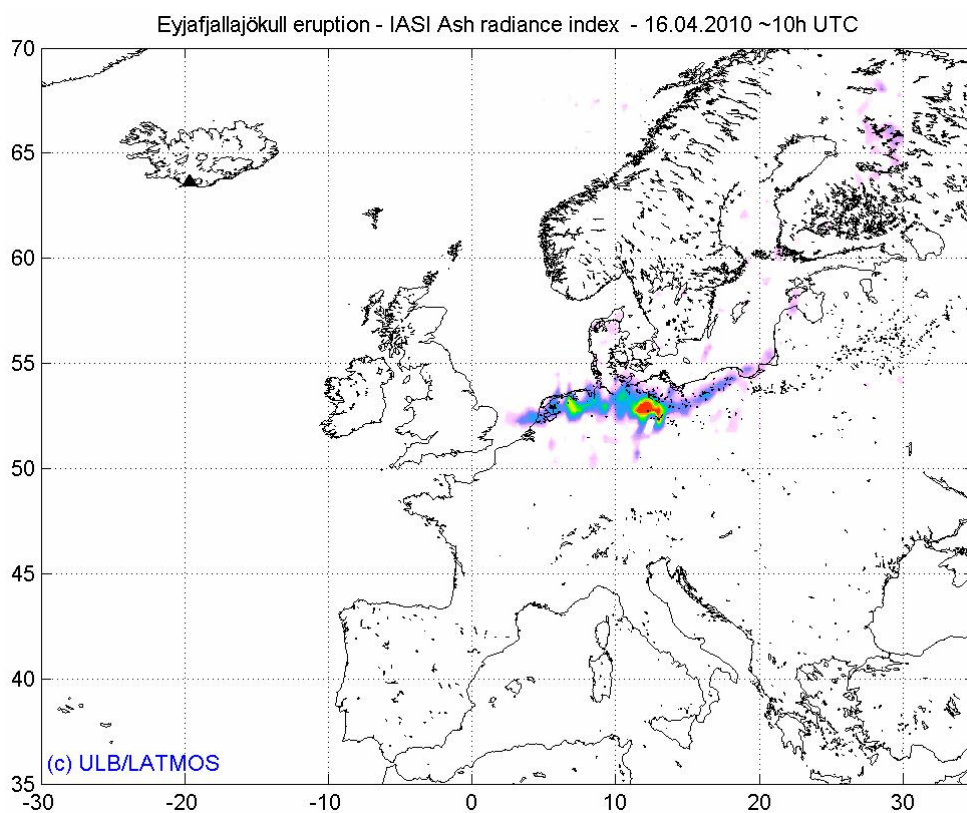
Megmutattuk, időben hogyan változik a szennyezésfelhő fraktáldimenziója, információs és korrelációs dimenziója, valamint azt, hogy a dimenziók változása mit jelent a felhő kiterjedésére, alakjára és eloszlására vonatkozóan. A sodródó szennyezésfelhő megjelenési formái (5. ábra) összehangban vannak a dimenziók által leírt sodródási képekkel. A szennyezésfelhő hamar elveszti kezdeti homogén pontszerű alakját ($D_0, D_1, D_2 \approx 0$), ekkor a dimenziók is egyre nagyobb értékeket vesznek fel. A szennyezésfelhő szálas szerkezetűvé formálódik, sűrűbb és ritkább tartományok jelennek meg ($D_0 > D_1$), majd körülbelül egy hónap után az inhomogenitás csökkenni kezd, és a vizsgált esetben a részecskesokaság két hónap elteltével nagyjából már egyenletes borítja be a féltekét ($D_0 \approx D_1 \approx D_2 \approx 2$).

Numerikus szimulációk segítségével rávilágítottunk arra, hogy a kezdetben koncentrált szennyezésfelhők a földrajzi szélességtől és az évszaktól függően átlagosan 20-50 nap alatt érnek körbe a féltekén, és a félteke hosszúsági körök szerinti közel egyenletes beborításához 1-2 hónap szükséges. A trópusi területekről indított felhőknek telik a legtöbb időbe, a közepes szélességeken kibocsátottaknak a legkevesebbe, míg körbe érnek vagy homogenizálódnak a félgömbön, ami megfelel az előzetes várakozásoknak. A

felhők a féltekék telén hamarabb borítják be az adott félgömböt, ami a sarkvidékek és a trópusi területek között fellépő, nyárinál nagyobb hőmérsékletkülönbségnek, intenzívebb cirkulációnak köszönhető. A körbeérési és homogenizálódási idők szórásai a trópusokon a legnagyobbak és a közepes szélességeken a legkisebbek.

Légköri megfigyelések segítségével megbizonyosodhattunk róla, hogy a földi szélmezőben való sodródás szimulációja során a sodródási képen látható szövevényes, szálas, fraktál szerkezetű alakzatok, elnyúló kacsok a légkörben valóban megjelennek. Láthattuk, hogy a kaotikus sodródás nemcsak hosszú, hanem rövid tartózkodási idejű gázok esetén is szerepet játszhat a transzportfolyamatokban, a légszennyezésben.

További célkitűzéseink között szerepel az izlandi Eyjafjallajökull vulkán 2010-es kitöréseikor a levegőbe kerülő hamu, por, gázok terjedésének szimulálása, az eredmények összehasonlítása a műholdképek alapján meghatározott eloszlásokkal (26. ábra). A modellünket a jövőben olyan irányban fejlesztjük tovább, hogy figyelembe tudjuk venni a részecskék ülepedését is.



26. ábra: Az izlandi Eyjafjallajökull vulkán kitörésekor a levegőbe került hamu 2010. április 16-án 10 UTC-kor (<http://www.eumetsat.int/Home/Main/News/Features/717626>)

Végezetül hangsúlyozzuk, hogy az itt bemutatott kaotikus viselkedés a *szennyezésfelhő sodródásának* kaotikussága, mely független a légkör kaotikusságától (turbulens természetétől). Amit láttunk, teljesen általános: háromdimenziós áramlásban vagy kétdimenziós időfüggő áramlásban a sodródás kaotikus volta miatt kialakulhat a sodródó anyag szálak, fraktál szerkezete, amelyet légköri áramlásban történő szennyezésfelhők terjedése esetén is megfigyelhetünk.

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni témavezetőimnek, Tél Tamásnak és Tasnádi Péternek a dolgozat elkészítése során adott hasznos ötleteket, segítséget és biztatást.

Köszönettel tartozom Horányi Andrásnak, Putsay Máriának és Kocsis Zsófiának az Eyjafjallajökull vulkán kitörésével kapcsolatos műholdképek felkutatásában nyújtott segítségükért.

Köszönöm Haszpra Lászlónak, Homonnai Viktóriának, Mincsovcics Miklósnak, Nagy Ágnesnek, Pattantyús-Ábrahám Margitnak a tanácsait és a dolgozattal kapcsolatos értékes észrevételeit, építő megjegyzéseit.

Irodalomjegyzék

- Alligood, K. T., Sauer, T. D., Yorke, J. A., 1996: Chaos: An introduction to dynamical systems. *Springer-Verlag*, New York.
- Aref, H., 1984: Stirring by chaotic advection. *Journal of Fluid Mechanics*, **143**, 1-21.
- Aref, H., 2002: The development of chaotic advection. *Physics of Fluids*, **14**, 4, 1315-1325.
- Behringer, R. P., Meyers, S. D., Swinney, H. L., 1991: Chaos and mixing in a geostrophic flow. *Physics of Fluids A*, **3**, 1243-1248.
- Bermejo, R., 1990: On the equivalence of semi-Lagrangian schemes and particle-in-cell finite-element methods. *Monthly Weather Review*, **118**, 979-987.
- Bowman, K. P., 1993: Large-scale isentropic mixing properties of the Antarctic Polar Vortex from analyzed winds. *Journal of Geophysical Research*, **98**, 23013-23027.
- Czelnai R., Götz G., Iványi Zs., 1982: Bevezetés a meteorológiába II. rész: A mozgó légkör és óceán. *Országos Meteorológiai Szolgálat*, Budapest.
- Götz G., 2001: Káosz és prognosztika. *Országos Meteorológiai Szolgálat*, Budapest.
- Götz G. és Rákóczi F., 1981: A dinamikus meteorológia alapjai. *Tankönyvkiadó*, Budapest.
- Homonnai V., 2008: Sodródási jelenségek vizsgálata forgatott közegekben: kísérleti vizsgálat és környezeti analógiák. *ELTE TTK, Meteorológiai Tanszék, Tudományos Diákköri Dolgozat*.
- Huber, M., McWilliams, J. C., Ghil, M., 2001: A climatology of turbulent dispersion in the troposphere. *Journal of Atmospheric Sciences*, **58**, 2377-2394.
- Jaeglé, L., Jacob, D. J., Wang, Y., Weinheimer, A. J., Ridley, B. A., Campos, T. L., Sachse, G. W., Hagen, D. E., 1998: Sources and chemistry of NO_x in the upper troposphere over the United States. *Geophysical Research Letters*. **25**, 1705-1708.
- Lorenz, E. N., 1963: Deterministic nonperiodic flow. *Journal of Atmospheric Sciences*, **20**, 130-141.
- Merrill, J. T., Bleck, R., Boudra, D., 1986: Techniques of Lagrangian trajectory analysis in isentropic coordinates. *Monthly Weather Review*, **114**, 571-581.
- Mizuta, R. and Yoden, S., 2001: Chaotic mixing and transport barriers in an idealized stratospheric polar vortex. *Journal of Atmospheric Sciences*, **58**, 2616-2629.
- Newell, R. E., Newell, N. E., Zhu, Y., Scott, C., 1992: Tropospheric rivers? — A pilot study. *Geophysical Research Letters*, **12**, 2401-2404.
- Newton, P., 2001: The N-vortex problem. *Springer-Verlag*, New York.
- Péczely Gy., 1979: Éghajlattan. *Tankönyvkiadó*, Budapest.

- Pierrehumbert, R. T. and Yang, H.*, 1993: Global chaotic mixing on isentropic surfaces. *Journal of Atmospheric Sciences*, **50**, 2462-2480.
- Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., Flannery, B. P.*, 1992: Numerical Recipes in Fortran 77: The Art of Scientific Computing. *Cambridge University Press*, New York.
- Salamon, T. H., Weeks, E. R., Swinney, H. L.*, 1993: Observation of anomalous diffusion and Lévy flights in a two-dimensional rotating flow. *Physical Review Letters*, **71**, 3975-3978.
- Salamon, T. H., Weeks, E. R., Swinney, H. L.*, 1994: Chaotic advection in a two-dimensional flow: Lévy flights and anomalous diffusion. *Physica D*, **76**, 70-84.
- Sándor V. és Wantuch F.*, 2005: Repülésmeteorológia. *Országos Meteorológiai Szolgálat*, Budapest.
- Staniforth, A. and Côté, J.*, 1991: Semi-Lagrangian integration schemes for atmospheric models – A review. *Monthly Weather Review*, **119**, 2206-2223.
- Stohl, A.*, 1998: Computation, accuracy and applications of trajectories – A review and bibliography. *Atmospheric Environment*, **32**, 947-966.
- Stohl, A. and Seibert, P.*, 1998: Accuracy of trajectories as determined from conservation of meteorological tracers. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, **124**, 1465-1484.
- Stohl, A., Wotawa, G., Seibert, P., Kromp-Kolb, H.*, 1995: Interpolation errors in wind fields as a function of spatial and temporal resolution and their impact on different types of kinematic trajectories. *Journal of Applied Meteorology*, **34**, 2149-2165.
- Stohl, A., Huntrieser, H., Richter, A., Beirle, S., Cooper, O. R., Eckhardt, S., Forster, C., James, P., Spichtinger, N., Wenig, M., Wagner, T., Burrows, J. P., Platt, U.*, 2003: Rapid intercontinental air pollution transport associated with a meteorological bomb. *Atmospheric Chemistry and Physics Discussion*, **3**, 969-985.
- Sutton, R. T., Maclean, H., Swinbank, R., O'Neill, A., Taylor, F. W.*, 1994: High resolution stratospheric tracer fields estimated from satellite observations using Lagrangian trajectory calculations. *Journal of Atmospheric Sciences*, **51**, 2995-3005.
- Tél T. és Gruiz M.*, 2002: Kaotikus dinamika. *Nemzeti Tankönyvkiadó*, Budapest.
- Tél T., Károlyi G., Péntek Á., Scheuring I., Toroczkai Z., Grebogi, C., Kadtke J.*, 2000: Chaotic advection, diffusion, and reactions in open flows. *Chaos*, **10**, 89-98.
- Thiffeault, J.-L.*, 2010: Braids of entangled particle trajectories. *Chaos*, **20**, 017516.
- Von Hardenberg, J., Fraedrich, K., Lunkeit, F., Provenzale, A.*, 2000: Transient chaotic mixing during a baroclinic life cycle. *Chaos*, **10**, 122-134.

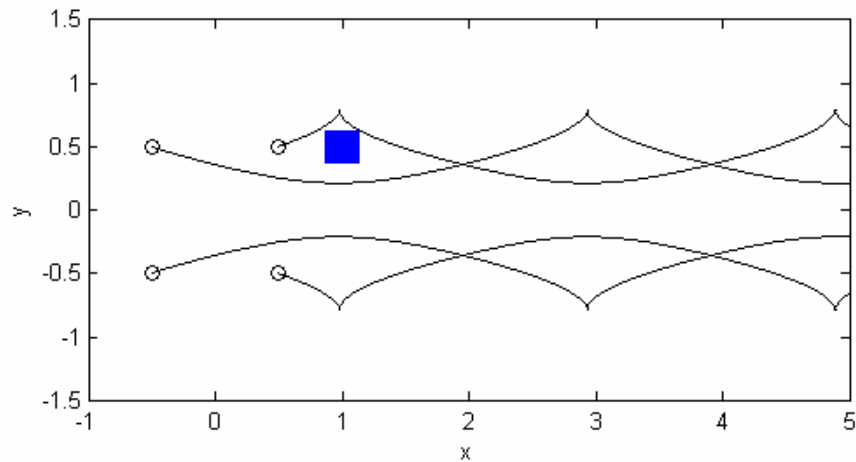
- Waythomas, C.F., Prejean, S.G., and Schneider, D.J., 2008: Small volcano, big eruption, scientists rescued just in time. *US Department of the Interior*.
[<http://www.avo.alaska.edu/activity/Kasatochi08/Kasatochi2008PLW.php>]
- Wonhas, A. and Vassilicos, J. C., 2003: Mixing and geometry of advected, chemically reactive scalar fields: Application to chlorine deactivation over mid-northern latitudes. *Journal of Geophysical Research*, **108**, 4325.
- Wright, J., 2003: Phys 7123 Final Project. Quasihorizontal chaotic mixing in reanalysis windfields.
[<http://chaosbook.dk/projects/Wright/Wright.pdf>]
- Yang, H. and Pierrehumbert, R., T., 1994: Production of dry air by isentropic mixing. *Journal of Atmospheric Sciences*, **51**, 3437-3454.

Függelék

F.1. Az interpolációk vizsgálata

Az interpoláció révén nyert adatok és a valós adatok eltérését egyszerű példán vizsgálhatjuk.

Négy pontörvényt helyezünk el a síkon egy négyzet csúcaiban úgy, hogy a felső kettőnek az örvényerőssége egységnyi, az alsó kettőé ennek (-1)-szerese. Minden örvény a másik három terében sodródik. Az örvények pályái, amelyek periodikusak, az F.1. ábrán láthatók. Ennek a négy örvénynek a terében vizsgáljuk részecskéknek a sodródását. A részecskék kezdeti helye szintén az F.1. ábrán látható: egy (1; 0,5) középpontú, 0,2 oldalú négyzet.



F.1. ábra: A négy örvény mozgása és a sodródó részecskék kezdeti helyzete a vizsgált esetben

Az örvények mozgásegyenleteiből (*Newton, 2001*):

$$\begin{aligned}\dot{x}_j &= -\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^4 K_k \frac{y_j - y_k}{r_{jk}^2} \\ \dot{y}_j &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^4 K_k \frac{x_j - x_k}{r_{jk}^2}\end{aligned} \quad j = 1, 2, 3, 4 \quad (\text{F.1.1})$$

meghatározható az örvényközéppontok $(x_j(t), y_j(t))$ pályája. Itt \dot{x}_j , \dot{y}_j jelöli az örvényközéppontok sebességét, x_j , y_j a helykoordinátákat, r_{jk} a j -edik és k -adik örvény távolságát, K_k az örvényerősségeket. Az örvényközéppontok ismeretében felírhatók az (x, y) pontban lévő részecske mozgásegyenletei (*Newton, 2001*):

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\sum_{k=1}^4 K_k \frac{y - y_k}{r_k^2}, \\ \dot{y} &= \sum_{k=1}^4 K_k \frac{x - x_k}{r_k^2},\end{aligned}\tag{F.1.2}$$

ahol (x_k, y_k) jelöli a k -adik örvény helyét, r_k pedig a részecske távolságát a k -adik örvénytől. Ezekből az egyenletekből számítható a részecske $(x(t), y(t))$ pályája.

Itt tehát ismerjük a pontos sebességadatokkal számolt részecskehelyzeteket, és az ebből származtatható referenciamennyiségeket.

Ezek után úgy tekintjük, mintha csak egy adott rácson, az (x_i, y_i) koordinátájú pontokban ismernénk a sebességértékeket:

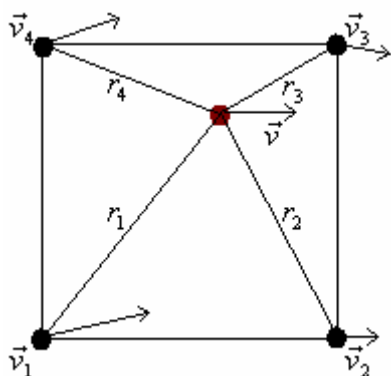
$$\begin{aligned}u(x_i, y_i, t) &= -\sum_{k=1}^4 K_k \frac{y_i - y_k(t)}{r_{ik}^2}, \\ v(x_i, y_i, t) &= \sum_{k=1}^4 K_k \frac{x_i - x_k(t)}{r_{ik}^2},\end{aligned}\tag{F.1.3}$$

ahol (x_k, y_k) jelöli a k -adik örvény helyét, r_{ik} pedig az (x_i, y_i) rácspont távolságát a k -adik örvénytől. Majd ezekből az $(u(x_i, y_i, t), v(x_i, y_i, t))$ sebességkomponensekből számítjuk ki különböző interpolációs módszerekkel egy adott pontban a sebességet. Ezeket vetjük össze a valóságos értékekkel.

Háromféle interpolációt próbáltunk ki: az $1/r^2$ -es interpolációt, a bilineáris interpolációt és a biköbös spline interpolációt.

F.1.1. $1/r^2$ -es interpoláció

Egy egyszerű módszer, ha az (x, y) pontbeli sebességet a pontot övező négyzet csúcspontjaiban mért sebességekből úgy számítjuk ki, hogy a csúcspontbeli sebességeket a pont és a csúcspontok távolságának négyzetével fordítottan arányosan súlyozzuk:

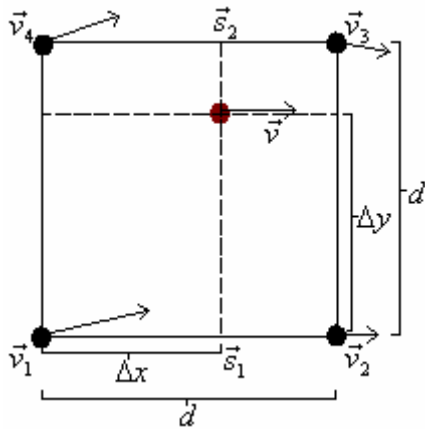


$$\vec{v}(x, y) = \frac{\sum_{i=1}^4 \frac{1}{r_i^2} \vec{v}_i}{\sum_{i=1}^4 \frac{1}{r_i^2}}.\tag{F.1.1.1}$$

Abban az esetben, ha az a hely, ahol ki szeretnénk számítani a sebességet, éppen rácspontra esik, a fenti képlet határértékként értelmezendő (van olyan i , amire $r_i = 0$), ekkor a rácspontbeli sebességgel számolunk.

F.1.2. Bilineáris interpoláció

Egy másik, viszonylag nem nagy számításigényű feladat, ha adott pontban a sebességet lineáris interpolációval számítjuk ki. Adott d rácstávolság esetén először



meghatározzuk, hogy a részecske a környező rácspontoktól x és y irányban milyen távol helyezkedik el (Δx és Δy). Majd x irányban lineáris interpolációt használva meghatározzuk az \vec{s}_1 és az \vec{s}_2 segédsebességeket:

$$\begin{aligned}\vec{s}_1 &= \frac{d - \Delta x}{d} \vec{v}_1 + \frac{\Delta x}{d} \vec{v}_2, \\ \vec{s}_2 &= \frac{d - \Delta y}{d} \vec{v}_3 + \frac{\Delta y}{d} \vec{v}_4.\end{aligned}\tag{F.1.2.1}$$

Ezután \vec{s}_1 -ből és \vec{s}_2 -ből most y irányban végezve a lineáris interpolációt, kiszámoljuk az adott pontbeli \vec{v} sebességet:

$$\vec{v}(x, y) = \frac{d - \Delta y}{d} \vec{s}_1 + \frac{\Delta y}{d} \vec{s}_2.\tag{F.1.2.2}$$

Az x és az y irányú lineáris interpoláció sorrendje felcserélhető.

F.1.3. Biköbös spline interpoláció

Sokszor azonban érdemesebb a pontosabb számítások érdekében jobb interpolációs eljárást választani. Az úgynevezett spline alkalmazása olyankor merül fel, amikor elvárjuk a közelítőfüggvény simaságát. A köbös spline függvény meghatározott szakaszon értelmezett polinom, az egymást követő pontokat harmadfokú polinomok kötik össze. Az egyes polinomok mindig két egymást követő rácspont között értelmezettek. A lineárishoz képest a köbös spline interpoláció azzal az előnnyel jár, hogy a polinom a rácspontok között úgy görbül, hogy görbéje simán illeszkedik a szomszédos szakaszokon értelmezett polinomokhoz.

Tehát a köbös spline interpolációs függvény a következőket teljesíti: folytonos, az első deriváltja folytonos és sima, a második deriváltja is folytonos. A köbös spline interpolációról és numerikus alkalmazásáról részletesebben például *Press et al.* (1992) munkájában olvashatunk, illetve a köbös spline interpolációról szóló fejezet kibővített fordítását megtalálhatjuk a Wikipedián (<http://hu.wikipedia.org/wiki/Interpoláció>). A

következőkben áttekintjük az egydimenziós rácson alkalmazott köbös spline interpolációt. Kétdimenziós rácson, az F.1.2. fejezetben bemutatott bilineáris interpolációhoz hasonlóan, két köbös spline interpoláció elvégzésével tudjuk becsülni egy adott (x, y) pontban a sebességet.

Az egydimenziós esetben a feladat az, hogy meghatározzuk az egyes szakaszokon értelmezett polinomok együtthatóit a fenti feltételek betartásával. Legyen adott az x_i rácspontokban egy függvény: $v_i = v(x_i)$, $i = 1, \dots, N$, és keressük ennek interpolált változatát az $[x_j, x_{j+1}]$ intervallumon. A számítás megkönnyítése érdekében úgy tekintjük, mintha a másodrendű derivált értékei a rácspontokban ismertek lennének, és v_j'' -vel jelöljük őket.

Jelöljük az $[x_j, x_{j+1}]$ intervallumban a meghatározandó függvényt $v_j(x)$ -szel. Mivel a $v_j''(x)$ deriválnak folytonos kell lennie, az interpolációs polinom másodrendű deriváltját leírhatjuk lineáris interpolációval. Az $[x_j, x_{j+1}]$ intervallumon fennáll, hogy

$$v_j''(x) = A_j(x)v_j'' + B_j(x)v_{j+1}'', \quad (\text{F.1.3.1})$$

ahol az $A_j(x)$ és $B_j(x)$ függvényeket a lineáris interpoláció összefüggései alapján adjuk meg:

$$A_j(x) = \frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j}, \quad B_j(x) = 1 - A_j(x) = \frac{x_j - x}{x_j - x_{j+1}}. \quad (\text{F.1.3.2})$$

Az $v_j(x)$ interpolációs függvényszakaszról tudjuk, hogy maga is folytonosan kapcsolódik a szomszédos szakaszokon értelmezett függvényekhez, de a simasági követelmények miatt általában nem lineáris. Általánosságban felírható, hogy

$$v_j(x) = A_j(x)v_j + B_j(x)v_{j+1} + g_j(x), \quad (\text{F.1.3.3})$$

ahol $g_j(x)$ harmadfokú polinom, és a folytonossági feltétel kielégítése céljából kikötjük, hogy $g_j(x_j) = g_j(x_{j+1}) = 0$.

Az $A_j(x)$ és $B_j(x)$ függvények lineárisak, ezért a második deriváltjuk 0. Figyelembe véve, hogy (F.1.3.1) az (F.1.3.3) második deriváltja:

$$g_j''(x) = A_j(x)v_j'' + B_j(x)v_{j+1}'', \quad (\text{F.1.3.4})$$

melynek kétszeres integrálása után a $g_j(x)$ -et felírhatjuk

$$g_j(x) = C_j(x)v_j'' + D_j(x)v_{j+1}'' \quad (\text{F.1.3.5})$$

alakban, ahol fennáll, hogy $C_j''(x) = A_j(x)$ és $D_j''(x) = B_j(x)$.

Figyelembe véve, hogy $C_j(x_j) = D_j(x_j) = C_j(x_{j+1}) = D_j(x_{j+1}) = 0$, és megoldva a $C_j(x)$ -re és $D_j(x)$ -re vonatkozó két másodrendű differenciálegyenletet, azt kapjuk, hogy

$$C_j(x) = \frac{1}{6}(A_j^3(x) - A_j(x))(x_{j+1} - x_j)^2, \quad (\text{F.1.3.6})$$

$$D_j(x) = \frac{1}{6}(B_j^3(x) - B_j(x))(x_{j+1} - x_j)^2. \quad (\text{F.1.3.7})$$

A keresett $v_j(x)$ interpolációs polinom meg is lenne határozva, ha a v_j'' másodrendű derivált értékei a rácspontokban az v_j -hez hasonlóan ismertek lennének:

$$v_j(x) = A_j(x)v_j + B_j(x)v_{j+1} + \frac{1}{6}(A_j^3(x) - A_j(x))(x_{j+1} - x_j)^2 v_j'' + \frac{1}{6}(B_j^3(x) - B_j(x))(x_{j+1} - x_j)^2 v_{j+1}'' \quad (\text{F.1.3.8})$$

Mindeddig csak a $v_j(x)$ és a $v_j''(x)$ másodrendű derivált folytonosságát használtuk fel, és az $v_j'(x)$ elsőrendű deriváltét nem. Az $[x_j, x_{j+1})$ intervallumon:

$$v_j'(x) = \frac{v_{j+1} - v_j}{x_{j+1} - x_j} - \frac{x_{j+1} - x_j}{6} \left[(3A_j^2(x) - 1)v_j'' + (3B_j^2(x) - 1)v_{j+1}'' \right]. \quad (\text{F.1.3.9})$$

Felírva ugyanezt az $[x_{j-1}, x_j)$ szakaszra:

$$v_{j-1}'(x) = \frac{v_j - v_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} - \frac{x_j - x_{j-1}}{6} \left[(3A_{j-1}^2(x) - 1)v_{j-1}'' + (3B_{j-1}^2(x) - 1)v_j'' \right]. \quad (\text{F.1.3.10})$$

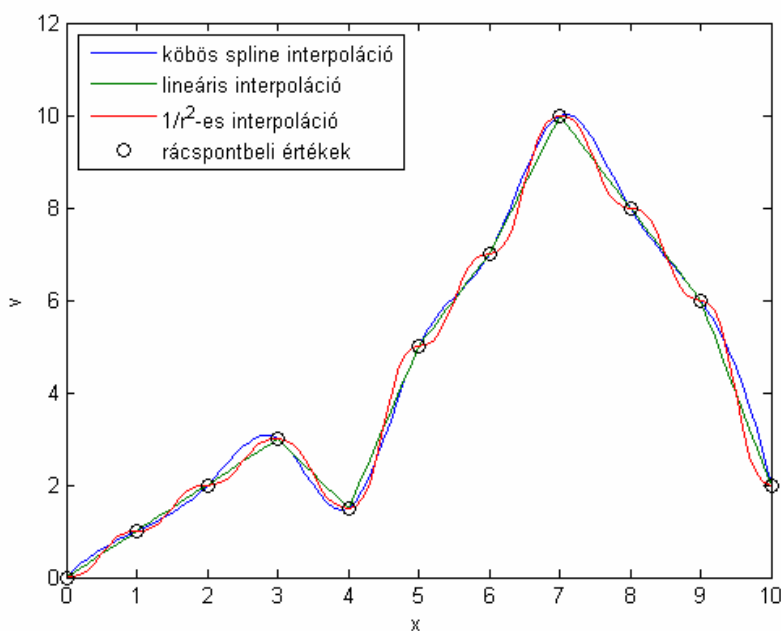
A derivált folytonossága azt jelenti, hogy $v_{j-1}'(x_j) = v_j'(x_j)$, mely az

$$\frac{x_j - x_{j-1}}{6} v_{j-1}'' + \frac{x_{j+1} - x_{j-1}}{3} v_j'' + \frac{x_{j+1} - x_j}{6} v_{j+1}'' = \frac{v_{j+1} - v_j}{x_{j+1} - x_j} - \frac{v_j - v_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} \quad (\text{F.1.3.11})$$

egyenlethez vezet. Ez $n-2$ egyenletet jelent n darab ismeretlen v_j'' értékre. Ezért tehetünk további kikötéseket. Ha például $v_1'' = v_N'' = 0$ -nak választjuk, akkor a módszert természetes köbös spline-nak nevezzük (*Press et al.*, 1992).

Az F.2. ábrán a természetes köbös spline, a lineáris és az $1/r^2$ -es interpoláció összehasonlítása látható egydimenziós esetben. A vizsgált intervallumban a háromféle interpolációval meghatározott függvényértékek egymáshoz közeliak, azonban látható,

hogy a rácspontok környezetében az $1/r^2$ -es interpolációval számított értékek némileg eltérnek a másik két interpolációval kapottaktól.



F.2. ábra: A köbös spline, a lineáris és az $1/r^2$ -es interpoláció összehasonlítása egydimenziós esetben

A dolgozatban a bilineáris interpolációhoz hasonlóan egy x és egy y irányban történő köbös spline interpolációval becsültük az (x, y) pontban lévő részecske sebességkomponenseit (biköbös spline interpoláció).

F.1.4. Eredmények

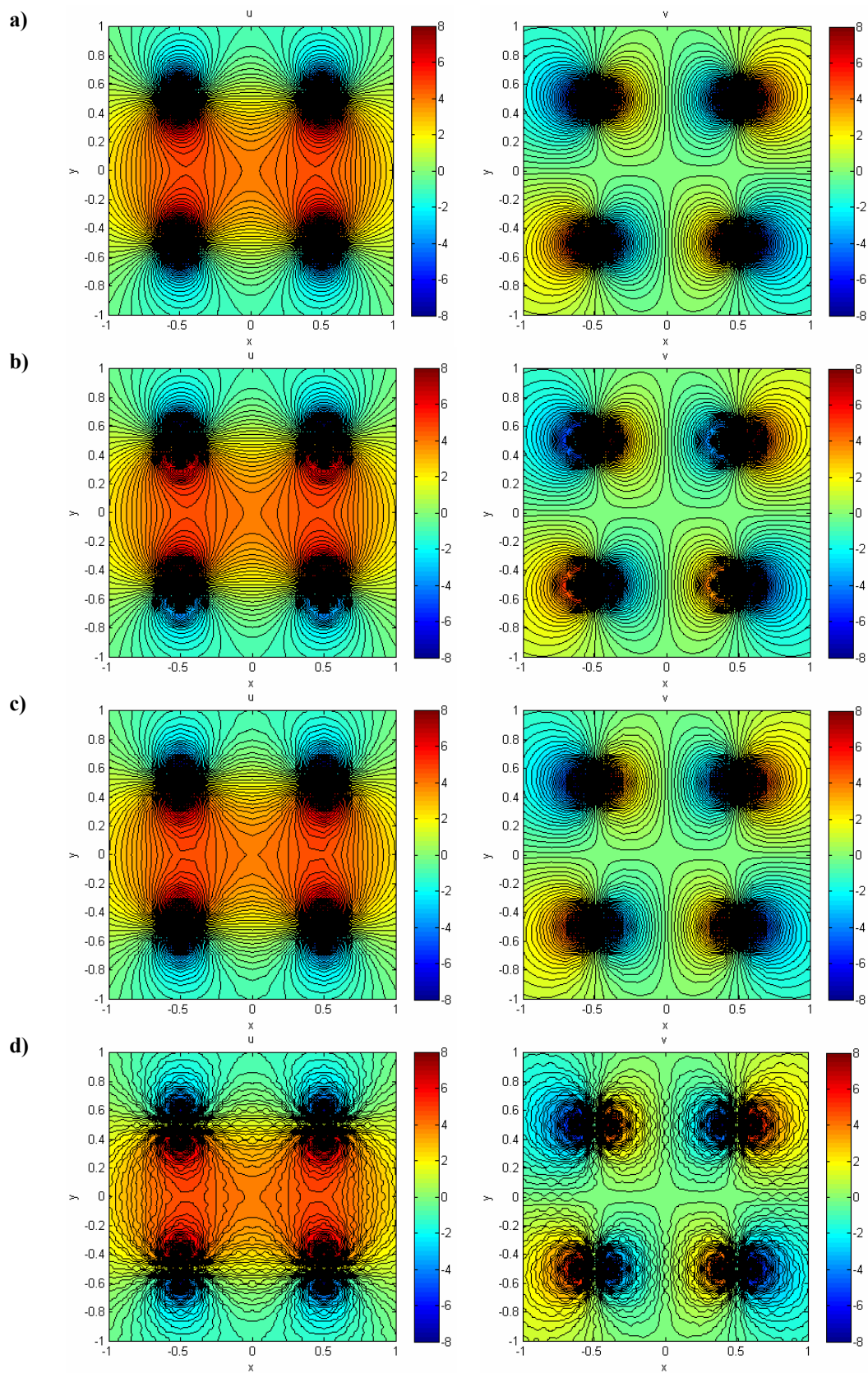
Az F.3. ábrán is jól látszik, hogy adott (0,1 egység) rácstávolság esetén a pontos sebességértékeket (F.3.a ábra) sokkal jobban közelítik a biköbös spline interpolációval (F.3.b ábra), illetve a bilineáris interpolációval (F.3.c ábra) meghatározott sebességkomponensek, mint az $1/r^2$ -es interpolációval (F.3.d ábra) számoltak. Nézzük, milyen hatásuk van az interpolációknak a sodródási képre!

Az F.4. ábrán negyedperiódusonként ábrázoltuk a sodródó részecskéket a valódi helyzetükben és a különböző interpolációkkal számolt helyeken. A 0. időpontban, a kezdeti helyzetben a pontok mind a négy ábrán egymást fedik. Később a különféle interpolációkkal meghatározott sodródási kép kicsit eltér egymástól és a valóságostól, ami főleg a bilineáris és az $1/r^2$ -es interpoláció példáján látszik. A bilineáris interpoláció

ábráján már a $t = T/4$ időpontban megjelenik az $x = 0$ és $x = 0,5$, illetve az $y = 0$ és $y = 0,25$ egyenesek által határolt területen egy, a valódi helyzetben nem megjelenő kacs. Ezen a tartományon az $1/r^2$ -es és a biköbös spline interpoláció esetén sem olyan sima a részecskék eloszlása, mint a valódi sodródási képen. A $t = 3T/4$ és a $t = T$ időpontban a bilineáris interpolációnál szintén feltűnnek kilógó kacsok, míg az $1/r^2$ -es interpoláció esetében a sodródó részecskék hosszabb számba rendeződnek, mint amit a valódi vagy a biköbös spline interpolációval meghatározott helyzetük mutat.

A „pontos” helyzethez képesti eltérést $d = 0,1$ rácstávolságok esetén az F.5. ábrán láthatjuk. Megvizsgáltuk, hogy az egyes részecskék interpolációval számított helyzete maximálisan mennyire tér el a valóságos helyzetüktől (F.5.a ábra). Ez mindhárom interpoláció alkalmazásánál az idő előrehaladtával erős növekedést mutat.

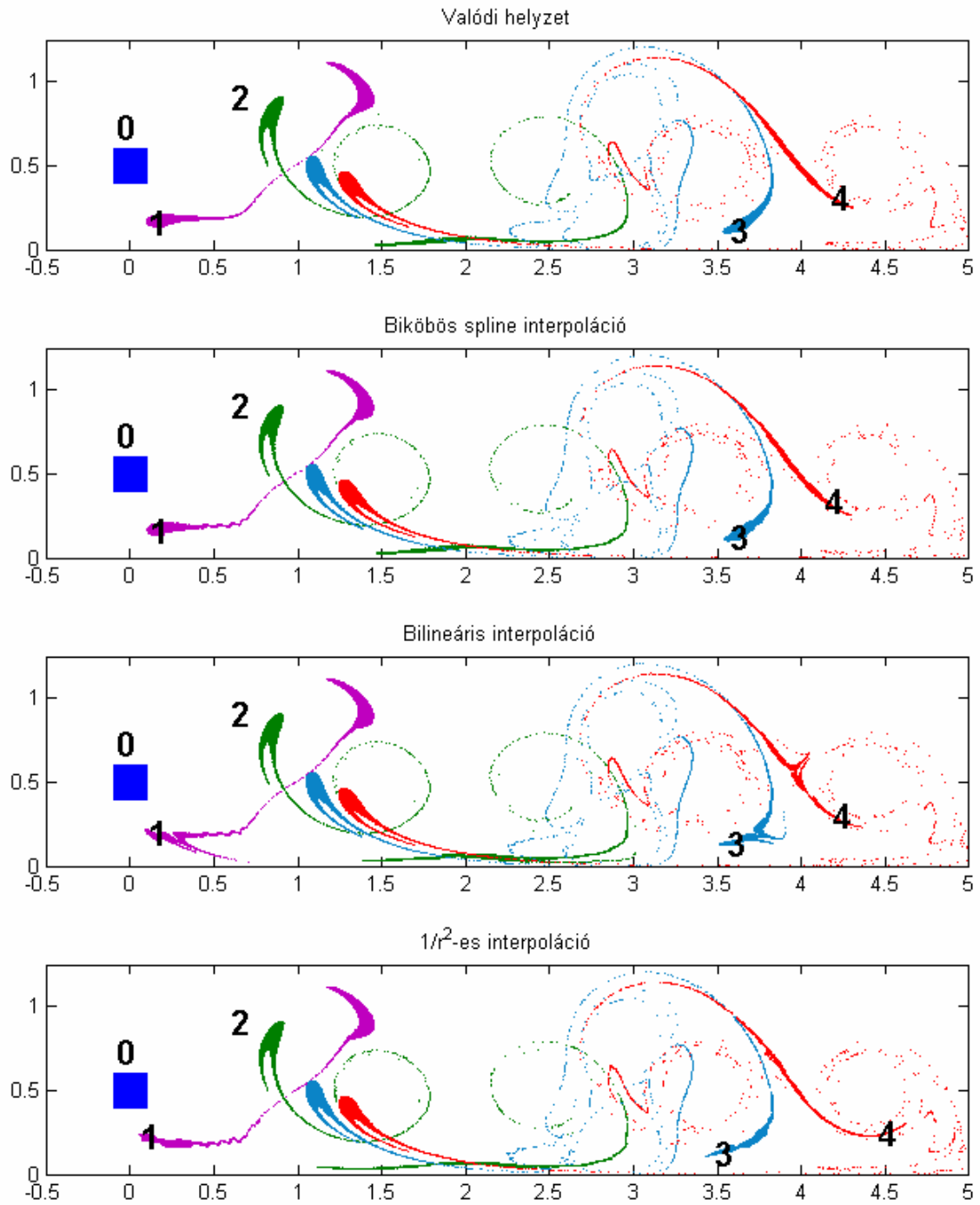
Ha az egyes részecskék interpolációval meghatározott és pontos helyzetei közötti eltérést átlagoljuk az összes részecskére (F.5.a ábra), időben az előzőnél kisebb növekedést tapasztalunk, és észrevehetjük, hogy a spline és a bilineáris interpoláció hasonló görbét rajzolnak ki.



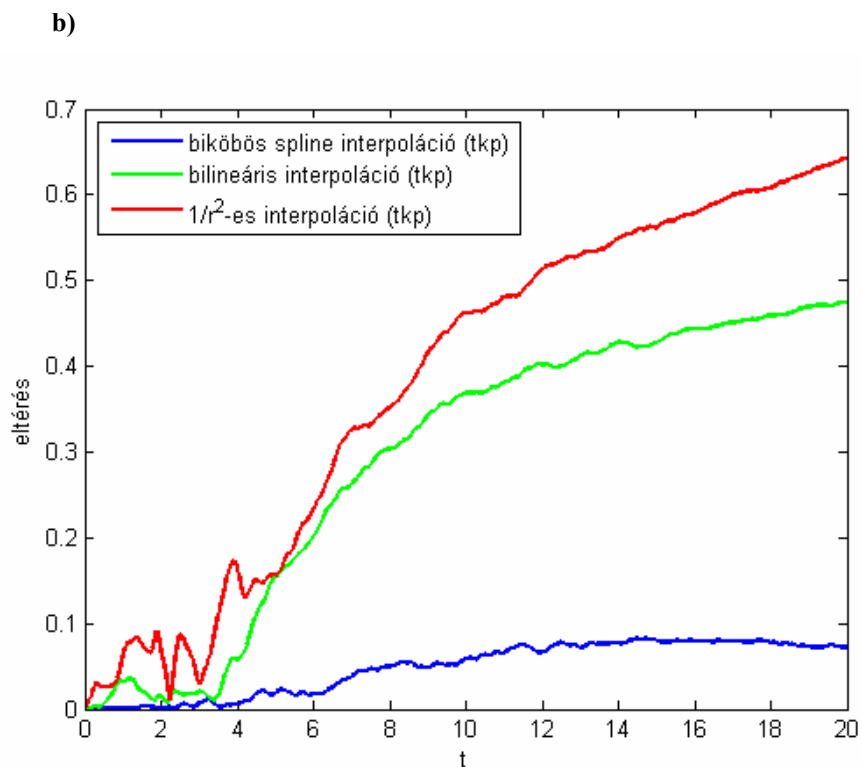
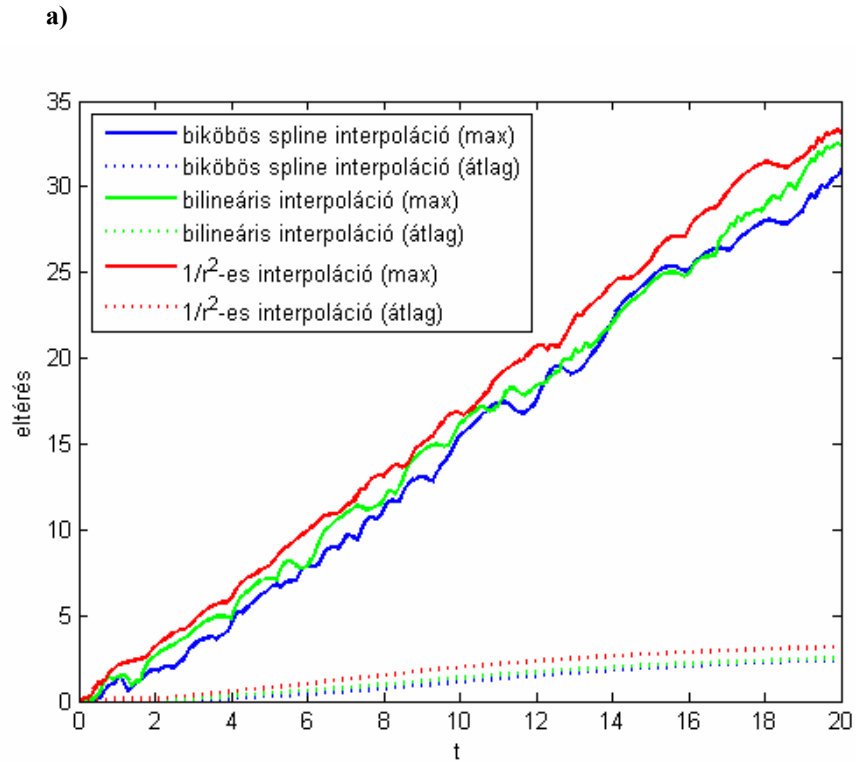
F.3. ábra: Az x irányú (u) és y irányú (v) sebesség nagysága a $t = 0$ időpillanatban $d = 0,1$ egység rácstávolság esetén: a) a pontos értékek, b) biköbös spline interpolációval számolva, c) bilineáris interpolációval számolva, d) $1/r^2$ -es interpolációval számolva

Az egyes részecskék a sodródás kaotikus volta és az interpolációkból adódó kis hibák következtében messze kerülhetnek valóságos helyzetüktől, ahogy az előző két ábra mutatja. A részecskék összességének elhelyezkedését jobban jellemzi a tömegközéppontjuk (F.5.b ábra). A pontos tömegközépponttól vett eltérés sokkal kisebb mértékben változik, mint az egyes részecskék maximális és átlagos távolsága. A tömegközéppont pályája a bilineáris interpoláció esetén a sodródás kezdetén nem különbözik jelentősen a spline-nal számítottól, azonban az eltérés hamar növekedésnek indul, ami jelentős hibához vezet. Ezzel szemben, ha a sebességmező interpolálására térben biköbös spline-t alkalmazunk, adott rács távolság esetén a pontos és az interpolációval meghatározott tömegközéppont a sodródás során a későbbi időpillanatokban sem különbözik számottevően, a hiba hosszú ideig valamilyen korláton belül marad ($d = 0,1$ -re ebben az esetben $t = 20$ időegységnél a hiba még kisebb, mint $0,1$).

Tehát az egyes részecskék ugyan nem ugyanoda érkeznek, bármilyen interpolációt is alkalmazunk, de az F.4. ábrán is megfigyelhető, hogy az összességük elrendeződése hasonló lesz ahhoz, mint ha pontosan számolnánk. A részecskék tömegközéppontjának mozgását sokkal jobban közelíti, ha a sebességmezőt biköbös spline módszerrel számítjuk, mint ha bilineáris vagy $1/r^2$ -es interpolációval tennénk, ezért a dolgozatban is a biköbös spline interpolációt alkalmaztunk.



F.4. ábra: A 10000 sodródó részecske helyzete a különböző interpolációkkal számolva negyedperiódusonként (ezt jelölik a számok), $d = 0,1$ ráctávolság esetén. A periódusidő $T = 2,166947$.
 Kék: $t = 0$ (0), lila: $t = T/4$ (1), zöld: $t = T/2$ (2), világos kék: $t = 3T/4$ (3), piros: $t = T$ (4).



F.5. ábra: Az interpolációval számolt részecskehelyzetek eltérése a valóságostól: a) maximális eltérés (max) és átlagos eltérés (átlag), és b) a részecskék tömegközéppontjának (tkp) eltérése $d = 0,1$ ráctávolság esetén.

F.2. A diffúzió szerepe a sodródásban

A diffúziós egyenlet:

$$\frac{dc(\vec{r},t)}{dt} = D \cdot \Delta c(\vec{r},t), \quad (\text{F.2.1})$$

ahol $c(\vec{r},t)$ jelöli az anyag koncentrációját adott helyen, adott pillanatban, D a diffúziós együttható, Δ a Laplace-operátor (Tél et al., 2000).

Ebből az L méretű foltra való szétterjedés ideje $T \sim L^2/D$ –vel becsülhető. A D diffúziós együttható értéke levegőben 10^{-5} m²/s nagyságrendű, így nyugvó közegben az 1 méterre való szétterjedés ideje $T \sim 1$ nap.

A turbulencia azonban felerősíti a diffúziót, ekkor a diffúziós együttható értéke 10 m²/s nagyságrendű (http://www.engineeringtoolbox.com/diffusion-coefficients-d_1404.html). Az 1 méterre történő szétterjedés ideje ezzel már csak $T \sim 0,1$ s, azonban az 1000 méterre (1 km) való szétterjedéshez még mindig $T \sim 10^5$ s ~ 1 nap szükséges, 10 km-nél pedig ez az idő már 100 nap.

Mindez álló közegben igaz. Áramlásban megjelenhet egy új távolság, mely fölé már szétterjedés nem történhet. Adott T_0 karakterisztikus idő mellett ezt a d távolságot a $T \sim L^2/D$ dimenzióanalízisen alapuló összefüggés alapján a

$$d \sim \sqrt{DT_0} \quad (\text{F.2.2})$$

összefüggéssel becsülhetjük.

Rendezett áramlásban, amelyben a sodródás kaotikus és az átlagos Ljapunov-exponens $\bar{\lambda}$, új távolságskálát vezethetünk be (Tél et al., 2000):

$$d = \sqrt{\frac{D}{\bar{\lambda}}}, \quad (\text{F.2.3})$$

hiszen kaotikus áramlásban az új karakterisztikus idő az előrejelzési idő, melynek nagyságrendje $1/\bar{\lambda}$. Ennél kisebb skálán a diffúzió fontos, és az (F.2.1) egyenlet használható. Ennél nagyobb léptékben a diffúzió elhanyagolható, ezért d -nél nagyobb skálán jogos az advekciós egyenlet használata. A légkörben a szimulációink alapján $\bar{\lambda} \approx 0,3$ 1/nap $\approx 3,5 \cdot 10^{-6}$ 1/s, így $d \sim 1$ km nagyságrendű. Így nagy skálán, egy egész féltekét kirajzoló képen a szimulációinkban nem láthatjuk nyomát a diffúzióknak.