

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Földrajz- és Földtudományi Intézet
Meteorológiai Tanszék

Alacsonyrendű modellek meteorológiai alkalmazása

SZAKDOLGOZAT



Készítette:

Balogh Máté

Földtudományi alapszak,
Meteorológus szakirány

Témavezető:

Dr. Tasnádi Péter

ELTE TTK, Meteorológiai Tanszék

Budapest, 2014

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés.....	3
2. A modellek bemutatása	5
2.1 Alacsonyrendű modell megformulázása Lorenz egyik modelljén keresztül.....	5
2.1.1 Szemléletes levezetés	5
2.1.2 Modell előállítása Barry Saltzman módszerével	10
2.2 Lorenz-féle alacsonyrendű légköri modell leírása	15
2.2.1 A kiindulás.....	15
2.2.2 A modell	16
2.2.3 Stacionárius állapotok	18
3. Az aszimmetrikus külső kényszerek szerepének vizsgálata a planetáris hullámformáció kialakításában	21
3.1 Aszimmetrikus termikus kényszer hiánya.....	21
3.2 Gyenge aszimmetrikus termikus kényszer	22
3.3 Mérsékelt aszimmetrikus termikus kényszer.....	23
3.4 Erős aszimmetrikus termikus kényszer	25
4. Az évek közötti szabad klímaváltozékonyság modellezése	29
4.1 Évszakváltások nélküli modell	29
4.2 Teljes éves modell	30
5. Bifurkáció.....	33
6. Néhány további alacsonyrendű modell	39
7. Összefoglalás.....	40
8. Köszönetnyilvánítás	41
9. Irodalomjegyzék.....	42
Függelék	44

I. Dynamics Solver ismertetése	44
II. A Lorenz-féle alacsonyrendű léghővezési modell attraktorai.....	45

1. Bevezetés

A meteorológia hatalmas adatbázissal dolgozik és a klímát reálisan leíró modellek változóinak száma óriási. A modellek mozgásegyenletei is általában nehezen áttekinthetőek. Nagyon fontosak azonban azok a modellek, amelyek csak a vizsgált jelenség legfontosabb vonásaira koncentrálnak és ezt lehetőleg kevés változót tartalmazó egyenletekkel fogalmazzák meg. Edward Lorenz több ilyen alacsonyrendű modellt készített a földi klíma leírására. Ezek olyan egyszerűsített modellek, melyekben a változók száma általában száz alatti, de akár tíznél is kevesebb. Ezek a modellek néhány nemlineáris differenciálegyenletből állnak. Az alacsonyrendű modellek nem képezik le teljes mértékben a valóságot, előrejelzésre nem használhatóak, azonban a valódi légköri folyamatok alapvető jellemvonásai kimutathatók velük. Ezáltal a komplex légköri folyamatokat vizsgálni lehet, és meg nem értett folyamatokra lehet megoldást találni viszonylag egyszerű módon. Emellett, pontosan a kisszámú változónak köszönhetően, nagy előnye az alacsonyrendű modelleknek, hogy kicsi a számítási igényük, így egyszerű asztali számítógépen is futtathatóak.

Dolgozatomban Lorenz két alacsonyrendű modelljét mutatom be, amellyel az általános légkörzést sikerült szimulálnia. A modellek felhasználásával két fontos irányban is vizsgálódhatunk. Az egyik az aszimmetrikus külső kényszerek szerepének vizsgálata a planetáris hullámformációk kialakításában. Ebben különféle mértékű aszimmetrikus külső kényszereket veszünk, és vizsgáljuk a légköri hullámokra kifejtett hatásukat. A másik az évek közötti szabad klímaváltozékonyság modellezése, mellyel megmutatható a tél kaotikussága és a nyár intranszitivitása, ami azt jelenti, hogy a nyár nem kaotikus, hanem a kezdeti feltételtől függően két állapot közül veszi fel valamelyiket, és csak ez a két állapot lehetséges. A dolgozatban először ezeknek a modelleknek a már ismert megoldásait mutatom be, majd a modellek bifurkációs diagramjainak segítségével kicsit tágabb képet kapunk a rendszer viselkedéséről. A modelleket a legismertebb paraméterekkel futattam le, hogy a két modell főbb eredményei érzékelhetővé váljanak. Az eredmények értelmezéséhez a futtatások során kapott függvényeket, trajektóriákat és attraktorokat használtam. A modelleredmények értelmezése általában nehéz, mert az alacsonyrendű modellek létrehozásakor az eredeti bonyolult modelleket csonkítani kell a változók számának redukálásának érdekében. Ezáltal azonban magának a fizikai folyamatnak a leírása nem egyszerűsödik, csak kevesebb változóra korlátozódik úgy, hogy az eredeti folyamat főbb tulajdonságai még megmaradjanak. A megmaradó változók azonban

gyakran komplex jelentésűek és nem értelmezhetők nyilvánvaló módon. (Ez éppen annak a következménye, hogy bonyolult folyamatot kívánunk vizsgálni egyszerűsített eszközökkel)

A modell futtatásához és vizsgálatához a Dynamics Solver nevű független fejlesztésű differenciálegyenlet megoldó programot használtam. A dolgozatban kitérek e program előnyös tulajdonságainak értékelésére is (I. függelék).

2. A modellek bemutatása

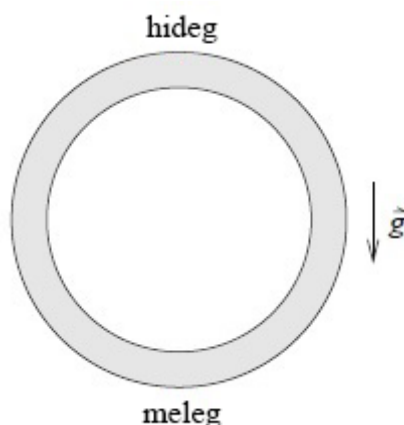
Ebben a fejezetben elsőként Lorenznek a Rayleigh-Bénard konvekciót leíró alacsonyrendű modelljét származtatjuk kétféle módon. Ez Lorenznek az egyik legismertebb modellje. Másodikként pedig a meteorológiai előrejelzés korlátait megszabó Lorenz-féle alacsonyrendű léghörzés modellt mutatjuk be. Az előbbi modell a szakirodalomban az egyik legvizsgáltabb rendszer, amely a káoszelmélet kutatásának alapjául is szolgál. Ennél csak magának a rendszernek a leírását adjuk meg kétféle képen, hogy képet kaphassunk az alacsonyrendű modellek szerkesztésének egy-egy módjáról, azonban a kapott modell tulajdonságait nem taglaljuk részletesen, mert túlmutatna a dolgozat keretein és nagyon megnövelné a terjedelmet. Emellett, a dolgozatom további részében, Lorenz alacsonyrendű léghörzési modelljét vizsgáljuk.

2.1 Alacsonyrendű modell megformulázása Lorenz egyik modelljén keresztül

2.1.1 Szemléletes levezetés

A modell kiindulási alapja a Rayleigh-Bénard konvekció, ezt a folyamatot szeretnénk leírni alacsonyrendű modellel. (Tritton, 1988) (Rothman, 2005). Ehhez egyszerű fizikai rendszer konstruálunk.

A rendszer függőleges síkú tórusz alakú tartályba zárt folyadék, ami az egyszerűség kedvéért akár víz is lehet. (1. ábra) A tórusz alját melegítjük, tetejét pedig hűtjük.

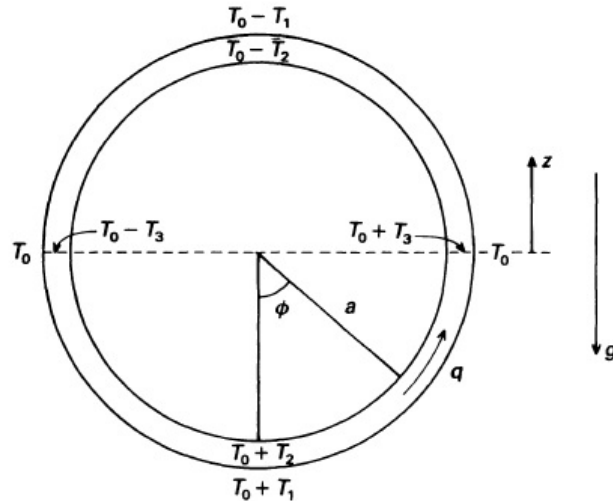


1. ábra

Rayleigh-Bénard konvekció modellje: egy tórusz alakú rendszerben víz található, melyet alulról melegítünk, felülről hűtünk. (Rothman nyomán, 2005)

Ezek után három különböző állapotot figyelhetünk meg az alsó és felső rész hőmérséklet-különbségének függvényében. Ha a modellbe a sűrűdást is belevesszük,

akkor kezdetben, kicsi hőmérsékleti gradiensenél, az áramlás nem tud megindulni, így stabil helyzet alakul ki. A hőmérséklet-különbség növelésével azonban meghatározott különbséget elérve a súrlódási erő gyengébb lesz az áramlást létrehozó erőknél, így megindul a mozgás, és időben állandó áramlást kapunk. Ha tovább növeljük, illetve csökkentjük a hőmérsékleteket, akkor a cirkuláció instabillá válik.



2. ábra

A Rayleigh-Bénard konvekció modelljének fizikai paraméterei (Tritton nyomán, 1988)

A rendszer matematikai leírásához, tételezzük fel, hogy a tóruszon kívül a hőmérséklet a magassággal lineárisan csökken. A 2. ábra jelöléseivel a T_E külső hőmérséklet:

$$T_E = T_0 - T_1 \frac{z}{a} = T_0 + T_1 \cos \phi \quad (1)$$

A csőben lévő folyadék hőmérsékletét és a folyadék sebességét a keresztmetszetekben vett átlagos értékekkel jellemezzük. A q átlagsebességet és a T hőmérsékletet a hely (ϕ) és az idő függvényének tekintjük.

$$q = q(\phi, t) \quad (2)$$

$q > 0$, ha az áramlás az óramutató járásával ellentétes.

$$T = T(\phi, t) \quad (3)$$

Használjuk a Boussinesq-közelítést, mely azt jelenti, hogy a folyadék közelítőleg összenyomhatatlan, így

$$\frac{\partial p}{\partial t} = 0. \quad (4)$$

A kontinuitási egyenletet felhasználva pedig az előzőek alapján azt kapjuk, hogy

$$\frac{\partial q}{\partial \phi} = 0. \quad (5)$$

Tehát a q sebesség csak az időtől függ.

Változzék továbbá a hőmérséklet a csőben a

$$T - T_0 = T_2 \cos \phi + T_3 \sin \phi. \quad (6)$$

összefüggés szerint.

Ennek alapján a hőmérséklet-különbség az alsó és a fenti rész között $2T_2$, a két oldalt pedig középmagasságban $2T_3$. A T_2 és T_3 hőmérséklet az időtől függ.

A konvekció leírásához a Navier-Stokes-egyenletet használjuk fel, ami a felvett változókkal a következő alakot ölti:

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{1}{\rho a} \frac{\partial p}{\partial \phi} + g \varepsilon (T - T_0) \sin \phi - \nu q \quad (7)$$

Az egyenletben a $\sin \phi$ tag a felhajtó erő tangenciális komponensét jelenti. A jobboldal utolsó tagja a viszkozitásból származó súrlódást írja le és azt jelenti, hogy a folyadékban fellépő súrlódási erő arányos a sebességgel.

Következő lépésben behelyettesítjük $T - T_0$ tagot az (6)-os egyenletből a (7)-esbe.

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{1}{\rho a} \frac{\partial p}{\partial \phi} + g \varepsilon (T_2 \cos \phi + T_3 \sin \phi) \sin \phi - \nu q \quad (8)$$

Az egyenletet "körintegráljuk" ϕ szerint, így eltüntetjük a nyomás tagot.

$$2\pi \frac{\partial q}{\partial t} = g \varepsilon \int_0^{2\pi} (T_2 \cos \phi \sin \phi + T_3 \sin^2 \phi) d\phi - 2\pi \nu q \quad (9)$$

A jobboldali integrál első tagja 0, a második π . Majd miután leosztottunk 2π -vel, a következőt kapjuk:

$$\frac{dq}{dt} = -\nu q + \frac{g\varepsilon T_3}{2} \quad (10)$$

Ez fizikailag azt jelenti, hogy a mozgást a horizontális hőmérséklet különbség tartja fenn.

A hőmérséklet időbeli változására a hődiffúziós egyenletet írhatjuk fel. A teljes hőmérsékleti egyenlet a konvekcióra a következő:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} T = \kappa \nabla^2 T \quad (11)$$

κ = hődiffúziós együttható

Ezután felírjuk a hőmérsékleti egyenletet csak a csőben lévő keresztmetszeti átlagokat figyelembe véve, és ehhez a következő feltevéseket használjuk:

- a falak hővezetők, amit a jobb oldal ír le
- a hővezetés a csőben elhanyagolható
- a bal oldal második tagja közelítés, amely szerint a sebesség független a hőmérséklettől, ezért a sebesség és a hőmérséklet szorzatának átlaga közelíthető a két mennyiség átlagának szorzatával

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{q}{a} \frac{\partial T}{\partial \phi} = \kappa (T_E - T) \quad (12)$$

Korábban a belső hőmérsékletet már kifejeztük két időfüggő változóval ($T_2(t)$ és $T_3(t)$). Azt is tudjuk, hogyan változik a külső hőmérséklet a magassággal. A két egyenletből a következőt kapjuk:

$$T_E - T = (T_1 - T_2) \cos \phi - T_3 \sin \phi \quad (13)$$

Ezt behelyettesítjük a (12)-es egyenletbe:

$$\frac{dT_2}{dt} \cos \phi + \frac{dT_3}{dt} \sin \phi - \frac{q}{a} T_2 \sin \phi + \frac{q}{a} T_3 \cos \phi = \kappa (T_1 - T_2) \cos \phi - \kappa T_3 \sin \phi \quad (14)$$

Mivel ennek minden ϕ -re teljesülnie kell, így

$$\frac{dT_3}{dt} - \frac{qT_2}{a} = -\kappa T_3 \quad (15)$$

$$\frac{dT_2}{dt} + \frac{qT_3}{a} = \kappa(T_1 - T_2) \quad (16)$$

Ez a két egyenlet a (10)-es egyenlettel együtt alkotja azt a három közös differenciálegyenletet, ami leírja a rendszer dinamikáját. Egyszerűsítésként a

$$T_4(t) = T_1 - T_2(t) \quad (17)$$

összefüggéssel új függő változót definiálunk, ami a külső és belső hőmérséklet különbségét írja le a kör felső, vagy alsó részén. Ezzel a korábban felírt két egyenlet:

$$\frac{dT_3}{dt} = -\kappa T_3 + \frac{qT_1}{a} - \frac{qT_4}{a} \quad (18)$$

$$\frac{dT_2}{dt} = -\kappa T_4 + \frac{qT_3}{a} \quad (19)$$

A q , T_3 és T_4 függő változóit dimenziótlan X , Y és Z változókká alakíthatjuk a

$$X = \frac{q}{a\kappa} \quad (20a); \quad Y = \frac{g\varepsilon T_3}{2a\nu\kappa} \quad (20b); \quad Z = \frac{g\varepsilon T_4}{2a\nu\kappa} \quad (20c)$$

definíciókkal.

A dimenziótlan idő: $t' = t\kappa$

Az új változók jelentése: X a dimenziótlan sebességet, Y a dimenziótlan hőmérséklet-különbséget a fel-és le áramlások között és Z a hővezetési egyensúlytól vett eltérés dimenziótlanított jellemzője.

A dimenziótlan változókkal kapott egyenletek:

$$\frac{dX}{dt} = -PX + PY \quad (21a)$$

$$\frac{dY}{dt} = -Y + rX - XZ \quad (21b)$$

$$\frac{dZ}{dt} = -Z + XY \quad (21c)$$

, ahol

$$P = \frac{\nu}{\kappa} = \text{Prandtl-szám} \quad (22)$$

$$r = \frac{g \varepsilon T_1}{2 \alpha \nu \kappa} = \text{Rayleigh-szám.} \quad (23)$$

Ez az egyenletrendszer Lorenz által adott leírástól csak a b paraméterben tér el, ami a harmadik egyenletben itt nem szerepel, de Lorenzében igen, és ez a paraméter a konvektív mozgás horizontális hullámszámával van kapcsolatban.

$$\frac{dZ}{dt} = -bZ + XY \quad (24)$$

2.1.2 Modell előállítás Barry Saltzman módszerével

Barry *Saltzman* (1962)-ben megjelenő cikkében szintén foglalkozott a Reyleigh-Bénard konvekció modelljének leírásával, melynek során a kiinduló hidrodinamikai egyenleteket átalakította és Fourier-sorba fejtette. Attól függően, hogy a Fourier-sorokból milyen tagokat hagyunk meg, eljuthatunk az előbb már megkapott Lorenz-modellhez, vagy akár ennek magasabb dimenziójú változataihoz is. Ebben a fejezetben Saltzman módszerét mutatjuk be. (*Saltzman*, 1962), (*Roy*, 2006)

Kiindulásul a hidro-termodinamikai rendszer Boussinesq-közelítését választjuk:

$$\frac{dV_x}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \nu \nabla^2 V_x = 0 \quad (25)$$

$$\frac{dV_y}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \nu \nabla^2 V_y = 0 \quad (26)$$

$$\frac{dV_z}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \varepsilon T - \nu \nabla^2 V_z = 0 \quad (27)$$

$$\frac{dT}{dt} - \kappa \nabla^2 T = 0 \quad (28)$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (29)$$

Az első három egyenlet a mozgást írja le, a (28) egyenlet a termodinamikai (energia) egyenlet, az utolsó pedig a kontinuitási egyenlet (Götz és Rákóczi, 1981). Az egyes szimbólumok jelentése pedig:

V_x, V_y = a folyadék horizontális *sebesség*komponensei

V_z = a folyadék függőleges sebessége

g = nehézségi gyorsulás

ν = kinematikai viszkozitás

κ = hő diffúziós együttható

ε = térfogati hőtágulási együttható

T = hőmérséklet

ρ = sűrűség

p = nyomás

A modellel most is olyan esetet szeretnénk leírni, amikor a folyadék alsó és felső része között hőmérséklet különbség van, ami elindítja a mozgást. A probléma egyszerűbb tárgyalása miatt a konvektív mozgást két dimenzióban, az (x - y síkban) vizsgáljuk. Ebben az esetben a kormányzó egyenletek a következők:

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \nu \nabla^2 V_x = 0 \quad (30)$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \varepsilon T - \nu \nabla^2 V_z = 0 \quad (31)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + V_x \frac{\partial T}{\partial x} + V_z \frac{\partial T}{\partial z} - \kappa \nabla^2 T = 0 \quad (32)$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (33)$$

Az (30) és (31) egyenlet a mozgást fejezi ki, a (32) egyenlet az energiaegyenlet, a (33) pedig a kontinuitási egyenlet.

A rendszer felső részén ($z = H$, ahol H a folyadék magassága) legyen a hőmérséklet $T(z = H) = T_0$, az alsó részében ($z = 0$) pedig $T(z = 0) = T_0 + \Delta T_0$. A hőmérséklet változzék a két rész között az alábbi összefüggés szerint, ahol θ a lineáris hőmérsékleti profiltól való eltérést fejezi ki. (Roy, 2006)

$$T(x, z, t) = T_0 + \Delta T_0 \left(1 - \frac{z}{H}\right) + \theta(x, z, t) \quad (34)$$

A kétdimenziós divergencia mentes áramlásban bevezethető a ψ áramfüggvény:

$$V_x = -\frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (35a)$$

$$V_z = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (35b)$$

Deriváljuk a mozgásegyenleteket rendre z és x szerint, majd helyettesítsük be a hőmérsékletprofil megadó összefüggést és az áramfüggvényt. A kapott egyenletben a $\nabla^2 \psi = \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}$ tag az örvényesség.

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 \psi - g \varepsilon \frac{\partial \theta}{\partial x} - \nu \nabla^4 \psi = 0 \quad (36)$$

Az energiaegyenletet is hasonló módon alakíthatjuk a hőmérsékleti profil és az áramfüggvény felhasználásával.

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{\Delta T_0}{H} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \kappa \nabla^2 \theta = 0 \quad (37)$$

Saltzman (1962) cikke nyomán dimenziótlan változókra térhetünk át úgy, hogy a hosszúság egységéül H -t az idő egységéül pedig $\frac{H^2}{\kappa}$, és a hőmérséklet egységéül pedig $\frac{\kappa \nu}{g \varepsilon H^3}$ választjuk.

$$x^* = \frac{x}{H} \quad (38a)$$

$$z^* = \frac{z}{H} \quad (38b)$$

$$t^* = \frac{t \kappa}{H^2} \quad (38c)$$

$$\nabla^{*2} = H^2 \nabla^2 \quad (38d)$$

$$\psi^* = \frac{\psi}{\kappa} \quad (38e)$$

$$\theta^* = \theta \frac{g \varepsilon H^3}{\kappa \nu} \quad (38f)$$

Ezeket felhasználva a következő két egyenletet kapjuk:

$$\frac{\partial}{\partial t^*} \nabla^{*2} \psi^* - \frac{\partial \psi^*}{\partial z^*} \frac{\partial}{\partial x^*} \nabla^{*2} \psi^* + \frac{\partial \psi^*}{\partial x^*} \frac{\partial}{\partial z^*} \nabla^{*2} \psi^* - P \frac{\partial \theta^*}{\partial x^*} - P \nabla^{*4} \psi^* = 0 \quad (39)$$

$$\frac{\partial \theta^*}{\partial t^*} - R \frac{\partial \psi^*}{\partial x^*} - \frac{\partial \psi^*}{\partial z^*} \frac{\partial \theta^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \psi^*}{\partial x^*} \frac{\partial \theta^*}{\partial z^*} - \kappa \nabla^{*2} \theta^* = 0 \quad (40)$$

$$P = \frac{\nu}{\kappa} = \text{Prandtl-szám} \quad (41)$$

$$R = \frac{g \varepsilon H^3 \Delta T_0}{\kappa \nu} \quad (42)$$

Szintén *Saltzman* (1962) követve feltételezzük, hogy mind az alsó, mind a felső határon az áramfüggvény és deriváltjai eltűnnek és θ^* is zérus.

$$\psi^* = 0 ; \nabla^{*2} = 0 ; \theta^* = 0 \quad (43)$$

Ezután a változókat közelítsük Fourier soruk két komponensével. Az egyik komponens x irányba mutató, L hullámhosszúságú. A másik komponens z irányba mutat és $2H$ hullámhosszúságú. Felírható így ψ^* és θ^* a következő alakban:

$$\psi^*(x^*, z^*, t^*) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi(m, n, t^*) \exp \left[2\pi Hi \left(\frac{m}{L} x^* + \frac{n}{2H} z^* \right) \right] \quad (44)$$

$$\theta^*(x^*, z^*, t^*) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \theta(m, n, t^*) \exp \left[2\pi Hi \left(\frac{m}{L} x^* + \frac{n}{2H} z^* \right) \right] \quad (45)$$

A komplex Fourier együtthatók a következő két egyenletből adódnak:

$$\psi(m, n, t^*) = \frac{1}{2LH} \int_0^L \int_{-H}^H \psi^*(x^*, z^*, t^*) \exp \left[-2\pi Hi \left(\frac{m}{L} x^* + \frac{n}{2H} z^* \right) \right] dx dz \quad (46)$$

$$\theta(m, n, t^*) = \frac{1}{2LH} \int_0^L \int_{-H}^H \theta^*(x^*, z^*, t^*) \exp \left[-2\pi Hi \left(\frac{m}{L} x^* + \frac{n}{2H} z^* \right) \right] dx dz \quad (47)$$

Az egyenletekben m a hullámszámot jelöli az x irányban, n pedig a z irányban.

ψ -t és θ -t a valós és képzetes részre bontva:

$$\psi(m, n) = \psi_1(m, n) - i\psi_2(m, n) \quad (48)$$

$$\theta(m, n) = \theta_1(m, n) - i\theta_2(m, n) \quad (49)$$

Ezután behelyettesítve a (44) (45) egyenleteket (39)(40) egyenletekbe, Saltzman (1962) általános megoldásként elsőrendű differenciálegyenletek sorozatát kapta a ψ_1, ψ_2, θ_1 és θ_2 Fourier-együtthatókra. Azonban még a vizsgálatok kezdete előtt Saltzman rögzítette a konvektív cella függőleges csomópontját a felszínekkel, úgy hogy kizárta a $\psi_2(m, n)$ és $\theta_1(m, n)$ módusokat. Emellett nem vette figyelembe a nyíró áramlást sem, azaz figyelmen kívül hagyta ψ_1 azon módusait, ahol $m = 0$.

Saltzmannak ezt a szabályát használta Lorenz is a három dimenziós rendszer megszerkesztéséhez. Lorenz (1963) a következő három Fourier módust választotta: $\psi_1(1, 1)$; $\theta_2(1, 1)$; $\theta_2(0, 2)$. (Roy, 2006) Az első módus a konvekciós körkörös áramlást írja le, a második és harmadik pedig rendre a konvekció vertikális hőmérsékleti különbségét, illetve a horizontális hőmérsékleti különbséget reprezentálja. A Lorenz egyenletekben szereplő

$$X(t) = \psi_1(1, 1); Y(t) = \theta_2(1, 1); Z(t) = \theta_2(0, 2) \quad (50)$$

változókkal a rendszert a következő három közönséges nemlineáris differenciálegyenlet írja le:

$$\frac{dX}{dt} = -PX + PY \quad (51a)$$

$$\frac{dY}{dt} = -Y + rX - XZ \quad (51b)$$

$$\frac{dZ}{dt} = -bZ + XY \quad (51c)$$

, ahol

$$r = \frac{R}{R_c} \quad (52a)$$

$$\tau = \pi^2(1 + a^2)t^* = \text{dimenziótlán idő} \quad (52b)$$

$$a = \frac{H}{L} \quad (52c)$$

$$b = \frac{4}{1+a^2} \quad (52d)$$

Megemlíthető, hogy Saltzman eljárását használva származtathatók Lorenz modelljének magasabb dimenziós változatai is, attól függően, hogy melyik módusokat választjuk ki. Az eljárást Dipanjan Roy (2006) részletesen tárgyalta diplomamunkájában.

2.2 Lorenz-féle alacsonyrendű légköri mozgási modell leírása

2.2.1 A kiindulás

Az általános légköri mozgást már a 18. században próbálták megérteni, és sorra születtek a különféle elméletek a légköri rendszer működésére. Az egyik legelső kísérletet Goerge Hadley tette a légkörzés leírására 1735-ben (*Hadley, 1735*), leírását egészen a 19. század közepéig elfogadták. Akkor azonban egymástól függetlenül James Thomson (1857) és William Ferrel (1859) leírta az első, három cellás modellt, és felvetődött az a gondolat, hogy a teljes általános légkörzés nem magyarázható csak a szimmetrikus mozgásokkal, hanem figyelembe kell venni a nagytérségű aszimmetrikus örvényeket is. Defant (1921) megmutatta, hogy ezek az örvények jelentős mennyiségű hőt szállítanak a magasabb földrajzi szélességek felé, majd később az is bebizonyosodott, hogy az impulzusmomentum átvitelében is részt vesznek. Későbbi adatgyűjtések pedig az örvények azon tulajdonságát is megmutatták, hogy számottevő vízanyag meridionális transzportjában is részt vesznek. Ez azonban problémákat vetett fel, és a kérdést, hogy miért léteznek aszimmetriák a cirkulációs képből. Egyes kutatók azt feltételezték, hogy szimmetrikus cirkuláció nem jöhetne létre, akkor sem, ha a kontinensek és óceánok által okozott aszimmetriát kivennénk a képből. Azonban ezt később numerikus kísérletek cáfolták, ugyanis egy külső aszimmetriáktól mentes modell, ha a kezdeti feltételek szimmetrikusak, akkor szimmetrikus állandósult viselkedést eredményez. A helyes választ a problémára V. Bjerknes (1937) adta meg. Azt feltételezte, hogy létezik dinamikailag konzisztens szimmetrikus cirkuláció, ami hasonlít a Thomson és Ferrel által javasolt légkörzéshez, de eltér a tényleges cirkuláció szimmetrikus komponensétől. Emellett ez a cirkuláció instabilis a kis aszimmetrikus perturbációkkal szemben. Ez az oka, hogy

semmiféle szimmetrikus cirkuláció nem maradhat fent. Ezt az instabilis szimmetrikus cirkulációt Hadley-cirkulációnak nevezzük. (Götz, 2001)

Azonban felmerülhet a kérdés, hogy egyáltalán mért szükséges az instabilis cirkuláció az aszimmetriák magyarázásához, miközben a földfelszín már amúgy is aszimmetrikus. Lorenz (1967) arra gondolt, hogy léteznie kell egy dinamikailag konzisztens módosult Hadley-cirkulációnak, vagyis ami kelet-nyugat irányban aszimmetrikus. Emellett a viselkedése stacionárius, és ugyanúgy instabil a kis perturbációkkal szemben, mint Bjerknes Hadley-cirkulációja. Ennek a gondolatnak az alapján elvileg a végső teljes cirkulációban szintén kell nagy térségű örvényeket tartalmaznia a légkörnek.

Ennek a hipotézisnek az igazolása nehéz, mert valóságban sohasem fordulhat elő, így csak numerikusan bizonyítható. Erre megfelelő átalakításokkal akár a legfejlettebb operatív időjárás prognosztikai modellek is felhasználhatóak, ez azonban idő-és számításigényes, és nincs információ arról, hogy bárki is próbálkozott volna ezzel a bizonyítási móddal. (Götz, 2001)

Végül az előbb említett gondolatok során szerkesztette meg Lorenz (1984) az általános légkörizés lehető legegyszerűbb, háromváltozós modelljét, amely a módosulatlan és módosult cirkulációt is mutatja.

2.2.2 A modell

A modell megalkotásához Lorenz, Bryan (1959) egyszerű 14 függőváltozós általános cirkulációs modelljét választotta kiindulási alapként. Ez a modell a termikusan gerjesztett, valamint termikusan és mechanikailag csillapított baroklin áramlást szimulálta. Szferikus geometriát alkalmazott, a függő változók két rétegben felvett hat-hat szferikus-harmonikus függvény együtthatója, egy változó középhőmérséklet és egy hidrosztatikai stabilitási érték volt. Lorenz számára nem volt tökéletes ez a modell, ugyanis túlságosan szabályosan ismétlődtek benne a jövőbeli állapotok. Ezért olyan 12-változós modellé alakította, amelynél a termikus kényszer a földrajzi hosszúság mellett a szélesség mentén is változhatott. A modell áramfüggvényét a felső és az alsó rétegben $\psi + \tau$ és $\psi - \tau$ jelöli. A potenciális hőmérséklet a két rétegben $\theta + \sigma$ és $\theta - \sigma$. A modell végső formájában nem szferikus geometriát alkalmazott, hanem egy délről $\eta = 0$, és északról pedig egy $\eta = \eta/l$ egyenessel határolt végtelen csatornát. A megfelelő határfeltételek mellett a következő egyenletek születtek:

$$\phi_0 = 1 \quad (53a)$$

$$\phi_1 = 2 \sin l\eta \cos k\xi \quad (53b)$$

$$\phi_2 = 2 \sin l\eta \sin k\xi \quad (53c)$$

$$\phi_3 = \sqrt{2} \cos l\eta \quad (53d)$$

$$\phi_4 = 2 \sin 2l\eta \cos k\xi \quad (53e)$$

$$\phi_5 = 2 \sin 2l\eta \sin k\xi \quad (53f)$$

$$\phi_6 = \sqrt{2} \cos 2l\eta \quad (53g)$$

Az egyenletekben a ψ változó a ϕ_1, \dots, ϕ_6 segítségével, az θ a ϕ_0, \dots, ϕ_6 segítségével és σ a ϕ_0 segítségével lett kifejezve. (Götz, 2001)

A későbbiekben tárgyalt modellt ennek a 12-változós modellnek a további átalakításával érte el Lorenz. A 12 változót, kissé „találomra”, az eredeti változók 12 lineáris kombinációjával helyettesítette, és ezeket csonkolta tovább. (Götz, 2001)

Így kapta meg a modell végleges alakját, ami az általános cirkulációt kormányzó egyenleteket tartalmazza:

$$\frac{dx}{dt} = -y^2 - z^2 - ax + aF \quad (54a)$$

$$\frac{dy}{dt} = xy - bxz - y + G \quad (54b)$$

$$\frac{dz}{dt} = bxy + xz - z \quad (54c)$$

Ebben az egyenletrendszerben a független t változó az időt jelöli. Az x a Földet körbefutó szimmetrikus nyugati áramlás erősségét jelöli, és megegyezik a meridionális irányú hőmérsékleti gradienssel, aminél feltételezzük, hogy hatása állandó egyensúlyban van a nyugati áramlás erősségével. Az y és z komponens a nyugati áramlásra szuperponálódó nagyskálájú hullámok koszinusz és szinusz fázisának intenzitását jelöli. Ezek a hullámok az amplitúdójukkal négyzetes arányban a sarkok felé hőt szállítanak. A (54b) és (54c) egyenletben szereplő xy és xz tagok a hullámok erősítését jelöli, ami

kapcsolatban áll a nyugati áramlással, amit az okoz, hogy a nyugati áramlásból energia vonódik ki, amit a $-y^2$ és a $-z^2$ tagok jelölnek. A modellben szereplő együtthatókat a változók skálázásával sikerült egységnyivé tenni. A b együtthatót tartalmazó tagok a hullámok áthelyeződését jelölik a nyugati áramlással. A b értéke olyan, hogy ha $b > 1$, akkor a hullámok gyorsabban helyeződnek át, mint ahogy erősödnének. A lineáris tagok mechanikai és termikus csillapodást jelölnek. Lorenz az 5 napos csillapodási időt választotta az idő egységének. Ha $a < 1$, akkor a nyugati áramlás lassabban csillapodik, mint az örvények. A konstans aF és G tagok szimmetrikus és aszimmetrikus kényszer jelentenek. A szimmetrikus kényszer a hosszúsági körök mentén differenciált hőközlést jelent, míg az aszimmetrikus kényszer a zonális irány menti differenciált hőközlést jelent. Az F és G értéke azt az értéket jelöli, amit az x és y változó venne fel, ha a nyugati áramlás és az örvények nem állnának egymással kölcsönhatásban. A modellben a hullámok a Rossby-hullámok megfelelői, bár a modelltől egy fontos mechanizmus a hullámok terjedésének kimaradt. (Götz, 2001) (Lorenz, 1984)

Meg kell említeni, hogy a modellben a változók és a paraméterek dimenziótlanak, tehát mértékegységük nincsen, ezért nincsen a modellfuttatások során kapott eredmények ábráin az egyes tengelyeken konkrét mértékegységek. Ez is mutatja, hogy az alacsonyrendű modellek konkrét előrejelzésre nem használhatóak. Céljuk ezeknek a modelleknek a rendszerek viselkedésének, természetének a vizsgálata.

2.2.3 Stacionárius állapotok

Az (54)-es dinamikai rendszer stacionárius állapotait keressük. Ha az időderiváltakat nullával tesszük egyenlővé, akkor a következő egyenleteket kapjuk:

$$y = \frac{(1-x)G}{1-2x+(1+b^2)x^2} \quad (55)$$

$$z = \frac{bxG}{1-2x+(1+b^2)x^2} \quad (56)$$

$$a(f-x)(1-2x+(1+b^2)x^2) - G^2 = 0 \quad (57)$$

Az (57) harmadfokú egyenletet kielégíti az x változó. (Lorenz, 1984)

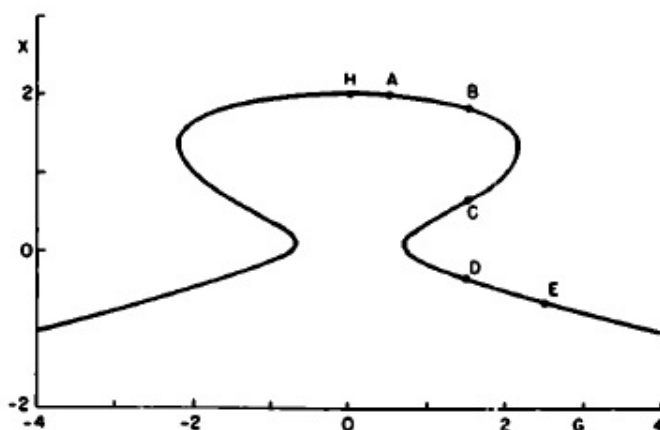
Ha $G = 0$, vagyis nincs aszimmetrikus termikus kényszer, akkor egyetlen stacionárius megoldás létezik:

$$x = F ; y = z = 0 \quad (58)$$

Ez a megoldás a Hadley-cirkulációt jelenti. A megoldás akkor stabilis, ha $F < 1$, ami azt jelenti, hogy kicsi a meridionális hőközlés differenciáltsága. Ekkor az y és z értékeinek kis perturbációjával egy idő után a megfelelő energiák nullához tartanak, tehát a kis hullámzavarok elhalnak. Ha $F > 1$, akkor a megoldás instabil, és a valós légkörre Bjerknes által felállított hipotézis szerint ezt az esetet vizsgáljuk. (Lorenz, 1984)

Lorenz ugyanis feltételezte, hogy létezik olyan módosult Hadley-cirkuláció, ami szinte megegyezik a külső aszimmetriák nélkül kialakulóval. Külső aszimmetriának felel meg az óceán és a szárazföld eltérő mértékű hőközlése miatt kialakult különbség. Ezt a hőközlés-különbséget a modellben a G együttható jellemzi. Ha Lorenz feltételezése igaz, tehát létezik egy módosult Hadley-cirkuláció, akkor következő esetnek teljesülnie kell: Legyen a , b és F rögzített paraméterek, és legyen $G \neq 0$, de nullához nagyon közeli érték. Ha a kapott megoldás közel megegyezik a $G = 0$ esetben kapott stacionárius megoldással, akkor teljesül a feltétel. Ha $G \neq 0$, és jóval nagyobb nullánál, akkor három stacionárius állapot alakulhat ki. Ha mind a három állapot hasonlít egymásra, azonban a Hadley-cirkulációra nem, akkor vannak olyan megoldások is, amelyek nem felelnek meg a módosult Hadley-cirkuláció kritériumának. (Götz, 2001)

Legyen $a = 0,25$, $b = 4$ és $F = 2$. A 3. ábrán x értékei látszanak G értékének változásának függvényében.



3. ábra

Lorenz alacsonyrendű légköri modellszámításának x értékei a G paraméter változásának függvényében. (Lorenz nyomán, 1984)

A H pont jelöli a $G = 0$ esetben kialakult stacionárius instabilis megoldást, és ez a módosulatlan Hadley-cirkulációt jelzi. Az A a $G \neq 0$ azon esetét jelöli, amikor csak

nagyon kicsi az eltérés nullától. Ekkor szintén csak egy stacionárius megoldás van, de ez már a módosult Hadley-cirkulációt jelöli. A B , C és D pontok a G nullától jóval különbözőbb értékei esetén kialakuló három stacionárius állapotot jelölik. Ezek már kifejezetten aszimmetrikus elrendezésű termikus kényszerre vonatkozó megoldások. A B hasonló az első két esetben látott esethez, így ez módosult Hadley-cirkulációnak tekinthető. A D értéke $x \approx 0$, így ezt tekinthetjük az általános cirkuláció blocking helyzetének (a zonális áramlást meridionális váltja fel, és tartósan fennmarad). Míg a C pont mindig instabil, a B és D pont nem feltétlenül instabilis minden helyzetben. Ugyanis lehetséges, hogy D stabilis, de közben B instabil. Ebben az esetben a B állapotra szuperponálódó kis perturbációk a cirkulációs képet a D állapotba juttatják. A C és D megoldás nem tekinthető módosult Hadley-cirkulációnak. Az E pont a G nagyobb értékeinek esetét jelöli, ekkor megint csak egyetlen stacionárius megoldás létezik. Ez a megoldás a D -re hasonlít, módosult Hadley-cirkulációnak tehát nem tekinthető. Összességében ez azt jelenti, hogy vannak olyan a , b , F és G paraméterértékek, amikor olyan megoldást kapunk, ami nem tekinthető módosult Hadley-cirkulációnak. Ez azt jelenti, hogy a hullámok megjelenését nem lehet mindig a módosult Hadley-cirkuláció instabilitásának tekinteni, mivel nagyon aszimmetrikus kényszernél nem is létezik ilyen. Ebből arra következtethetnénk, hogy a hullámok a külső aszimmetriák következményei, azonban ez nem helyes, ugyanis $G = 0$ értéknél nincsenek aszimmetriák, hullámok mégis kifejlődhetnek. Végül arra juthatunk, hogy a hullámok kialakításában mind az instabilitás, mind az aszimmetriák szerepet játszanak, de esettől függően más súllyal bírnak. (Götz, 2001) (Lorenz, 1984)

3. Az aszimmetrikus külső kényszerek szerepének vizsgálata a planetáris hullámformáció kialakításában

A következőkben azt vizsgáljuk, hogy a modell mit mond azokról a hullámokról, amelyeknek akkor kell kialakulniuk, amikor a stacionárius állapotok instabilisek. Annyit változtatunk az eddigihez képest, hogy a modellben F értékét 8-nak választjuk. A futtatások során készült ábrákon, ahol a horizontális tengelyen az idő szerepel, azért nem nullától indul a számozás, ugyanis a rendszernek van egy kezdeti fluktuációja, melynek le kell csillapodnia. A kezdeti fluktuációkat nem ábrázoltuk, ugyanis a vizsgálatunk szempontjából nem lényeges.

3.1 Aszimmetrikus termikus kényszer hiánya

Ebben az esetben a rendszerre aszimmetrikus kényszer nem hat, tehát a $G = 0$ esetet vizsgáljuk. Ekkor a rendszer megoldása a következő: (Lorenz, 1984)

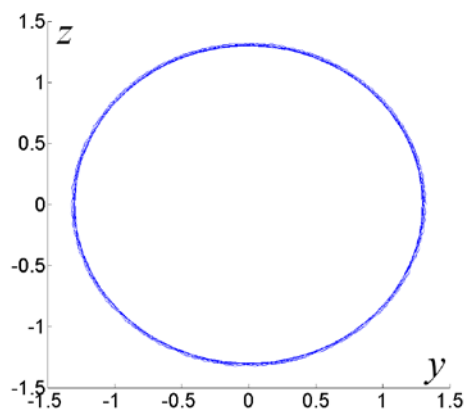
$$x = 1 \quad (59a)$$

$$y = \sqrt{a(F-1)} \cos b(t-t_0) \quad (59b)$$

$$z = \sqrt{a(F-1)} \sin b(t-t_0) \quad (59c)$$

$$t_0 = \text{alkalmasan megválasztott időpont}$$

Ez a megoldás stabil a perturbációkkal szemben. Az attraktor körkörös trajektória (4. ábra), ami azt jelenti, hogy a hullámok sokkal egyszerűbben viselkednek, mint a valódi léggörben, tehát ez a megoldás a valós léggör szimulálásában nem használható. (Lorenz, 1984)



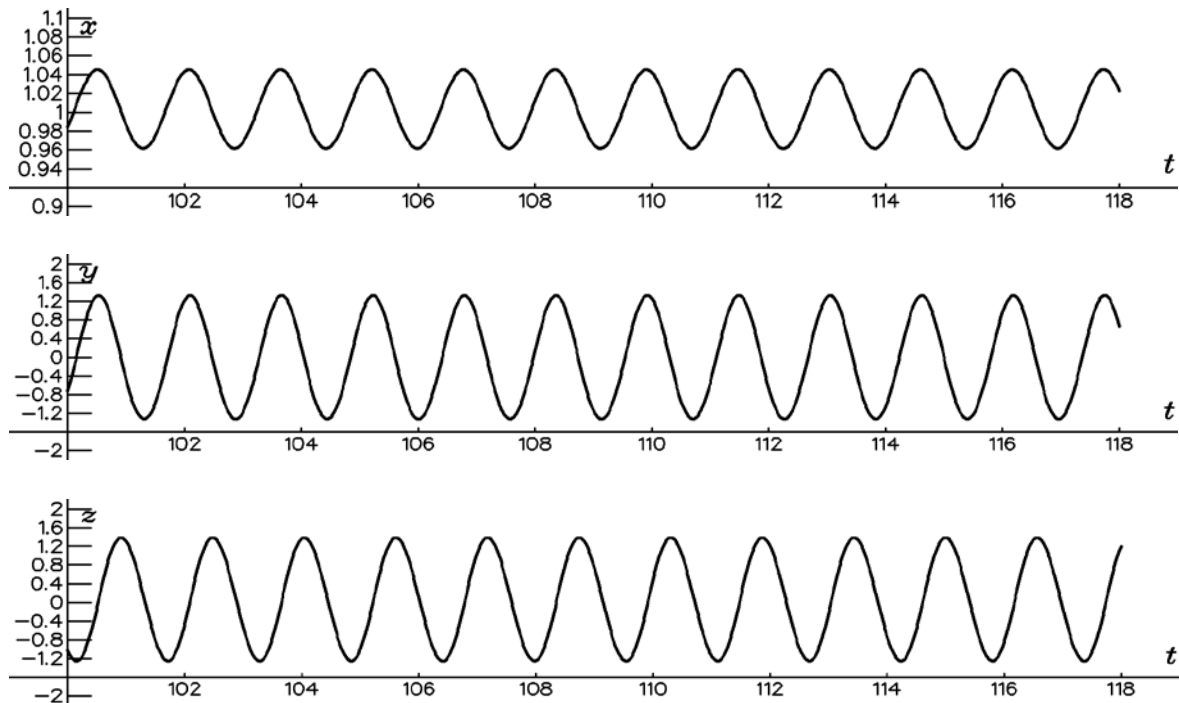
4. ábra

Lorenz alacsonyrendű léggörzési modelljének attraktora aszimmetrikus termikus kényszer hiányában ($G=0$)

3.2 Gyenge aszimmetrikus termikus kényszer

Gyenge aszimmetrikus kényszer, akkor lép fel, amikor $0 < G < 0,3$. (Götz, 2001)

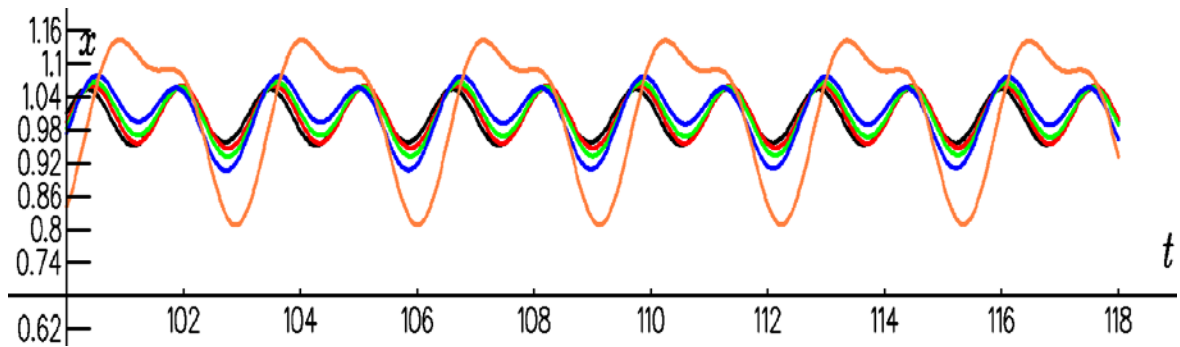
Ha G értéke 0,2, akkor a megoldás mindhárom változóra stabil és periodikus lesz. (5. ábra)



5. ábra

A Lorenz-féle alacsonyrendű léghővezési modell x , y és z változójának viselkedése gyenge aszimmetrikus termikus kényszer esetén. ($G=0,2$, $1 \cdot t = 5$ nap, teljes idő: 90 nap)

A periodicitás ideje 7,5 nap, ami még mindig kevesebb, mint ami a valódi légkörben megfigyelhető. Azonban 0,2-nél nagyobb G érték esetén megfigyelhető, hogy a periodicitás nem minden egyes maximum és minimum értéknél következik be. Az x változónál, például egy minimum és maximum érték után jóval kisebb minimum, majd szintén kisebb maximum értéket következnek be, és ezután éri el megint ugyanazt a minimumot, mint az elején. A periodicitás ebben a formában jelenik meg, tehát nő a periódusidő. A G érték további növelésével az amplitúdó növekszik, míg a kis szélsőértékek egymáshoz viszonyított különbsége egyre kisebb. (6. ábra) Az y és z változónál pedig 0,2-es érték felett egy nagyobb maximum után egy kisebb következik, és így felváltva periodikusak. Ezek a változások $G < 0,3$ értékig figyelhetők meg, utána egy másik forma érvényesül.



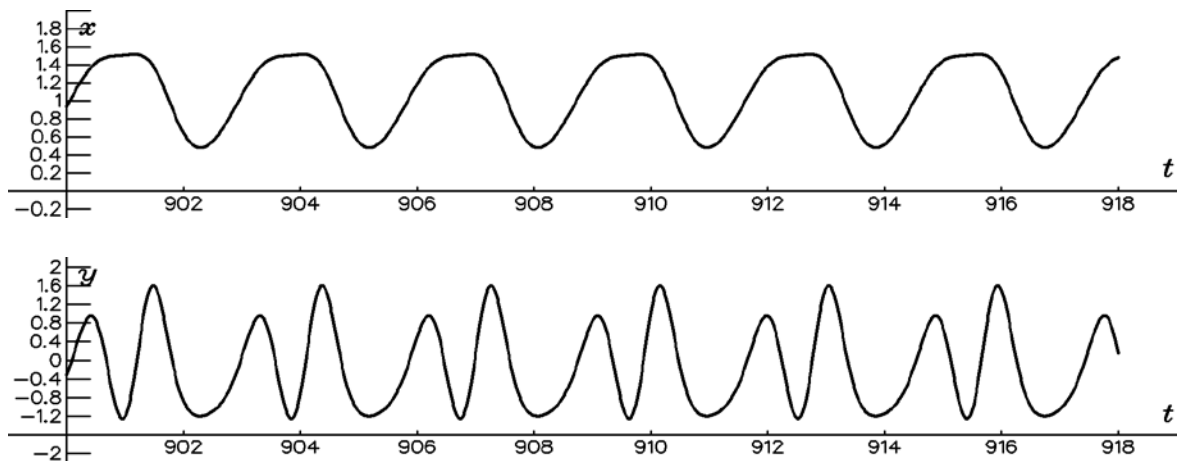
6. ábra

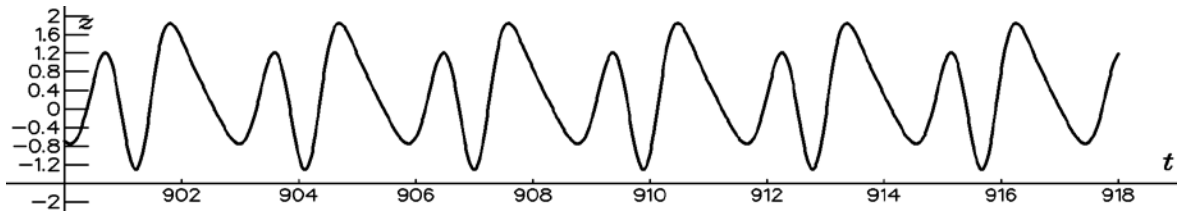
A Lorenz-féle alacsonyrendű légköri modell x változójának viselkedése, növekvő gyenge aszimmetrikus termikus kényszer esetén.

(fekete: $G=0,24$; piros: $G=0,26$; zöld: $G=0,265$; kék: $G=0,27$; narancs: $G=0,29$; $1 \cdot t=5$ nap; teljes idő: 90 nap)

3.3 Mérsékelt aszimmetrikus termikus kényszer

Mérsékelt aszimmetrikus kényszernek, G -nek olyan intervallumát hívjuk, ahol $0,3 \leq G \leq 0,86$. (Götz, 2001) Az előző részben azt vettük észre, hogy a 0,3-as értékhez közeledve a kicsi szélsőértékek közti különbség egyre kisebb lesz az x változónál. Ez a különbség 0,3-as értéknél eltűnik, és innentől kezdve csak egy minimuma és maximuma van egy periódusban. Ha G értékét tovább növeljük, akkor a három változó időfüggvénye valamelyest tovább változik, x -nél az amplitúdó erősödik, periódus ideje kb. 14,5 nap, y és z változó esetében pedig a periódusban az abszolút maximum és az ezt követő kisebb maximum között az idő nő, és a következő periódus kezdete és a kismaximum közti idő pedig csökken. (7. ábra)

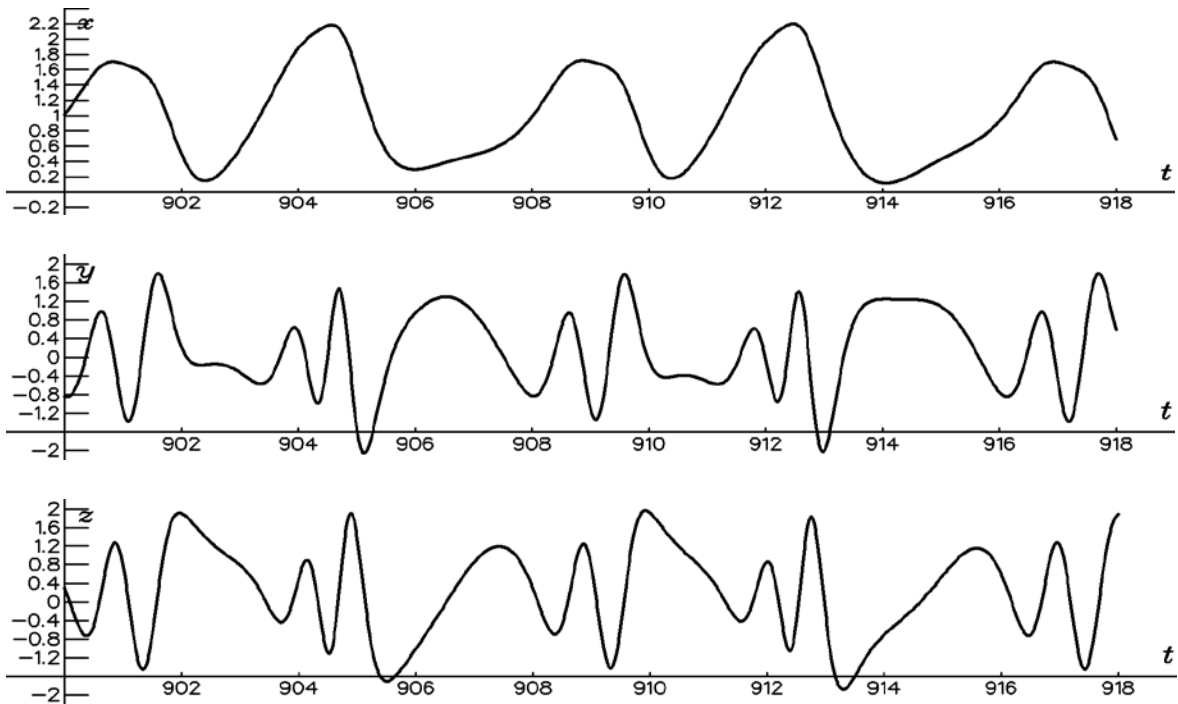




7. ábra

A Lorenz-féle alacsonyrendű légköri modell x , y és z változójának viselkedése mérsékelt aszimmetrikus termikus kényszer esetén. ($G=0,7$; $1 \cdot t=5$ nap; teljes idő: 90 nap)

Azonban $G = 0,8$ érték elérésékor más képet kapunk. (8. ábra) Itt ugyanis az x változó esetén 4 maximum érték található egy periódusban. Közben y és z periodikussága is ritkább. Két periódus között y esetén 12 maximum van, z esetén pedig 10 maximum. Azonban bármennyire is megváltozott a kép, még mindig periodikus. A periódus idő x változónál kb. 80,5 nap.

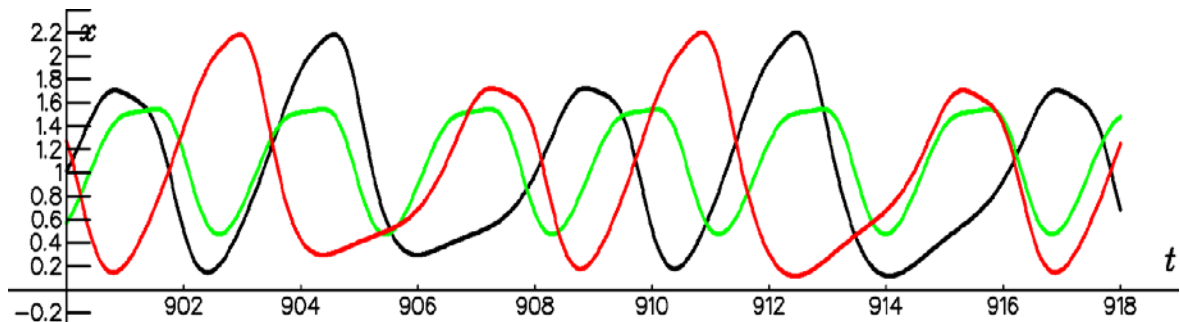


8. ábra

A Lorenz-féle alacsonyrendű légköri modell x , y és z változójának viselkedése növelt mérsékelt aszimmetrikus termikus kényszer esetén. ($G=0,8$; $1 \cdot t=5$ nap; teljes idő: 90 nap)

Tovább vizsgálva és változtatva a kezdeti feltéteket, érdekes eredményt kapunk. Eddig a kezdeti feltételek $x = y = z = 0$ voltak, de most kezdjük el változtatni x értékét 0,01-es lépésekkel. Gyenge kényszernél a kezdeti feltétel nem befolyásolja érdemben a futás eredményét, csak időben tolódtak el a hullámok. Azonban ha $G = 0,8$ esetet vizsgáljuk különböző x kezdeti értékekre, akkor azt tapasztaljuk, hogy már $x = 0,01$

értéknél egy másik függvényt kapunk. (9. ábra) Hasonlót ahhoz, amit $G = 0,7$ esetben láttunk (7. ábra), adott x változónál minden maximumában periodikus függvényt. Azonban ha tovább növeljük x értékét, akkor például $x = 0,19$ értéknél megint ahhoz a függvényhez hasonlót kapunk, amit $x = 0$ esetén tapasztaltunk. (8. ábra) További x kezdeti értékek vizsgálatánál mindig ezt a két alakot fogjuk kapni, bizonyos, de nem szabályszerű időközönként. Ezt a viselkedést intranszitivitásnak nevezzük, tehát a kezdeti értéktől függően az eredmény kétféle és csakis kétféle lehet.



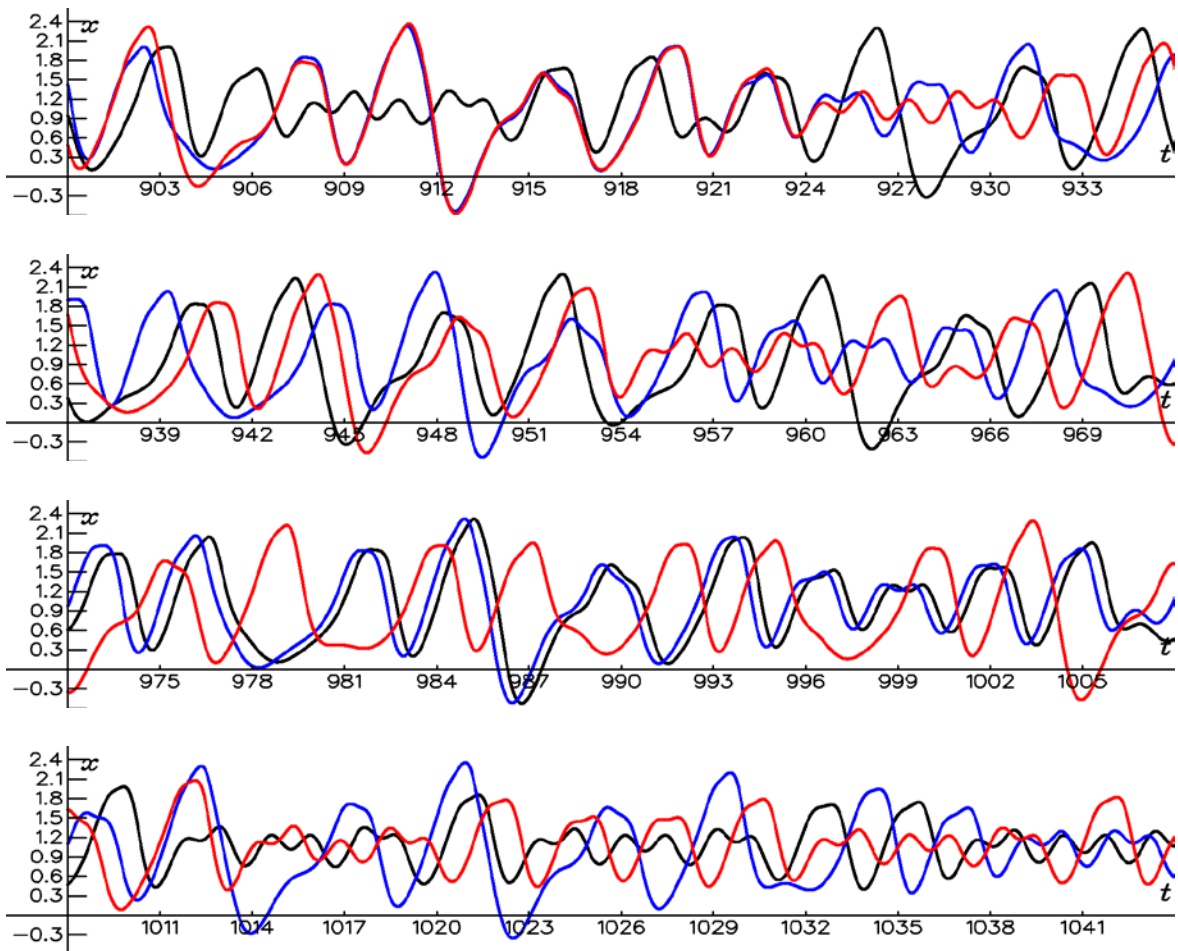
9. ábra

A Lorenz-féle alacsonyrendű léghőmérsékleti modell x változójának intranszitiv viselkedése mérsékelt aszimmetrikus termikus kényszer és különböző x kezdeti feltétel esetén.

($G=0,8$; fekete: $x=0$; zöld: $x=0,01$; piros: $x=0,19$; $1 \cdot t=5$ nap; teljes idő: 90 nap)

3.4 Erős aszimmetrikus termikus kényszer

Amikor G értéke már eléggé nagy, tehát $0,86 < G \leq 1,3$ (Götz, 2001), akkor azt tapasztaljuk, hogy a három változó időben már nem periodikus, hanem aperiodikussá válik. Már 0,8 és 0,86 közötti értékeknél feltűnik, hogy a periódusok közt drasztikusan egyre hosszabb idők telnek el (de még mindig periodikus), így aztán felmerülhet a kérdés, hogy a 0,86-ös érték felett nem léphet-e fel periodikus viselkedés, csak jóval nagyobb időközökkel. Azonban ha hosszabb időszorra nézzük meg az eredményeket, akkor észrevehető, hogy nincs benne periodicitás. Vizsgáljuk a $G = 1$ esetet. Mivel feltételezzük, hogy kaotikus viselkedésről van szó, vizsgáljuk meg a kezdeti értékre való érzékenységet. Három kezdeti feltétel mellett is megnézzük az esetet, hogy az intranszitivitás lehetőségét kizárjuk. Csak x változását szemléljük, mert ha ennél kaotikusság lép fel, akkor a másik kettő változónál is ez történik. Emellett hosszabb, két éves időszakot nézünk. (10. ábra)



10. ábra

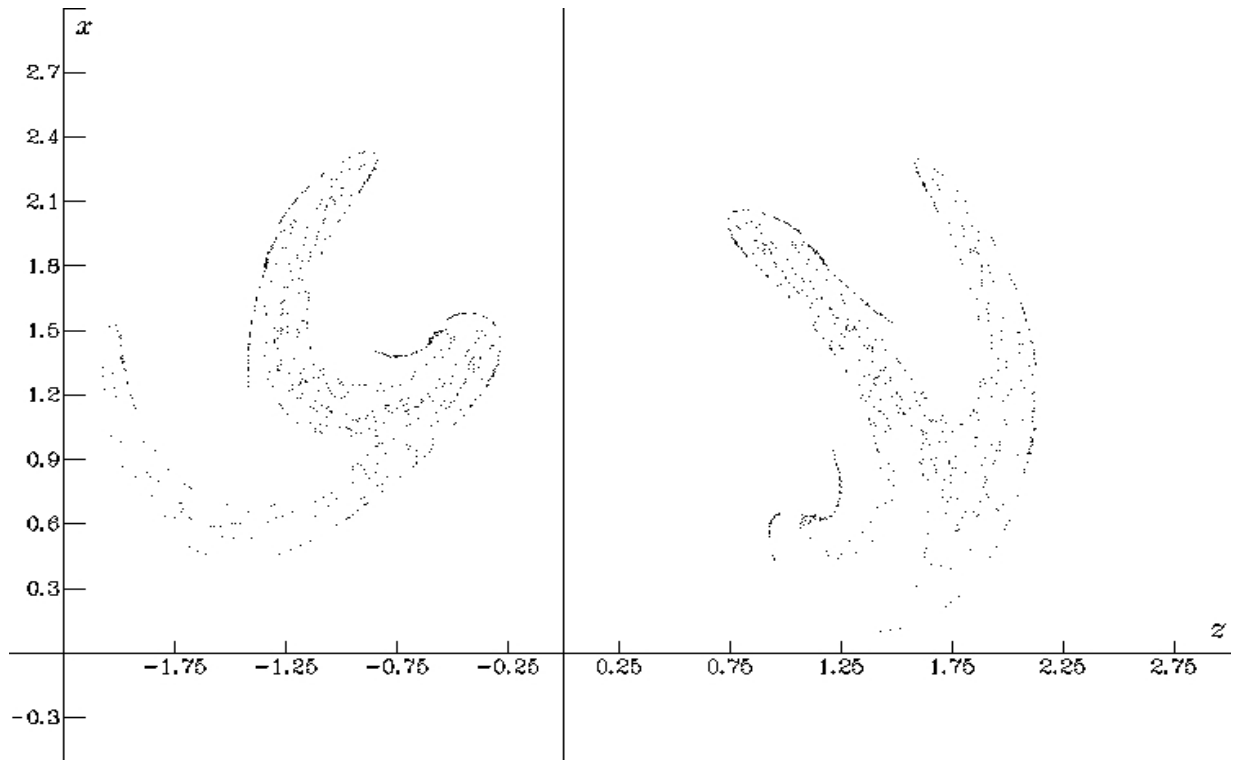
A Lorenz-féle alacsonyrendű légköri modell x változójának viselkedése erős aszimmetrikus termikus kényszer és különböző x kezdeti feltételek esetén.

($G=1$; fekete: $x=0$; kék: $x=0,01$; piros: $x=0,02$; $1 \cdot t=5\text{nap}$, teljes idő: 2 év)

Látszik, hogy első ránézésre bármennyire is hasonlóknak tűnik egyes tartományokban a függvények menete, valójában a három eset teljesen különböző.

Ezután megvizsgáljuk a trajektóriának az $y=0$ síkkal alkotott Poincaré-metszetét.

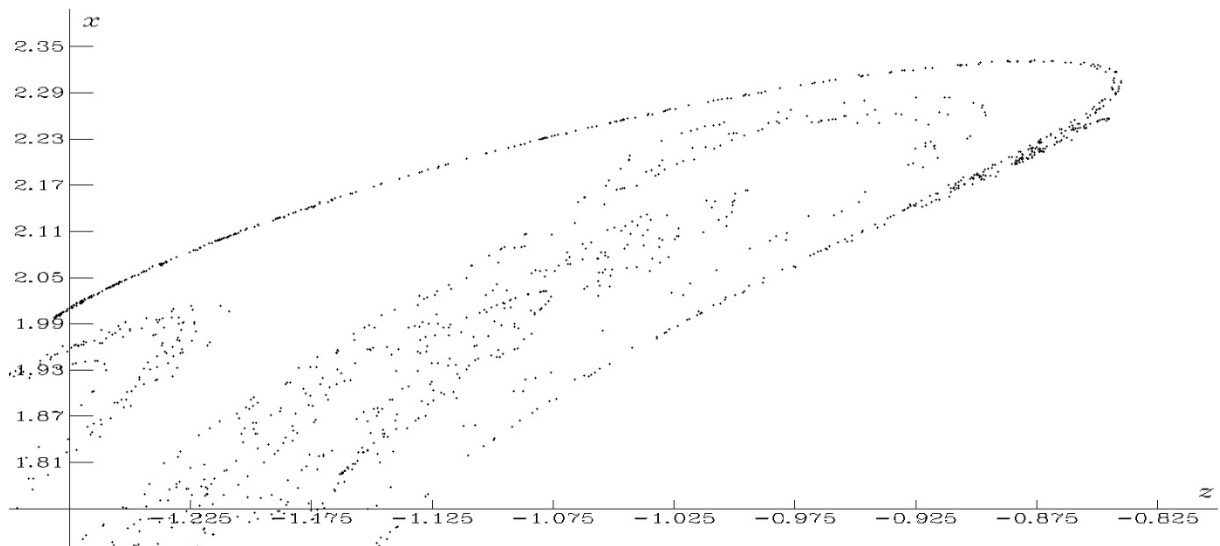
A 11. ábránál a modell futtatása 15 éves időtartamra történt.



11. ábra

A Lorenz-féle alacsonyrendű légköri modell attraktorának $y=0$ síkkal alkotott Poincaré-metszete ($t=15$ év)

A jobb oldali metszéspontokat mindig az $y > 0$ térrészből az $y < 0$ térrész felé mozgó trajektória hozta létre, amely ezután balra fordult és a bal oldali pontokban metszve a síkot visszatért az $y > 0$ térrészbe. Ez az attraktor deformált tóruszra hasonlít. Fraktál jellegét a 12. ábra szemlélteti. A pontsűrűség növelésére, hogy a térrészek az attraktorokban jobban láthatóak legyenek, a modell futtatása hosszabb időre (150 év) történt és egy részletét kinagyítottuk. A nagyított rész az attraktornak az egyik „ujja”, ahol az látszik, hogy a fraktál Cantor-halmaz képet mutat. (Lorenz, 1984) (Tél et al., 2002)



12. ábra

A Lorenz-féle alacsonyrendű léghővezési modell Poincaré-metszetének egy része ($t=150$ év)

A $G=1$ esetre Masoller, Sicardi Schifino és Romanelli (Masoller et al., 1992) kiszámolta a rendszer Ljapunov-exponenseit, amik a kaotikus mozgást végző, eredetileg közeli trajektóriák időben exponenciális ütemű széttartásának a mértékét jellemzik. Ez lényegében magának az előrejelezhetetlenségnek a mérőszáma. Erre a $\lambda_1 = 0,23$; $\lambda_2 = 0$; $\lambda_3 = -0,59$ értékeket kapták. A pozitív érték a fázistérbeli tágulásokat jellemzik, a negatív értékek pedig a zsugorodást. A kaotikus rendszerekben legalább egy $\lambda > 0$, és megmutatható, hogy ekkor az attraktor különös attraktor, tehát fraktál alakzatot vesz fel. (Ezzel azt kapjuk, hogy a rendszer kezdeti állapotának, kis $\delta x(0)$ hibájának átlagos növekedési ütemét leíró $\delta x(t) = \delta x(0) \exp(\lambda_1 t)$ összefüggés szerint az induló hibának az előrejelezhetőség mértékéül szolgáló átlagos e -szereződési ideje a modellben $t = 1/\lambda_1 = 4,35$ időegység, ami nagyjából 22 nap.) (Götz, 2001)

Összességében a lefutott modellek azt hivatottak bemutatni, hogy a légkörben nem létezik periodicitás, tehát kaotikus rendszerről van szó. Emellett azt is bemutatják, hogy annak ellenére, hogy a külső kényszert nem módosítottunk, mégis kialakul az irreguláris rendszer, tehát a légkör önmagában tartalmazza a kaotikus szabad változékonyságot, ami az előrejelezhetőséget is megnehezíti.

4. Az évek közötti szabad klímaváltozékonyság modellezése

Megfigyelések alapján tudjuk, hogy az éghajlati rendszer állapota az összes időskálán változik. Magát a klímaállapotot különböző függő változók adott időintervallumra történő átlagolásával állapíthatjuk meg. Ezt azonban két komponensre tudjuk szétbontani, egy valódi átlagra és az ettől markánsan eltérő értékekre. A klímaváltozásnál két klímaállapot különbségét nézzük, és szűrjük le belőle a változásokat. A változást is a már említett két komponenssel tudjuk leírni. A valódi átlag komponens változását, amikor a külső kényszer módosulása az ok, kényszerített változásnak nevezzük. Az átlagtól való eltérés komponens változásának okai pedig magának az éghajlati rendszernek belső, nemlineáris folyamatai. Ezt szabad klímaváltozékonyságnak nevezzük. (Götz, 2001)

A klímaváltozás kutatása során sok elmélet született, és a változás legfőbb okának - főleg nagyobb mértékű változásoknál - a kényszerített változásokat, a külső kényszerek módosulását tartják. Azonban később kiderült, hogy bizonyos időskálákon nagy szerepet kapnak a természetes belső folyamatok, amik az éghajlati rendszer komponensei közötti nemlineáris kölcsönhatások következményei. (Götz, 2001)

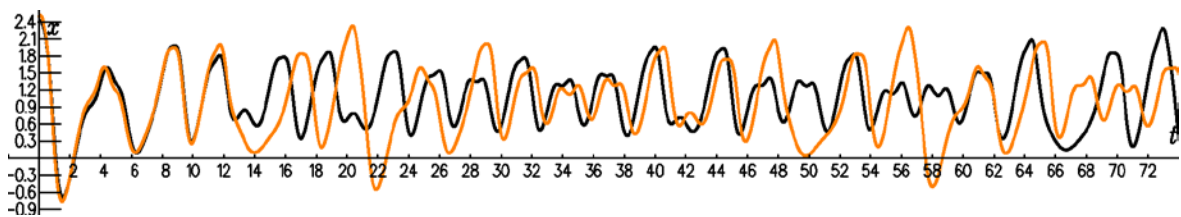
Lorenz (1990) az előző fejezetben vizsgált modell numerikus kísérleteivel próbálta igazolni azt a felvetést, mely szerint létezik olyan mechanizmus, ami képes előidézni az éghajlat évek közötti változékonyságát anélkül, hogy a külső kényszerek a normális évszakos cikluson kívül változnának. Ennek eredményeit mutatjuk be a továbbiakban.

4.1 Évszakváltások nélküli modell

Elsőként a termikus kényszereket jelző F és G paramétereket állandó értéken tartottuk, tehát csak adott helyzetre/évszakra végeztük el a modell futtatását.

Az a és b paraméter értékei megegyeznek az előző fejezetben használtakkal. Az előző fejezetben azt láttuk, hogy amikor $G=1$ és $F=8$, akkor kaotikus képet kapunk. Maga az F paraméter a meridionális irány mentén fellépő külső hőközlés kontrasztját jelöli. Feltételezhetjük, hogy ez a kontraszt az északi féltekén télen nagyobb, mint a nyár folyamán. Ezért $F=8$ esetét a téli időszakra vonatkoztatjuk, míg nyár esetében $F=6$ értéket használjuk. (Lorenz, 1990) (Tél et al., 2006) A futtatások során pedig G értékét rögzítettük.

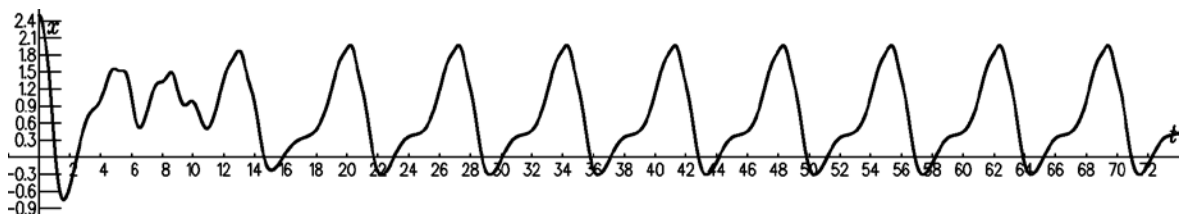
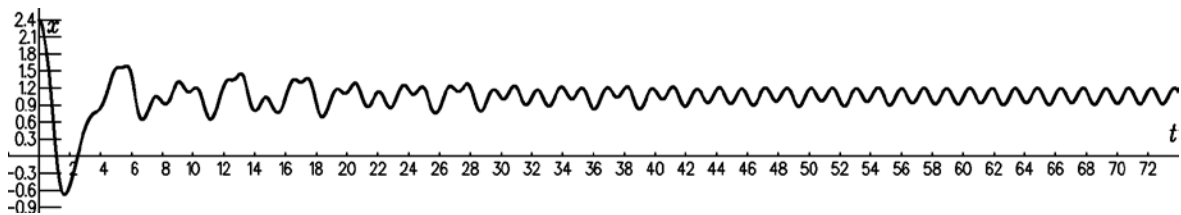
Az $F = 8$ esetét már vizsgáltuk, láttuk, hogy kaotikus rendszert kapunk. A 13. ábrán 1 évre futtattuk le a modellt. Azonban $F = 6$ esetén először jóval nyugodtabb és periodikus képet kapunk. (14. ábra, felső) Azért, hogy bizonyítsuk, hogy ez tényleg nem kaotikus rendszer, különböző kezdeti feltételekkel futtatjuk le a modellt. Az eredmények azt mutatják, hogy a kezdeti feltételektől függően x értéke, ami a nyugati szelek intenzitását jelöli, vagy gyenge periodikus oszcillációt mutat, vagy pedig erős periodikus oszcillációt. (14. ábra, alsó) Emellett azt tapasztaltuk, hogy csak ez a két helyzet fordulhat elő, így a nyár intranszitiv rendszerként jellemezhető. Az erősebb oszcillációval rendelkező eredményt aktív nyárnak, míg a gyengébbet inaktív nyárnak nevezzük.



13. ábra

A Lorenz-féle alacsonyrendű légköri modell x változójának viselkedése a télnek megfelelő értékek esetén, két különböző kezdeti feltétellel.

($F=8$; fekete: $x=2,4$; narancs: $x=2,5$; 1 hónap $\sim 6t$; teljes idő: 1év)



14. ábra

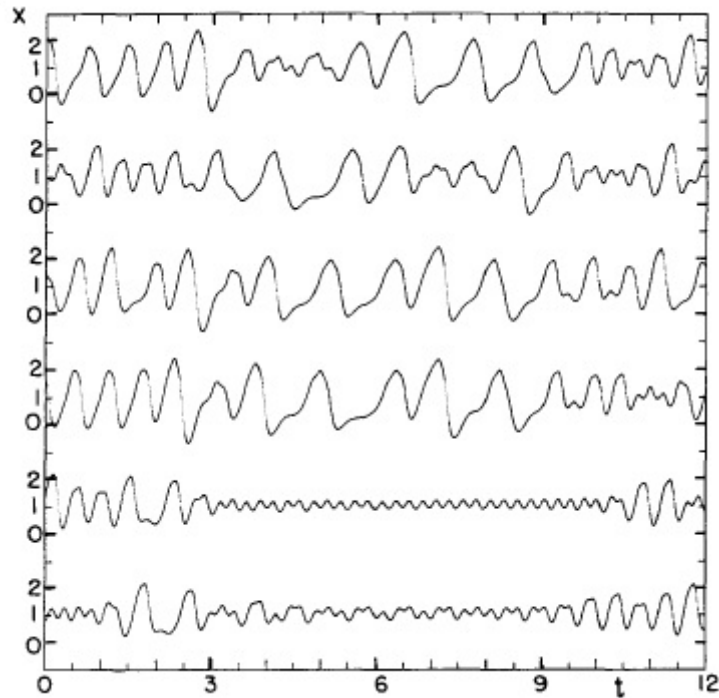
A Lorenz-féle alacsonyrendű légköri modell x változójának viselkedése a nyárnak megfelelő értékek esetén, két különböző kezdeti feltétellel. A felső ábra az inaktív nyarat jelöli, az alsó pedig az aktív nyarat.

($F=6$, inaktív nyár (felső): $x=2,4$; aktív nyár (alsó): $x=2,5$; 1 hónap $\sim 6t$; teljes idő: 1év)

4.2 Teljes éves modell

A következő helyzettel egy egész évet próbálunk szimulálni. Ennek érdekében F értékét változtatjuk 5 és 9 között, a következő egyenlettel definiálva a változást:

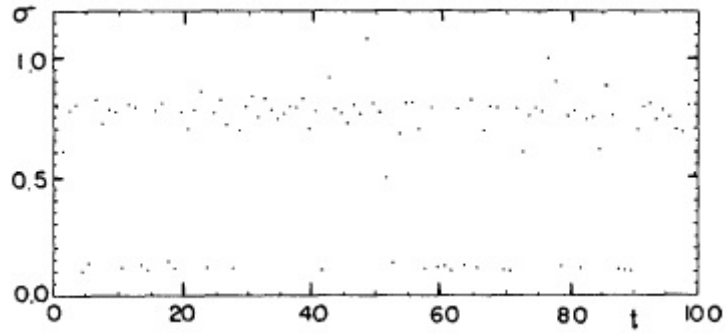
$F = 7 + 2 \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right)$, ahol t a hónapokat jelöli, és $\tau = 12$ hónap. (Lorenz, 1990) Azért 5 és 9 a két határérték, ugyanis napfordulókkor ilyen extrém értékek előfordulhatnak.



15. ábra

A Lorenz-féle alacsonyrendű légköri modell x változójának viselkedése 6 év során, évközben változó szimmetrikus termikus kényszer (F) esetén.
 ($5 \leq F \leq 9$ (egy év során); $1 \cdot t = 1$ hónap; teljes idő: 6 év)
 (Lorenz nyomán, 1990)

Ezen az ábrán azt látjuk, hogy az első 4 évben aktív nyári helyzet volt, míg az utolsó kettő inaktív volt. Felmerül a kérdés, hogy milyen valószínűséggel fordul elő aktív nyár vagy inaktív nyár. Ennek kiszámolására Lorenz (Lorenz, 1990) 100 évre futtatta le a modellt többször, majd megnézte, hogy milyen gyakorisággal fordul elő a két különböző típus egymáshoz képest. A 16. ábrán látszik ennek az eredménye, ahol a felső ponthalmaz jelzi az aktív nyarakat, az alsó az inaktív nyarakat. Ebből levonható, hogy az aktív nyarak száma jóval több.



16. ábra

*Aktív nyarak (felső ponthalmaz), inaktív nyarak (alsó ponthalmaz) eloszlása 100 évre
(Lorenz nyomán, 1990)*

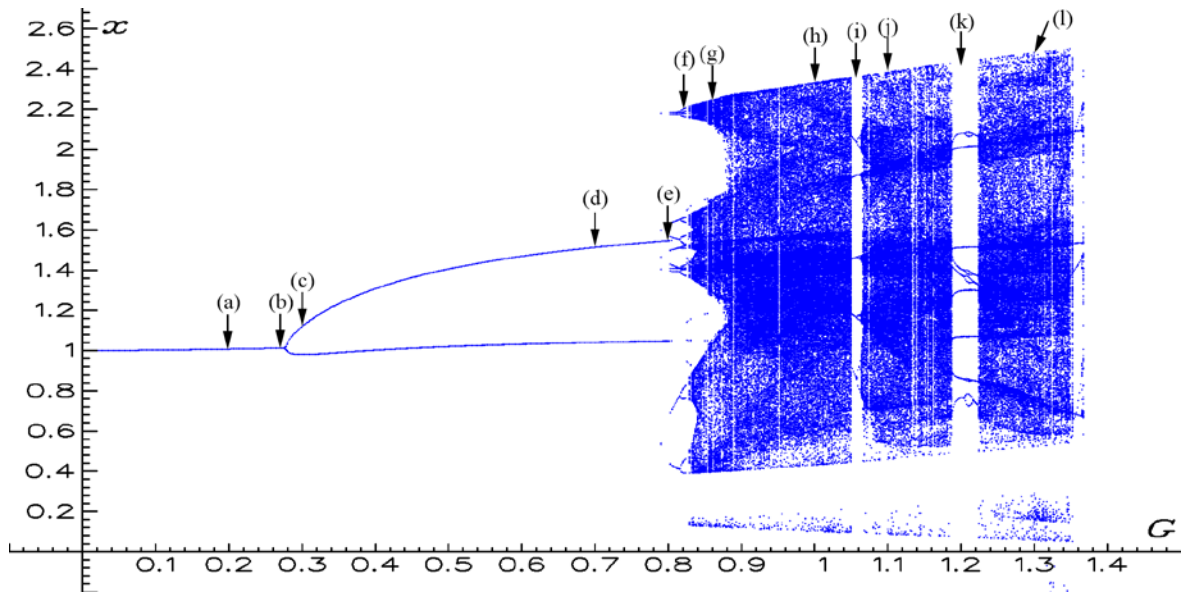
Az aktív és inaktív nyarak szabálytalan egymásutánját az okozza, hogy a nyár viselkedése erősen függ a téltől. Függ attól, hogy a téli időszak milyen értéknél ér véget, és ez az érték lesz majd a nyár kezdeti feltétele, aminél pedig láttunk, hogy ettől függ a nyári helyzet típusa. Előrejelezni azért nem tudjuk, hogy milyen típusú lesz a nyár, mert a tél kaotikus.

5. Bifurkáció

Az előzőekben tárgyalt rendszernél azt láttuk, hogy ha bizonyos paramétert változtatunk, akkor a rendszer két különböző állapotot vehet fel, aminek következtében a rendszer attraktora megváltozik. Ezt a fajta paramétertől függő változást bifurkációnak nevezzük. A rendszer fejlődése gyakran egymást követő bifurkációkon keresztül történik. Adott rendszer elemzéséhez alkalmas eszköz lehet az ennek a sorozatnak a követésére szolgáló úgy nevezett bifurkációs diagram, amely a választott paraméter függvényében mutatja a rendszer kiválasztott fázisváltozójának a Poincaré-metszettel kellően hosszú idő után kapott diszkrét értékeit adott időintervallumban. Ennek alapján nyerhetünk információt arról, hogy adott paraméternél milyen jellegű a rendszer attraktora. (Nagy, 2013)

A bifurkációs diagramot előállíthatjuk Edward Lorenz általános léghővezési modelljéhez is úgy, hogy egyik esetben a G , másik esetben pedig az F paraméter változik, és ennek függvényében rajzolódik ki a rendszer jellege a bifurkációs diagramon. Ezekről a diagramokról leolvashatjuk, hogy ha adott paraméterértéket választunk, akkor a rendszerünknek milyen viselkedése lesz. Ezzel ellenőrizhetjük az előző fejezetekben végzett futtatásokat, hogy az ott használt értékek esetén tényleg olyan eredményt kaptunk-e, ami a bifurkációs diagramból is következik. Ebben a fejezetben a rendszer bifurkációs diagramjait állítjuk elő és röviden bemutatjuk a rendszer kaotikussá válását attraktorokon keresztül, felhasználva a bifurkációs diagramot. Azonban a bifurkációs diagramok részletesebb elemzésére nem térünk ki, ugyanis az meghaladná a dolgozatunk terjedelmi korlátait.

Először azt az esetet vizsgáljuk, amikor G értéke változik. Ennek a bifurkációs diagramja látszik a 17. ábrán. Az ábrázolás során G értéke 0 és 1,5 között változott, a többi paraméter pedig a 3. fejezethez hasonlóak, ahol szintén csak G értékét változtattuk. ($F = 8$; $a = 0,25$; $b = 4$; $x = y = z = 0$)



17. ábra

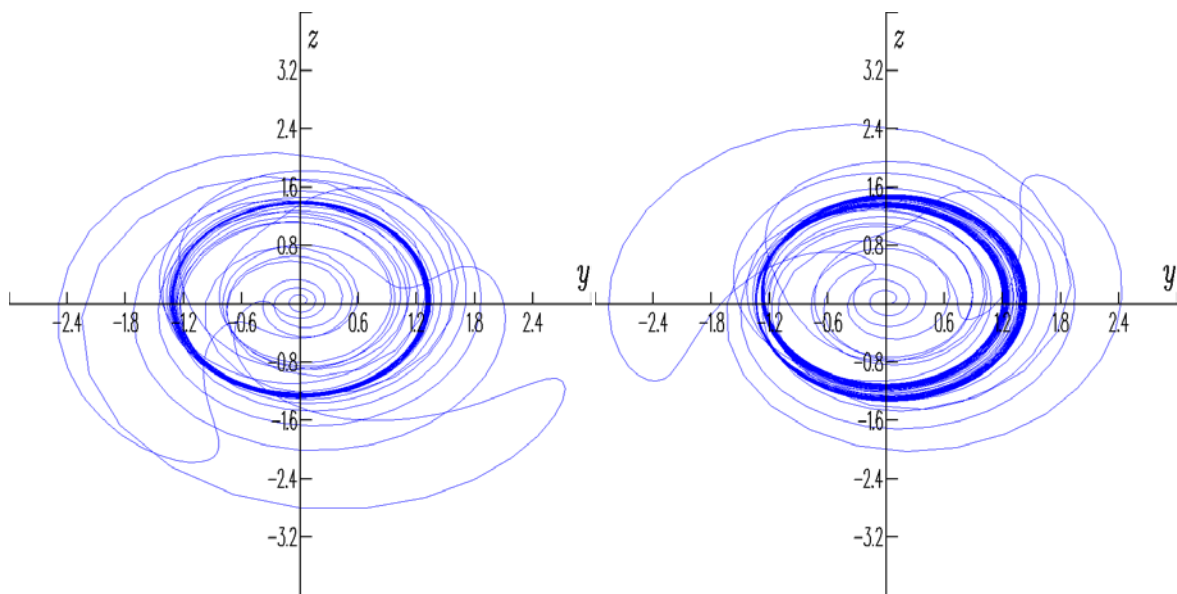
A Lorenz-féle alacsonyrendű légköri modell bifurkációs diagramja G paraméter változása esetén. A jelölt értékeknél a rendszer attraktorát ábrázoltuk, melyek ebben a fejezetben és a függelékben találhatóak meg (II. függelék).
 $(0 \leq G \leq 1,5; a=0,25; b=4; F=8; x=y=z=0)$

Az 17. ábrát vizsgálva, az figyelhető meg, hogy a rendszer körülbelül 0,275-ös értékig stabil, periodikus. Utána periódus-kettőző bifurkáció jelenik meg, tehát a rendszer továbbra is stabil, azonban a periódusa megduplázódik. Ez az újfajta viselkedése a rendszernek egészen $G=0,8$ értékig fennmarad, utána azonban drasztikus változás történik, a rendszer egyre zavarosabb lesz. G értékének további növelésével pedig a rendszer kaotikussá válik, ami azonban nem áll fenn minden $G > 0,86$ értéknél. Ugyanis körülbelül $G = 1,05$ és $G = 1,2$ körüli értéknél a rendszer újra periodikussá válik, a rendszer nem kaotikus. A pontos tartományi értékek meghatározásához a bifurkációs diagram részleteinek nagyobb felbontású előállítására van szükség. Emellett a Dynamics Solver nagy segítséget nyújt azzal, hogyha elkészült diagramon adott területre mozgatjuk a kurzort, akkor kiírja a kurzor helyén G értékét, így a pontos értéket leolvashatjuk.

A következőkben a rendszer fejlődést mutatom be a bifurkációs diagram alapján vett értékekkel és a rendszer attraktorával. Az attraktor a fizikai rendszer állapotainak egy halmazát jelzi. Ezek az állapotok olyanok, melyeket a rendszer az állandósult viselkedése során újból és újból megismétel, illetve amelyeket a rendszer tetszőleges pontossággal ismételt megközelít, és így egy korlátos halmazt alkotnak. A futtatás ideje minden esetben azonos hosszúságú, $t = 8000$ időlépcső, és a felhasznált értékek a 17. ábrán nyíllal és betűvel jelölve vannak. A futtatások eredményeinek egy része ebben a fejezetben

található meg, az összes pedig a II. függelékben. Az ábrákon a modell futtatás teljes időtartama látszik, így a rendszer kezdeti fluktuációja is, azonban ezektől a rendszer attraktora zavartalanul kivehető. Ebben a fejezetben az attraktor ábrázolása olyan, hogy a vízszintes tengelyen az y változó, a függőlegesen pedig a z változó található. Az attraktor többi nézetének ábrázolása szintén a függelékben található meg.

A bifurkációs diagram sok pontjáról választottunk értékeket, és az attraktorok megjelenési formája a várt eredményeket hozták. Az 18. ábránál a gyenge aszimmetrikus termikus kényszer tartományából választottunk, ahol a rendszer stabil, periodikus. A választott érték $G = 0,2$ (a) és az attraktor egyszerű zárt görbe egyetlen periódussal.



18. ábra

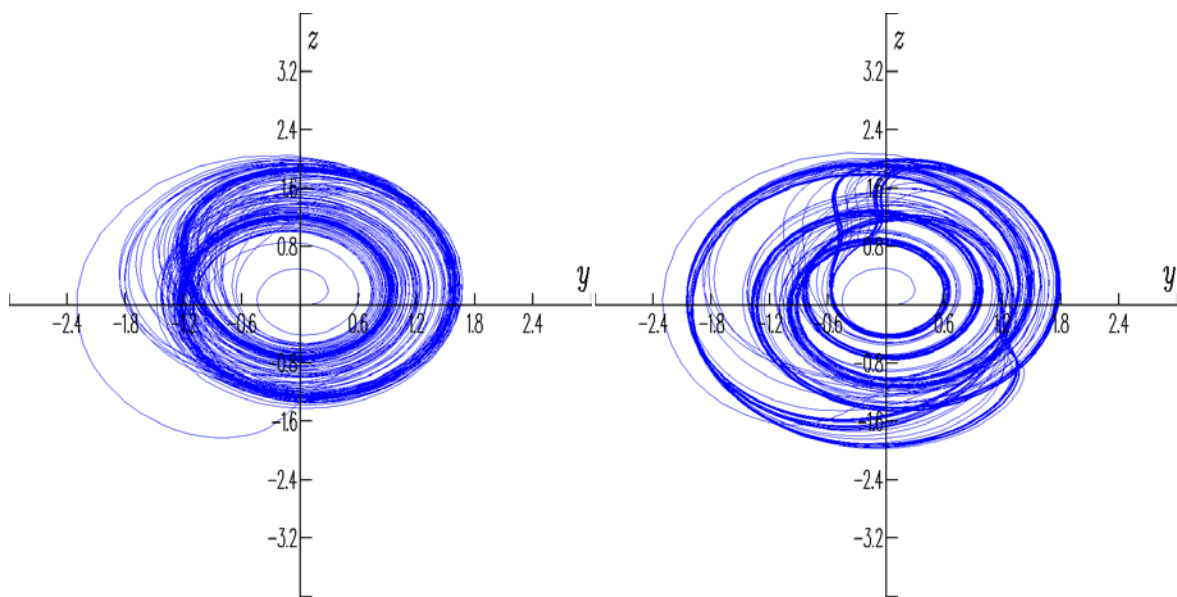
A Lorenz-féle alacsonyrendű légköri modell attraktora $G=0,2$, a 17. ábrán (a) nyíllal jelölt érték esetén.

19. ábra

A Lorenz-féle alacsonyrendű légköri modell attraktora $G=0,3$, a 17. ábrán (c) nyíllal jelölt érték esetén.

A 19. ábránál G értékét a mérsékelt aszimmetrikus termikus kényszer tartományából vettük, nem sokkal a periódus-kettőző bifurkáció után. Ezen az látszik (ebből a nézetből), hogy az eddig zárt ellipszis felbomlik, és mielőtt a trajektória megismételné önmagát, egy belső kisebb ellipszisszerű pályát is befut, megnövelve ezzel a periodicitás idejét. A 20. ábrán ez még jobban látszik, ahol $G=0,8$ értéket választottuk. A 21. ábrán a rendszer attraktora már megváltozik, ennél $G=0,82$ értéket választottuk, melyet a 17. ábrán (f) nyíllal jelöltünk. Az attraktor még mindig zárt, tehát periodikus (vagyis nem kaotikus), de a periódusidő drasztikusan megnőtt. A 22. ábrához már $G=1$ értéket

választottuk, ami az erős aszimmetrikus termikus kényszer tartományába esik, és amelyiknél láttuk a 3.4 fejezetben, hogy a rendszer kaotikus. Ez az érték (h) a bifurkációs diagramon is a kaotikus tartományba esik, és a 22. ábrán is látszik, hogy az előzőekhez hasonló idő alatt nem alakult ki zárt attraktor, a trajektóriák adott területen belül bárhol futhatnak és lefedik a teljes teret. A 23. ábrán a 17. ábrán (i) nyíllal jelölt $G=1,056$ érték választásával készült attraktor látszik. A bifurkációs diagram is mutatja, hogy a választott helyen megszűnik a kaotikus tartomány, így a rendszer attraktorának is zárt görbévé kell válnia. Ezt igazolja is a 23. ábra.

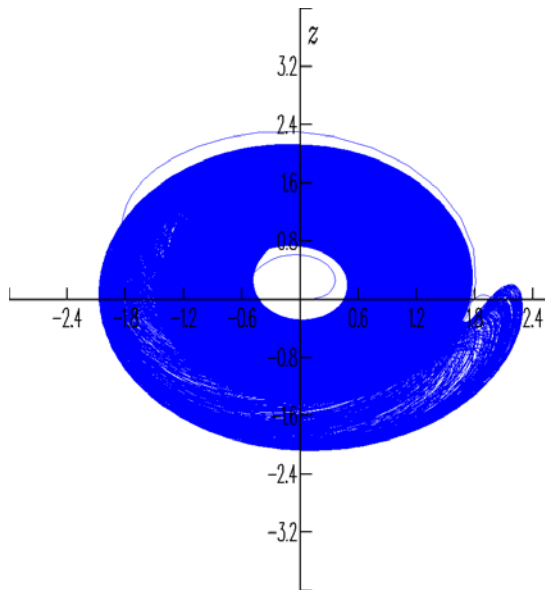


20. ábra

A Lorenz-féle alacsonyrendű légköri modell attraktora $G=0,8$, a 17. ábrán (e) nyíllal jelölt érték esetén.

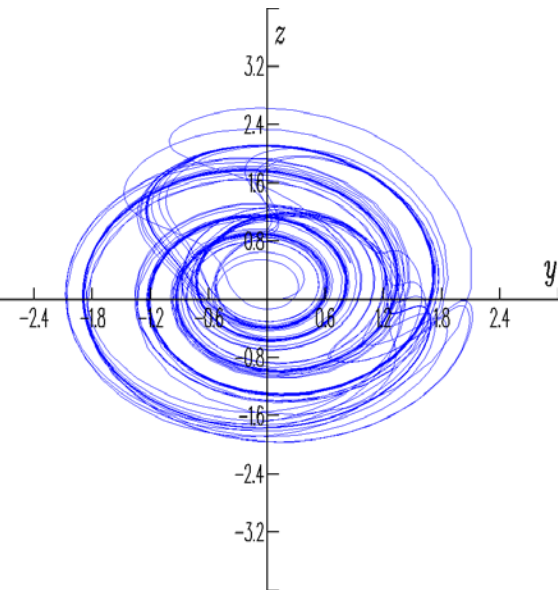
21. ábra

A Lorenz-féle alacsonyrendű légköri modell attraktora $G=0,82$, a 17. ábrán (f) nyíllal jelölt érték esetén.



22. ábra

A Lorenz-féle alacsonyrendű léghővezetési modell attraktora $G=1$, a 17. ábrán (h) nyíllal jelölt érték esetén.

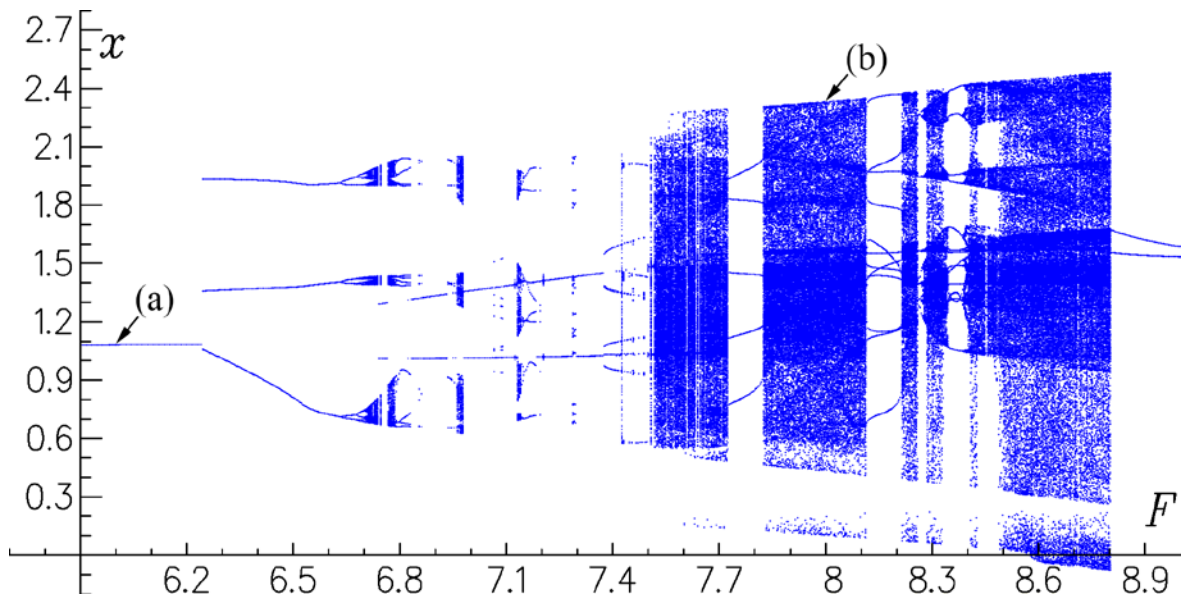


23. ábra

A Lorenz-féle alacsonyrendű léghővezetési modell attraktora $G=1,056$, a 17. ábrán (i) nyíllal jelölt érték esetén.

Az ábrákon megfigyelhető, hogy a vizsgált rendszerünk a G paraméter, vagyis az aszimmetrikus termikus kényszer növelése esetén, hogyan válik kaotikus rendszerré.

A következőkben röviden az F paraméter változtatásával létrehozott bifurkációs diagrammal foglalkozunk. Ennek előállításához az 4. fejezetben használt rögzített kezdeti feltételeket és paramétereket használtuk. A végeredmény a 24. ábrán látható, és sokkal összetettebb, mint a 17. ábrán látható diagram. Azonban szintén leolvasható róla, hogy egyes F értékeknél milyen viselkedésű rendszert várhatunk. Megbizonyosodhatunk arról is, hogy a rendszernek a 4.1 fejezetben választott értékeknél tapasztalt viselkedését a bifurkációs diagram is alátámasztja. Ugyanis az $F = 8$ érték, ami a 24. ábrán (b) nyíllal jelöltünk, tényleg a kaotikus tartományba esik, és az 4.1 fejezetben is kaotikus viselkedést tapasztaltunk. Az $F = 6$ érték esetén, amit a 24. ábrán (a) nyíllal jelöltünk, pedig látszik, hogy egyszerű periodikus viselkedésű rendszert kapunk.

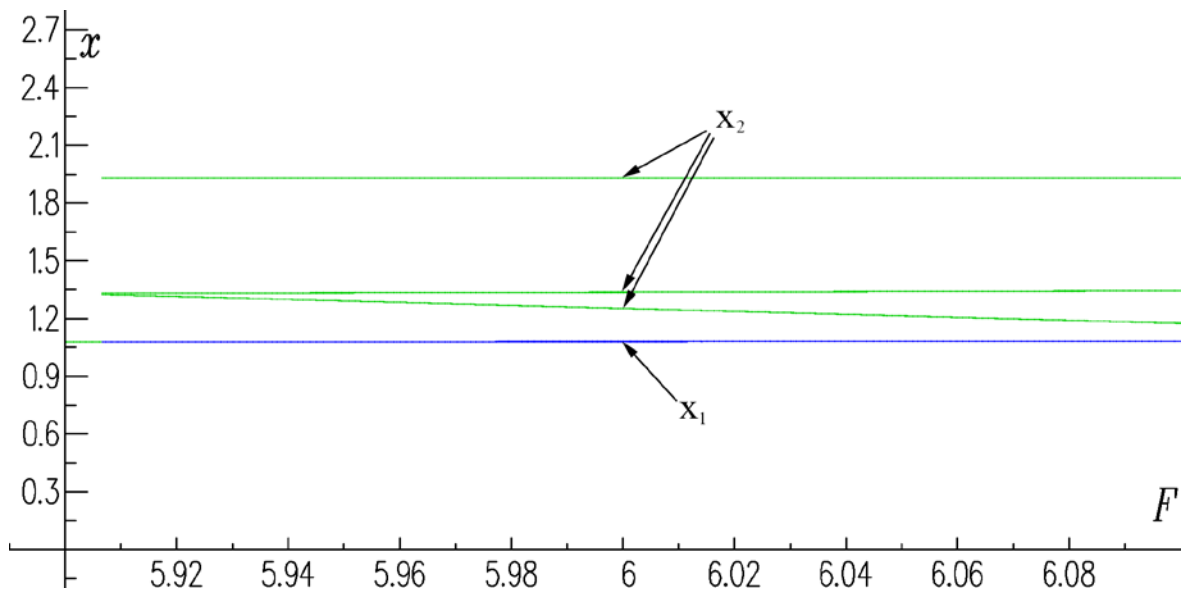


24. ábra

A Lorenz-féle alacsonyrendű léghővezési modell bifurkációs diagramja F paraméter változtatása esetén. Az (a) nyíllal egy periodikus rendszert jelölünk, a (b) nyíllal pedig egy kaotikus tartományt, ahol a rendszer kaotikus viselkedésű.

$$(5,9 \leq F \leq 9; a=0,25; b=4; G=1; x=2,4; y=1; z=0)$$

A bifurkációs diagram az intranzitivitásra is rámutat. Ehhez a diagramnak csak kis tartományát ábrázoljuk, úgy, hogy a diagramot két különböző kezdeti feltétellel kétszer állítjuk elő, hasonlóan, mint az 4.1 fejezetben. A 25. ábrán látszik, hogy a kezdeti feltételt megváltoztatva a bifurkációs diagram megmutatja, hogy ugyanazon $F = 6$ értéknél más viselkedésű rendszer jelenik meg.



25. ábra

A Lorenz-féle alacsonyrendű léghővezési modell két különböző kezdeti feltétellel ábrázolt bifurkációs diagramjának részlete F paraméter változása esetén.

$$(kék: x_1=2,4; zöld: x_2=2,5; 5,9 \leq F \leq 6,1; G=1, a=0,25; b=4; y=1; z=0)$$

6. Néhány további alacsonyrendű modell

A tudomány és a meteorológia területén nem csak az eddig ismertett két modell játszhat fontos szerepet. Tény, hogy Edward Lorenznek a Reyleigh-Bénard konvekció alacsonyrendű modellé formázása, majd ennek vizsgálata úttörő volt a tudományban, ugyanis teljesen új tudományterületet indított el a káoszelmélettel. Ez az egyik legismertebb alacsonyrendű modell, tulajdonságait a mai napig vizsgálják. Azonban emellett is sokféle alacsonyrendű modell létezik másfajta rendszerek vizsgálatára.

Napjainkban is fontos kutatási téma az El Niño-Southern Oscillation (ENSO) jelenség megismerése és viselkedésének vizsgálata. A jelenségre sokféle magyarázat és elmélet született már, azonban Geoffrey K. *Vallis* (1986) bizonyította be először, hogy az ENSO alacsonyrendű kaotikus dinamikai rendszerként értelmezhető. Az általa alkotott rendszer szerkezetileg azonos Edward Lorenz-féle Reyleigh-Bénard konvekciót leíró harmadrendű nemlineáris dinamikai rendszerrel, melynek kétféle levezetésével a 2.1 fejezetben foglalkoztunk. Később Bin *Wang* és Zheng *Fang* (1996) is kidolgozott egy másik alacsonyrendű nemlineáris modellt szintén az ENSO jelenségre.

Szintén használnak alacsonyrendű modelleket a pleisztocén klímátörténetének és a benne lévő glaciális ciklusok modellezésére. Ilyen irányú kísérleteket az 1980-as években Barry Saltzman és munkatársai folytattak. (*Maasch és Saltzman*, 1990)

A klímaváltozása okainak vizsgálatára Palmer próbálta meg használni az alacsonyrendű modellek nyújtotta lehetőségeket. Célja az volt, hogy modellezze az emberi tevékenység hatását a globális klímaváltozásra. Az általa használt modell Edward Lorenznek a Rayleigh-Bénard konvekciót leíró harmadrendű nemlineáris rendszeréből származik. Ezeknek eredményeiről több tanulmányában is írt. (*Palmer*, 1993a, 1993b, 1999)

7. Összefoglalás

Dolgozatomban a légkör kaotikus jellegét vizsgáltuk. Ehhez Edward N. Lorenz két alacsonyrendű modelljét használtuk. Az egyik modell a Rayleigh-Bénard konvekciót írja le, és ezen keresztül bemutattunk kétféle módszert a rendszert leíró alacsonyrendű modell megalkotásához. A másik modell az általános légkörzést írja le alacsonyrendű modell segítségével. Utóbbi esetén a szakirodalomban szereplő megoldásokat reprodukáltuk és ismertettük, segítségül pedig a Dynamics Solver differenciálegyenlet megoldó programot használtuk. Emellett a modell, szakirodalomban nem szereplő, bifurkációs diagramját is előállítottuk, mely vizsgálata során a rendszer kaotikussá válást követhettük nyomon. A vizsgálatokat és a szakterület ismételt feldolgozását az indokolja, hogy bár a modellek viszonylag régiek, tartalmuk rendkívül gazdag, a mai napig sokan használják őket különböző területek rendszereinek leírására. Az egyik legfrissebb cikket, melyben a Lorenz-féle alacsonyrendű légkörzési modellt használták fel, Robert Tardif, Gregory J. Hakim és Chris Snyder írta 2013 novemberében (*Tardif et al.*, 2013). Magyar vonatkozása is van a modell kutatása révén, ugyanis Bócai Tamás, Károlyi György és Tél Tamás több cikket is írtak a modell egy módosított változatának vizsgálatáról. A legújabb 2013 februárjában jelent meg (*Bócai et al.*, 2013).

Összefoglalva a vizsgálatok eredményeit, azt lehet elmondani, hogy a légkörben lezajló folyamatok erősen kaotikus jellegűek, már akkor is, ha csak a rendszer belső kényszerei változnak. Ennek következménye, hogy az előrejelezhetőség erősen korlátozódik, és ha a külső kényszereket is bele vesszük, akkor ez még inkább igaz. Így arra a következtetésre juthatunk, hogy hiába próbáljuk a légkör előrejelzését minél pontosabban megadni, valójában ez szinte lehetetlen feladat, és ez hatványozottan igaz a hosszabb távú előrejelzésekre. Ugyanis míg kis időtávlatban különböző kezdeti feltételek mellett nagyon közeli is lehet a kapott eredmény, addig ez hosszabb időtávon szinte biztosan el fog térni.

8. Köszönetnyilvánítás

Megköszönöm témavezetőmnek, Dr. Tasnádi Péter tanár úrnak az útmutatásokat és a segítséget a dolgozat megírásában. Emellett köszönetet mondok Nagy Péternek, a Kecskeméti Főiskola Természet-és Műszaki Alaptudományi Tanszék docensének, a Dynamics Solver program kezeléséhez nyújtott tanácsaiért.

9. Irodalomjegyzék

- Aguirregabiria, J. M., 2012: *Dynamics Solver 1.93*. University of the Basque Country, Bilbao (Spain)
- Bódai, T., Károlyi, Gy., Tél, T., 2013: Driving a conceptual model climate by different processes: Snapshot attractors and extreme events. *Physical Review E*, 87, 1-9
- Bryan, F., 1959: A numerical investigation of certain features of the general circulation. *Tellus*, 11, 163.
- Defant, A., 1921: Die Zirkulation der Atmosphäre in den gemässigten Breiten der Erde. *Geogr. Ann.* 2, 209-266.
- Ferrel, W., 1859: The motions of fluids and solids relative to the Earth's surface. *Math. Monthly* 1., 140-147.
- Götz, G., Rákoczi, F., 1981: A dinamikus meteorológia alapjai. *Tankönyvkiadó*, Budapest.
- Götz, G., 2001: *KÁOSZ és PROGNOZTIKA. Országos Meteorológiai Szolgálat*, Budapest. 302-321 p.
- Hadley, G., 1735: Concerning the cause of the general trade winds. *Phil. Trans.* 39, 58-62.
- Lorenz, E. N., 1963: Deterministic Nonperiodic Flow. *J. Atmos. Sci.*, 20, 134-135.
- Lorenz, E. N., 1967: The Nature and Theory of the General Circulation of the Atmosphere. WMO-No. 218. TP. 115, Geneva
- Lorenz, E. N., 1984: Irregularity: A fundamental property of the atmosphere. *Tellus*, 36A, 98.
- Lorenz, E. N., 1990: Can chaos and intransitivity lead to interannual variability? *Tellus*, 42A, 378.
- Maasch, K. A., Saltzman, B., 1990: A low-order dynamical model of global climatic variability over the full Pleistocene. *J. Geophys. Res.*, 95D, 1955-1963
- Masoller, C., Sicardi Schifino, A. C., Romanelli, L., 1992: Regular and chaotic behavior in the new Lorenz system. *Phys. Lett.*, A167, 185.
- Nagy, P., 2013: A számítógép felhasználása a modern fizika BSc szintű oktatásában. Doktori értekezés, Eötvös Loránd Tudományegyetem, Budapest, 17 p.
- Palmer, T. N., 1993a: A nonlinear dynamical perspective on climate change. *Weather*, 48, 314-326
- Palmer, T. N., 1993b: Extended-range atmospheric prediction and the Lorenz model. *Bull. Amer. Meteor. Soc.*, 74, 49-65
- Palmer, T. N., 1999: A nonlinear dynamical perspective on climate prediction. *J. Climate*, 12, 575-591
- Rothman, D. H., 2005: Lorenz equations. In: *12.006J/18.353J Nonlinear Dynamics I: Chaos*. Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, 109-115 p.
- Roy, D., 2006: Derivation of generalized Lorenz systems to study the onset of chaos in high dimensions. Master of Science in Physics, The University of Texas at Arlington, Arlington (témavezető: Dr. Zdzislaw Musielak), 12-19 p.
- Saltzman, B., 1962: Finite amplitude free convection as an initial value problem –I. *J. Atmos. Sci.*, 19, 329-332
- Tardif, R., Hakim, G. J., Snyder, C., 2013: Coupled atmosphere-ocean data assimilation experiments with a low-order climate model. *Climate Dynamics*, 1-13
- Tél, T., Gruiz, M., 2002: Kaotikus Dinamika. *Nemzetközi Tankönyvkiadó Rt.*, Budapest
- Tél, T., Gruiz, M., 2006: Chaotic Dynamics. *Cambridge University Press*, Cambridge
- Thomson, J., 1857: On the grand currents of atmospheric circulation. *Phil. Trans. Roy. Soc. A*, 183, 653-684.
- Tritton, D. J., 1988: Instabilities. In: *Physical Fluid Dynamics, Second Edition*. Clarendon Press, Oxford, 243-251 p.
- Vallis, G. K., 1986: El Niño: A chaotic dynamical system? *Science*, 232, 243-245

Wang, B., Fang, Z., 1996: Chaotic oscillations of tropical climate: A dynamical system theory for ENSO. *J. Atmos. Sci*, 53, 2786-2802

Program: *Dynamics Solver 1.96*, honlap: <http://tp.lc.ehu.es/jma/ds/ds.html>

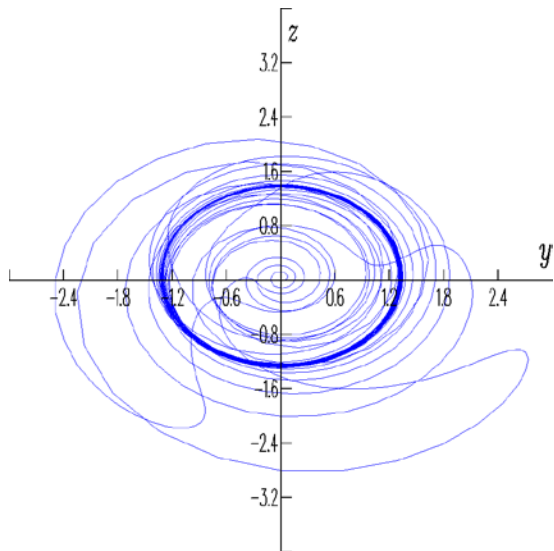
Függelék

I. Dynamics Solver ismertetése

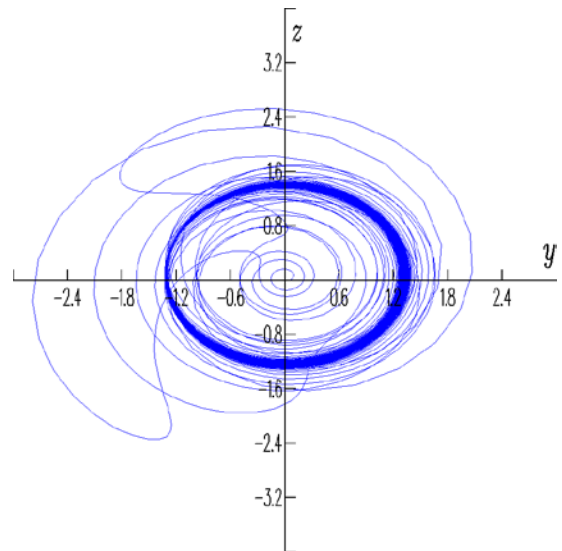
A modellfuttatásokat a Dynamics Solver nevű független fejlesztésű programmal végeztük, amit Juan M. Aguirregabiria (2012), a spanyol University of the Basque Country Elméleti fizika tanszékének egyik professzora készített. A programmal differenciálegyenleteket és egyenletrendszereket tudunk megoldani. A felülete grafikus, tehát nagyon komoly programozási tudást nem igényel. A programban választhatunk többféle megoldási módszert is, beállíthatjuk az időlépcsőt, az időintervallumot, így nem kell mindig a legelejétől lefuttatni a programot, ha minket csak egy részlete érdekel. A futtatások eredményeit meg tudja jeleníteni grafikusán és numerikusan is. A grafikus ábrázolásnál háromdimenziós ábrázolás is lehetséges, emellett Poincaré-metszet is készíthető. A megjelenítésnél ki lehet választani az intervallumot, így a feladat szempontjából fontos részt egyszerűbben tudjuk megvizsgálni. Emellett az ábrákat elláthatjuk különféle jelölésekkel, és a koordináta-rendszer tengelyeit is a problémához illeszthetjük. Előnye még, hogy egyáltalán nem processzor igényes, tehát egy hétköznapi számítógéppel is nyugodtan lefuttathatók a programok. Egy-két hátránya is van azonban, ugyanis ha lefuttatunk egy programot nagyobb skálán és csak kisebb részét szeretnénk megvizsgálni anélkül, hogy új ablakot nyitnánk, akkor az ábra kinagyítása kicsit nehézkes. A program hibái azonban elhanyagolhatók a sokoldalúsága mellett és annak fényében, hogy ingyenesen letölthető.

II. A Lorenz-féle alacsonyrendű léghővezési modell attraktorai

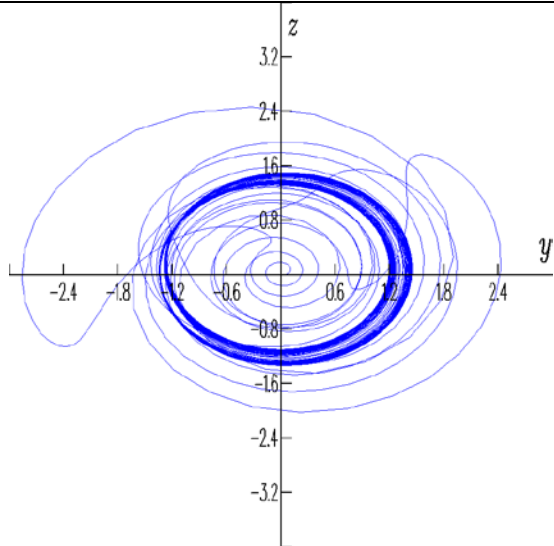
A Lorenz-féle alacsonyrendű léghővezési modell attraktorai változó G paraméterértékekénél, különböző nézetekből. A G paraméterek az 5. fejezetben található 17. ábrán nyíllal jelölt értékek.



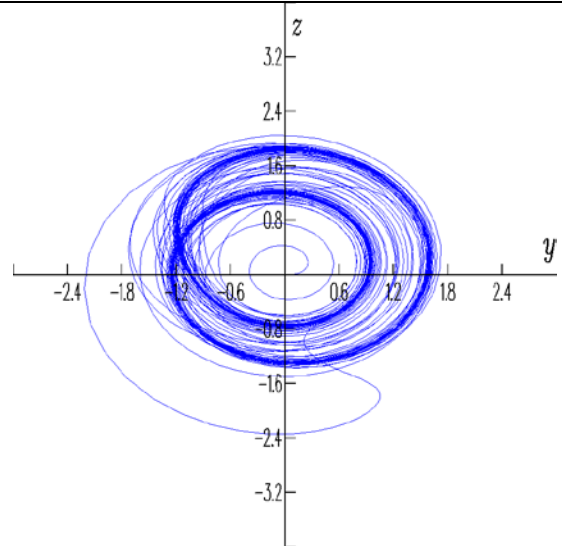
1. függelék: $G=0,2$; (a)



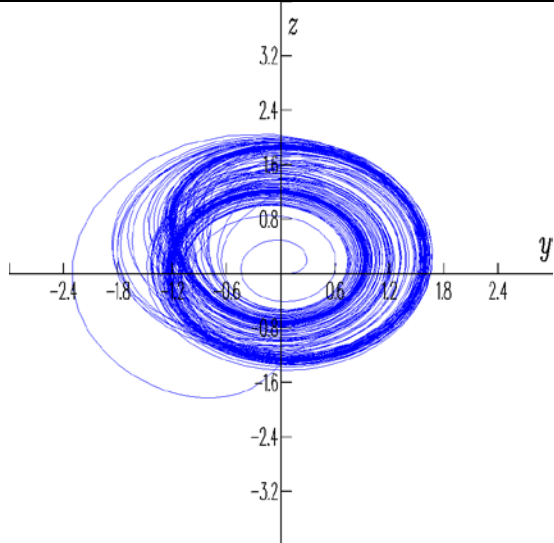
2. függelék: $G=0,27$; (b)



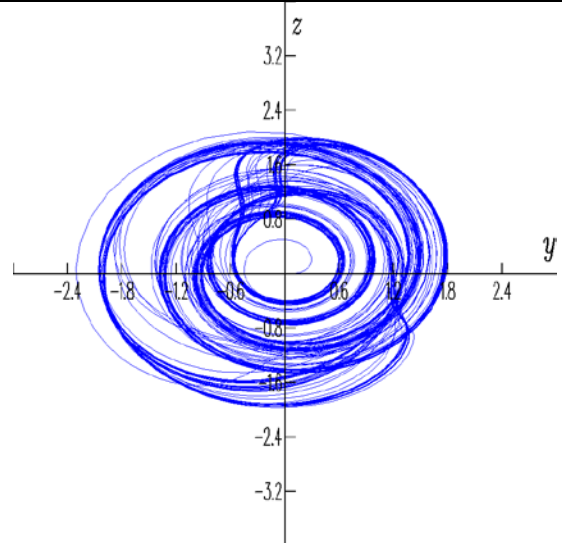
3. függelék: $G=0,3$; (c)



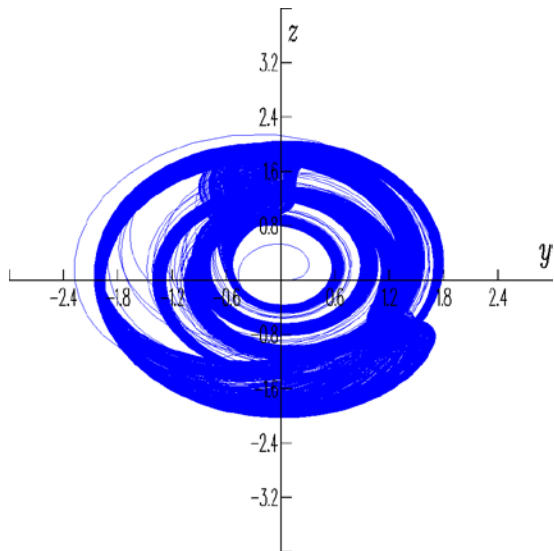
4. függelék: $G=0,7$; (d)



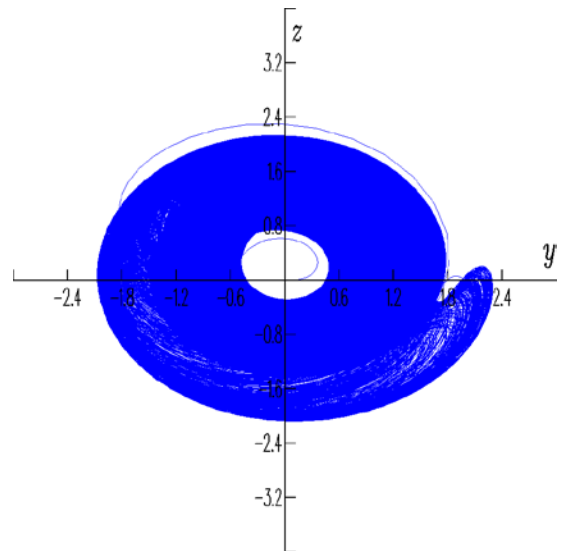
5. függelék: $G=0,8$; (e)



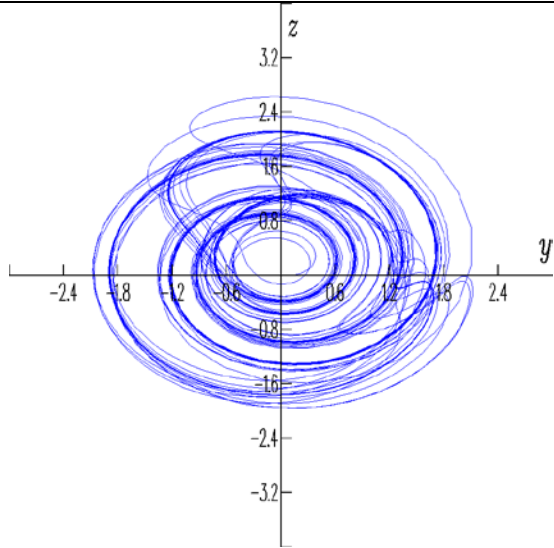
6. függelék: $G=0,82$; (f)



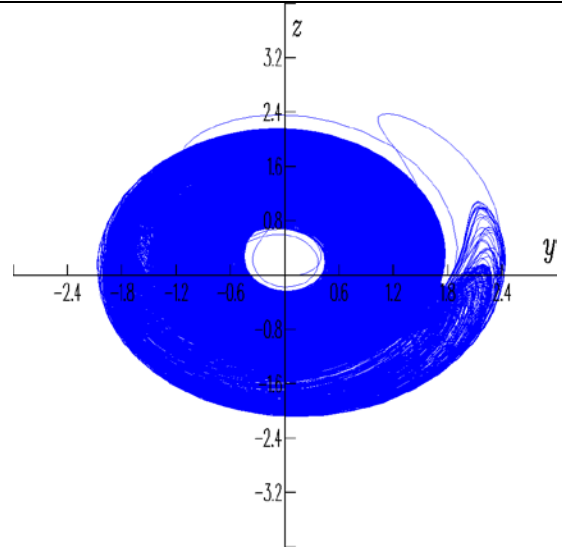
7. függelék: $G=0,86$; (g)



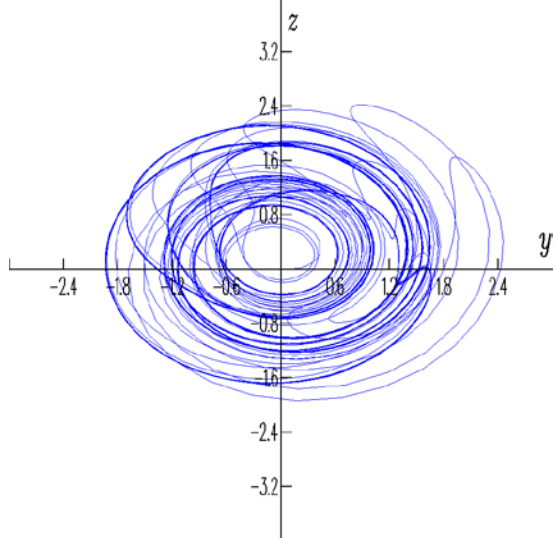
8. függelék: $G=1$; (h)



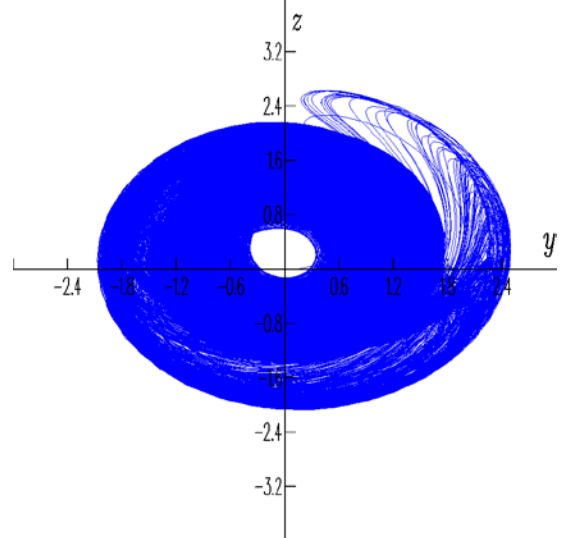
9. függelék: $G=1,056$; (i)



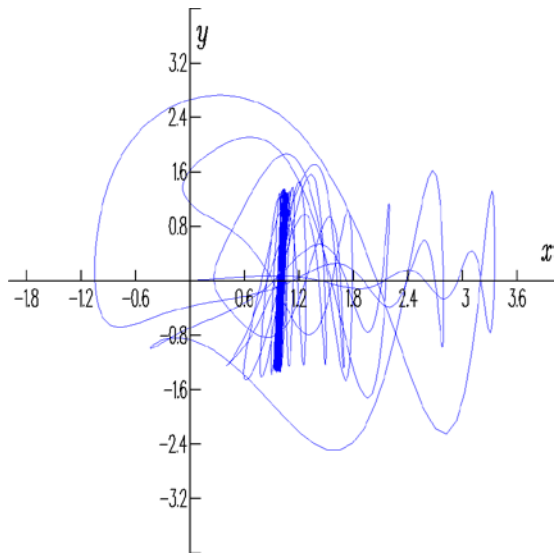
10. függelék: $G=1,1$; (j)



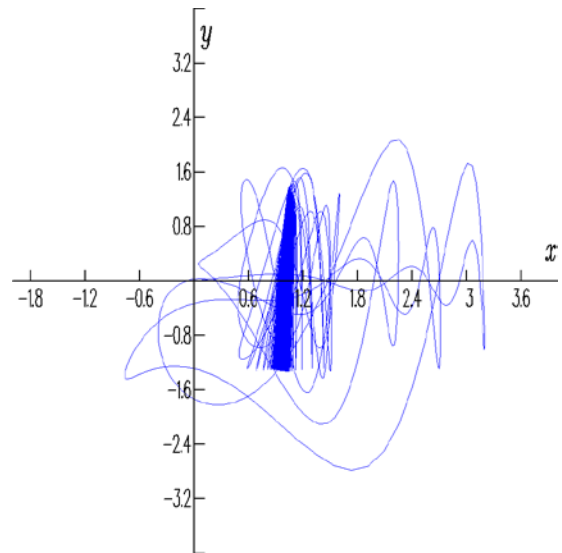
11. függelék: $G=1,2$; (k)



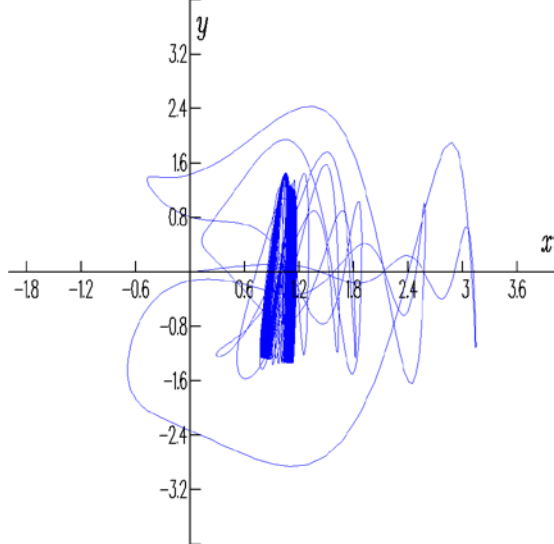
12. függelék: $G=1,3$; (l)



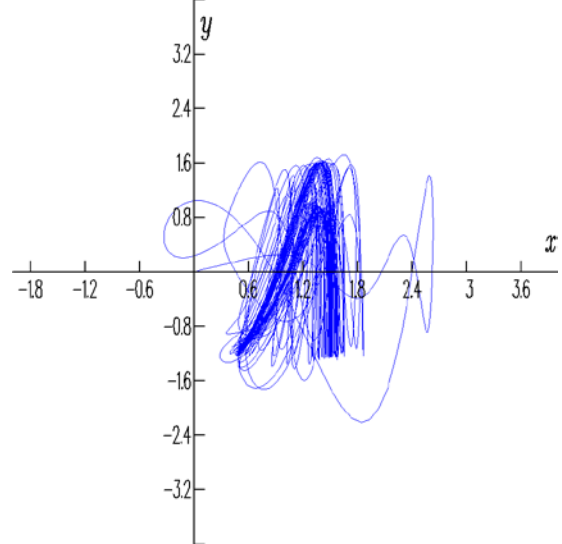
13. függelék: $G=0,2$; (a)



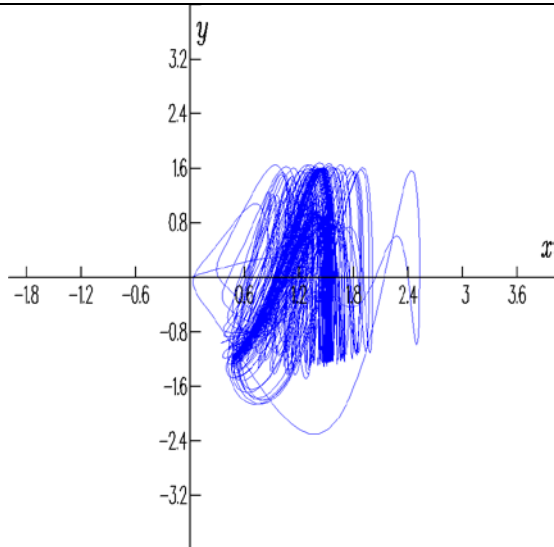
14. függelék: $G=0,27$; (b)



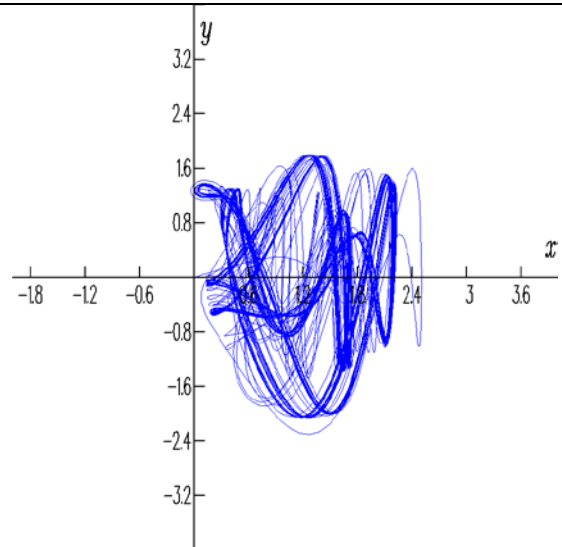
15. függelék: $G=0,3$; (c)



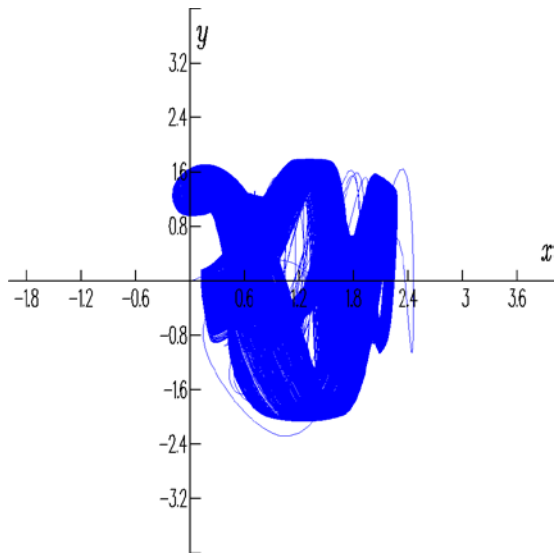
16. függelék: $G=0,7$; (d)



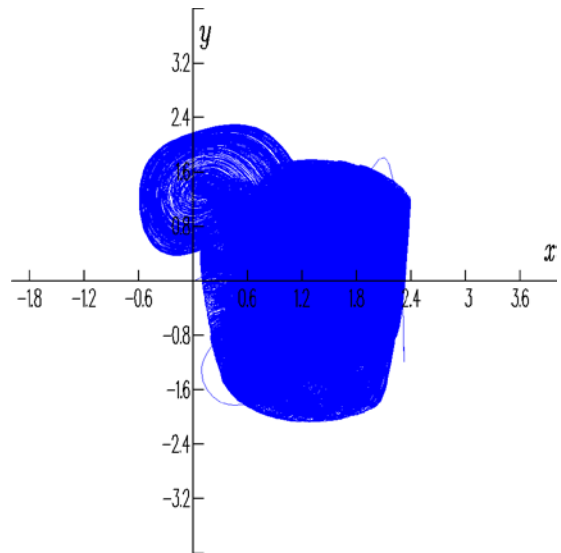
17. függelék: $G=0,8$; (e)



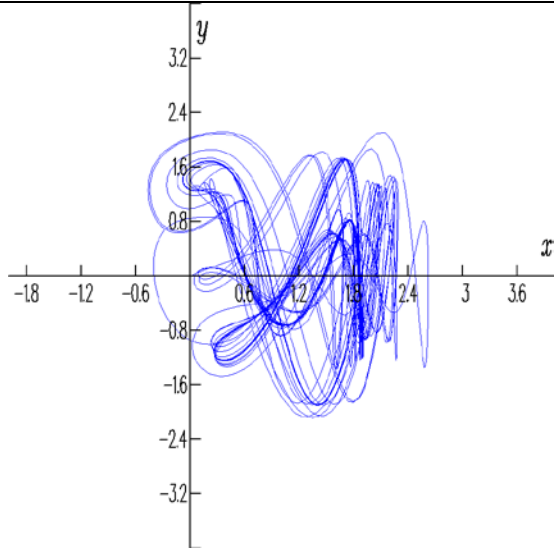
18. függelék: $G=0,82$; (f)



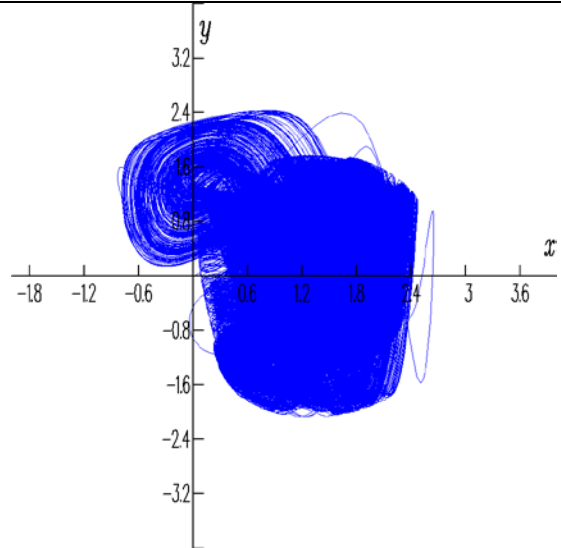
19. függelék: $G=0,86$; (g)



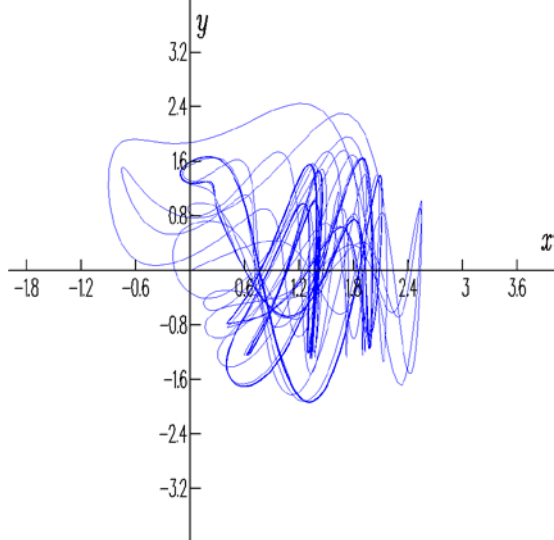
20. függelék: $G=1$; (h)



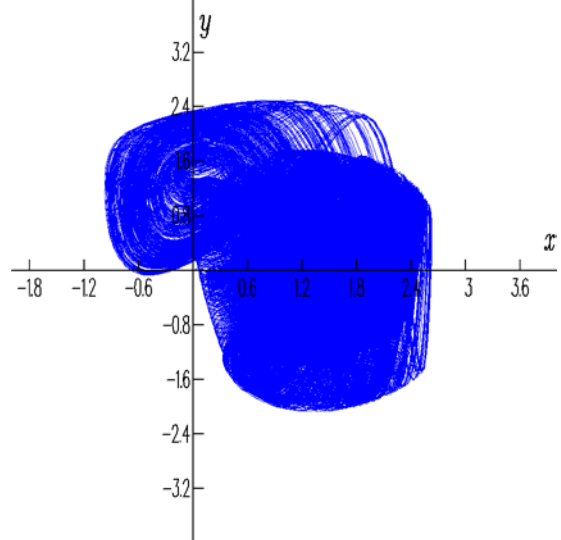
21. függelék: $G=1,056$; (i)



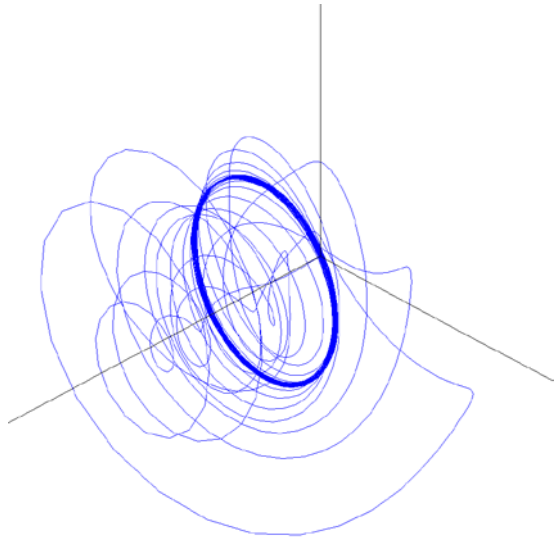
22. függelék: $G=1,1$; (j)



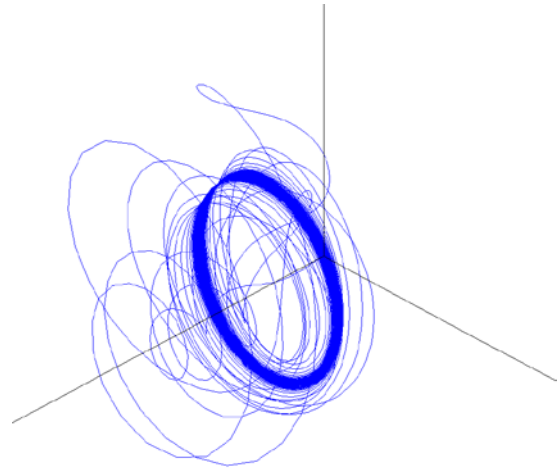
23. függelék: $G=1,2$; (k)



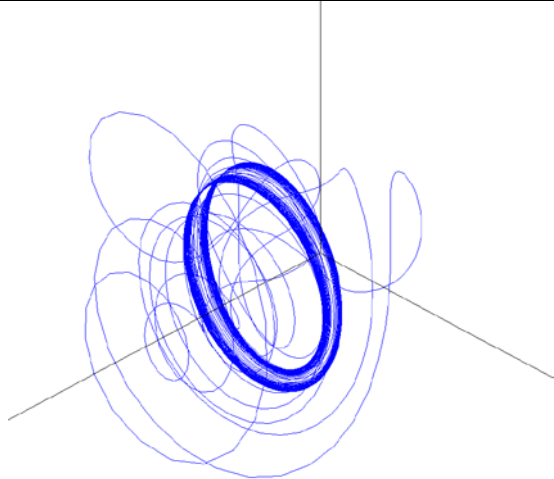
24. függelék: $G=1,3$; (l)



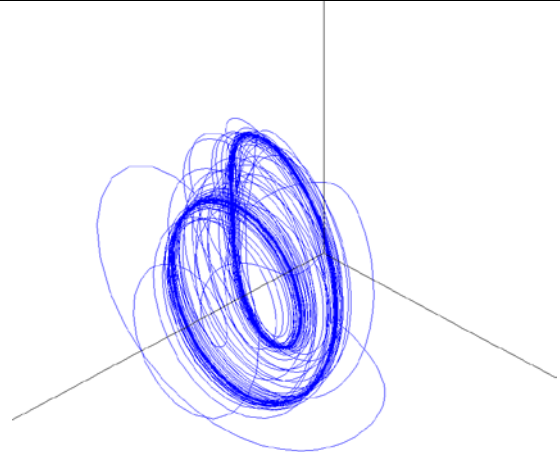
25. függelék: $G=0,2$; (a)



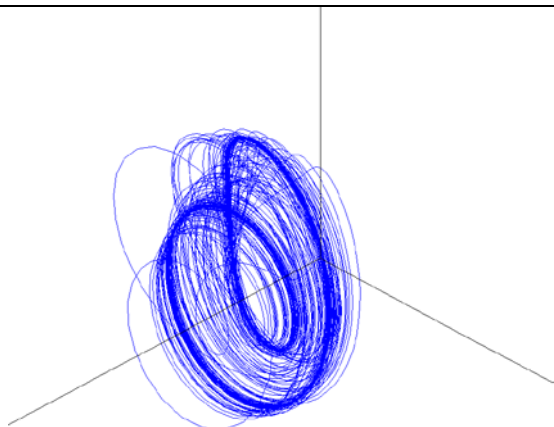
26. függelék: $G=0,27$; (b)



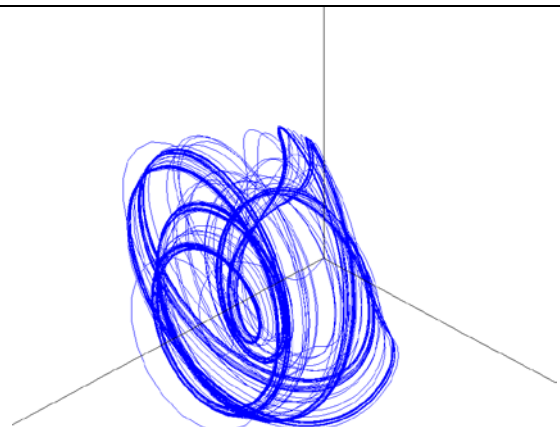
27. függelék: $G=0,3$; (c)



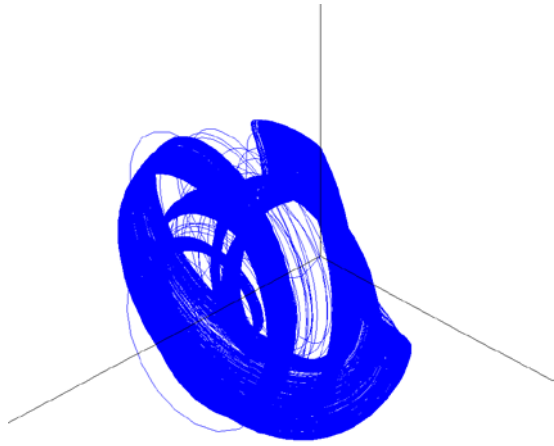
28. függelék: $G=0,7$; (d)



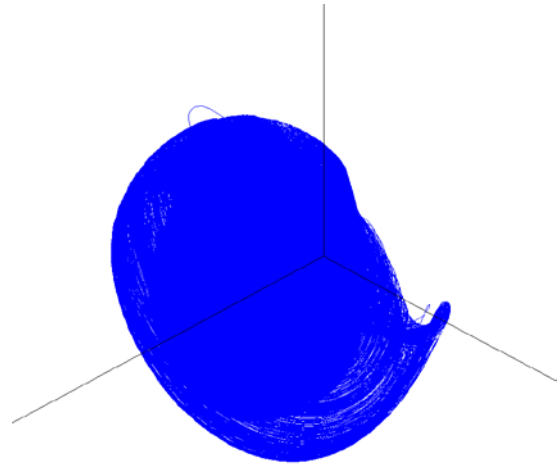
29. függelék: $G=0,8$; (e)



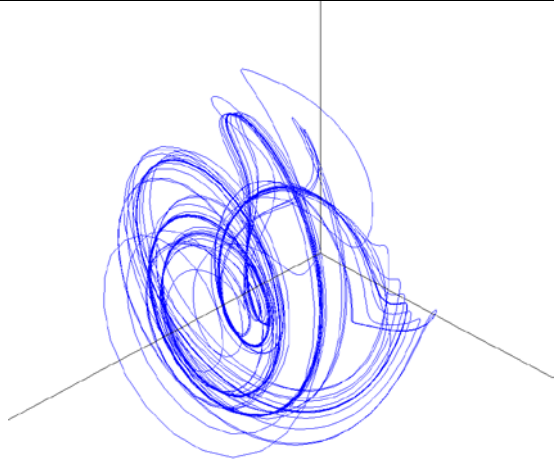
30. függelék: $G=0,82$; (f)



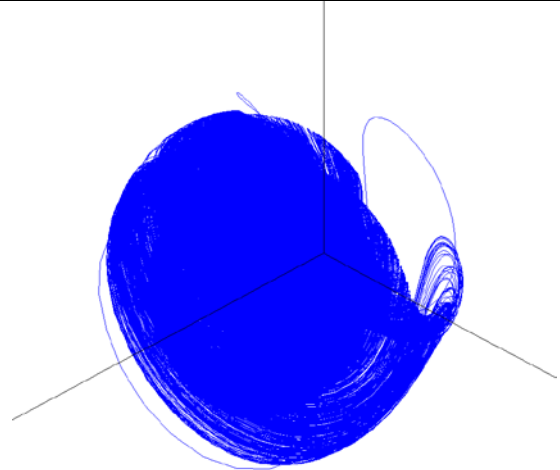
31. függelék: $G=0,86$; (g)



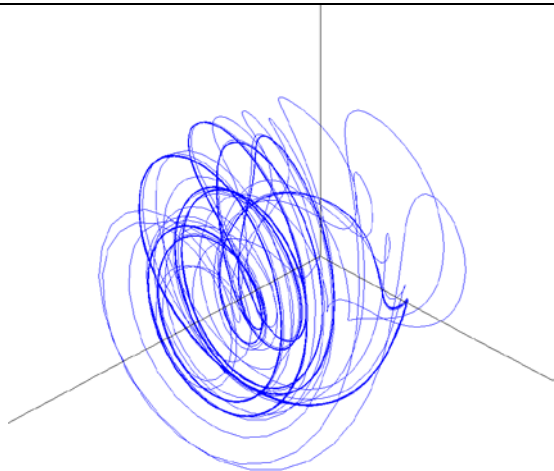
32. függelék: $G=1$; (h)



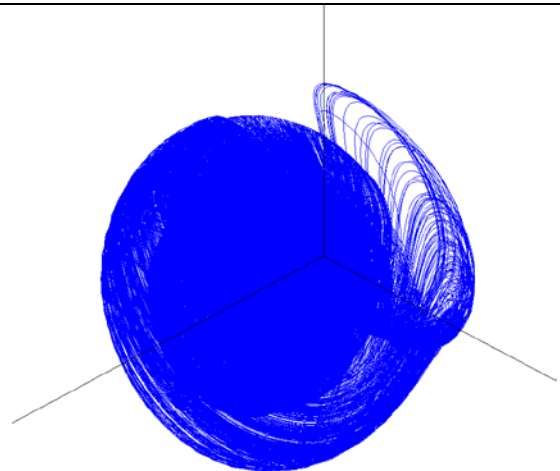
33. függelék: $G=1,056$; (i)



34. függelék: $G=1,1$; (j)



35. függelék: $G=1,2$; (k)



36. függelék: $G=1,3$; (l)