

A parti cirkuláció vizsgálata anticiklonális helyzetben

SZAKDOLGOZAT

FÖLDTUDOMÁNYI ALAPSZAK

METEOROLÓGUS SZAKIRÁNY



Készítette:

Szilágyi Eszter

Témavezetők:

Mona Tamás
dr. Breuer Hajnalka

ELTE TTK, Meteorológiai Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Földrajz- és Földtudományi Intézet

Meteorológiai Tanszék

Budapest, 2015

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés.....	3
2. A parti cirkuláció.....	4
3. Parti cirkulációs vizsgálatok világszerte	6
4. A Balaton parti cirkulációjának vizsgálata.....	9
5. Módszertan, eszközök	14
5.1. Kezdeti mezők létrehozása.....	14
5.2. A hidro-termodinamikai egyenletrendszer (HTER).....	15
5.2.1. Kontinuitási egyenlet.....	15
5.2.2. Termodinamikai egyenlet.....	16
5.2.3. Ideális gáz állapotegyenlete.....	17
5.2.4. Mozgásegyenletek.....	17
5.3 A HTER megoldása véges különbséges módszerekkel.....	18
6. Modellfejlesztés	22
6.1. A modell alapbeállításai	22
6.2. Időderivált séma fejlesztése a modellben.....	22
6.3. Szenzibilis hőcsere folyamatok elhanyagolása	23
6.4. Peremfeltételek.....	23
6.5. Térséma fejlesztése a modellben.....	24
6.6. Stabilitás vizsgálatok.....	24
6.7. Újabb közelítő módszer alkalmazása: a Lax-Wendroff séma	26
7. Eredmények.....	31
8. Konklúzió.....	34
Köszönetnyilvánítás	35
Függelék.....	36
Irodalomjegyzék.....	38

1. Bevezetés

Az általános légköri mezoskálájú folyamatai között léteznek olyan lokális légáramlatok, melyek helyi hatás, vízfelület vagy domborzat következményei. Ilyen a parti cirkuláció jelensége is, ahol a szárazföld és a vízfelszín eltérő mértékű felmelegedése rendezett légmozgást generál. Elsősorban nagy kiterjedésű vízfelszínek (óceánok, tengerek, nagyobb tavak) és szárazföld határán figyelhető meg. Munkám során ennek csak kisebb szegmensével, a tavi cirkulációval szeretnék foglalkozni. Számos hazai szakirodalom foglalkozik a jelenséggel, magyarországi modellezése azonban még nem publikált.

Külföldi parti cirkulációs modellezés sikerein fellelkesülve egy egyszerű, 2 dimenziós balatoni cirkulációs modell építési munkálataihoz láttunk hozzá, mivel a tó felülete elég nagyok bizonyult ahhoz, hogy a légáramlat kifejlődjön rajta (*Péczely, 1962*). A tó hossz tengelyére merőlegesen kijelöltünk egy keresztmetszetet Siófok és Csopak között. A 30 km hosszú keresztmetszet középső harmadát szimmetrikusan a tó felszíne borítja. Erre a kétdimenziós mezőre a hidro-termodinamikai egyenletrendszert nem-hidrosztatikus közelítéssel, száraz légkört feltételezve, egyre bonyolultabb numerikus módszerekkel oldottuk meg.

Ahhoz, hogy egy tónak önálló cirkulációs rendszere alakulhasson ki, derült, besugárzásban gazdag, nyugodt légállapotra van szükség. Ez tipikusan anticiklonális helyzetre jellemző, így munkám során egy ilyen típusú nyári napra vonatkozóan vizsgáltam a jelenséget.

Szakdolgozatom célja a parti cirkuláció és annak modellezésével kapcsolatos külföldi és hazai publikációk minél szélesebb körű megismerése és rendszerezése. Bemutatom az általunk készített modell struktúráját, a modellegyenletek megoldására szolgáló véges különbséges numerikus módszereket, illetve a Lax-Wendroff advekción séma meteorológiai adaptálásának lehetőségét a modellünkben. Végül dolgozatom a modellfuttatások során kapott eredmények ismertetésével zárom.

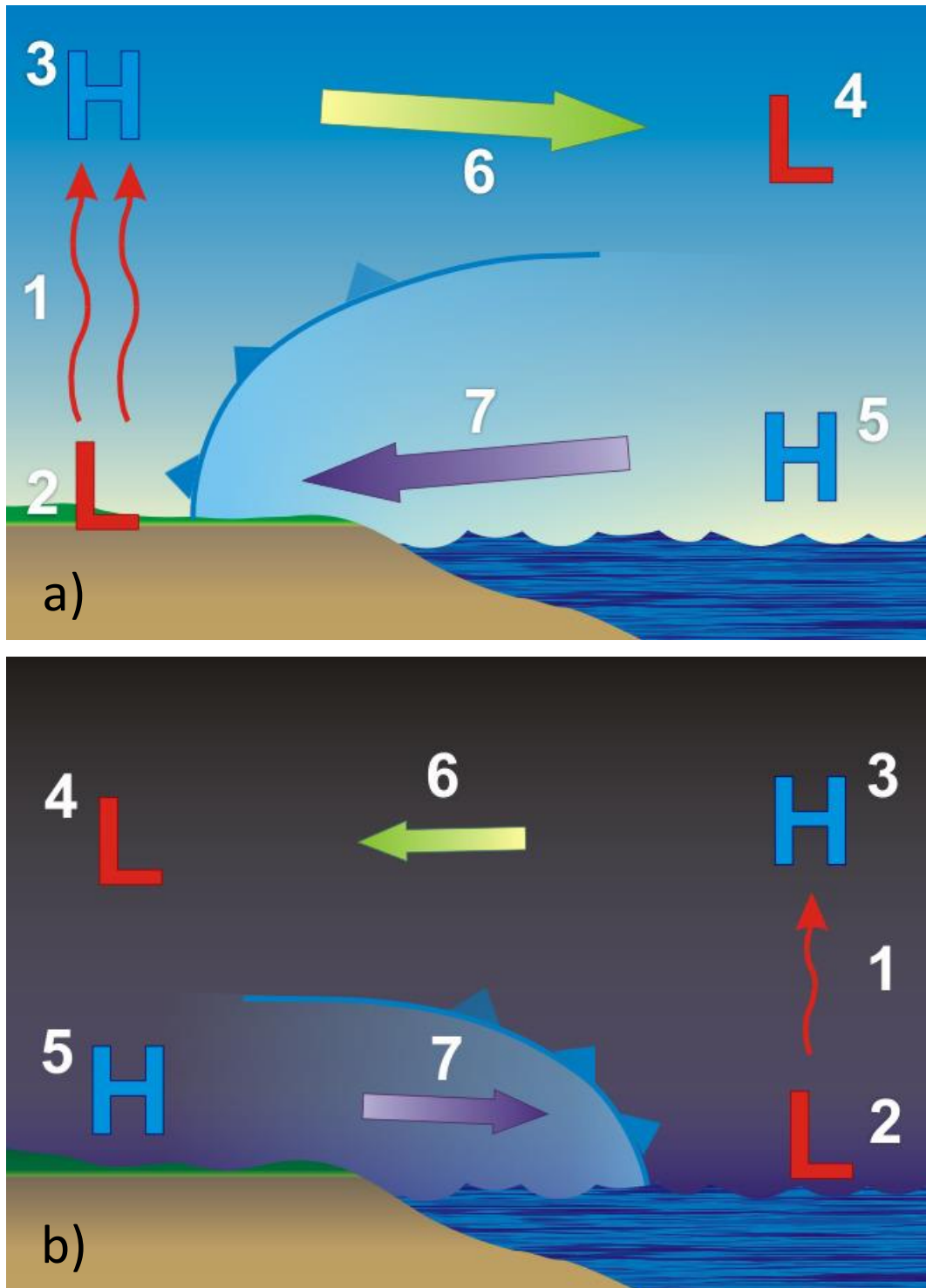
2. A parti cirkuláció

A parti cirkuláció témakörébe sorolható minden víz és szárazföld határán kialakuló szabályos áramlási rendszer, legyen szó tengerek, óceánok, vagy tavak és a szárazföld közötti légcseréről. A parti cirkuláció alapját a part és a víztömeg fölött kialakuló nyomási és hőmérsékleti gradiens képezi. Fontos, hogy ezen áramlat kialakításában további külső hatások nem játszanak markáns szerepet, sőt egy erősen advektív helyzet gátolhatja a jelenség létrejöttét.

A szárazföld és a vízfelszín eltérő mértékben melegszik fel. A beérkező sugárzás egy részét mind a szárazföld, mind a vízfelszín abszorbeálja, majd a felette elhelyezkedő légtömegnek nagyrészt szenzibilis hőáram formájában adja át. A szárazföld felett a szenzibilis hőáram hatására a légréteg felemelkedik és kitágul (1a. ábra - 1), ezáltal a felszálló termik a planetáris határréteg tetejét megemeli. A feláramlás hatására a felszínen légköri anyaghiány (1a. ábra - 2), a magasban légköri anyagfelesleg keletkezik (1a. ábra - 3). A feláramló légtömegnek a planetáris határréteg útját állja, a magasban divergencia következik be. Az eddigi dinamikai folyamat hatására az izobárok a víz irányában megdőlnek. A kialakuló nyomási gradiens a magasban a víz (1a. ábra - 4), míg a felszín közelében a part irányába mutat (1a. ábra - 5). A szétáramlás mind a víz, mind a szárazföld belseje felé végbe megy, de a nyomási gradiens dominánsan erősíti a horizontális mozgásokat a víz irányába (1a. ábra - 6). Az alsó légrétegben fellépő nyomási gradiens által keltett áramlás a víz felszínén légköri anyaghiányt képez. A magasban áramló légréteg hőmérséklete fokozatosan csökken, ezáltal a horizontális áramlás is gyengül. Végül az alsó szinten kialakult hiány pótlására vertikális süllyedésbe megy át. Nem szabad arról sem megfeledkeznünk, hogy a szenzibilis hőáram nem csak a parton, hanem a víz felett is generál feláramlást, ez azonban jóval kisebb mértékű (az eltérő felszíni hőmérsékletek miatt), így a leereszkedő hűvösebb légtömeg elnyomja a feláramlást. A víz felőli légáramlat a part közelébe érkezve fokozatosan melegszik, de ez a melegedés jóval kisebb mértékű, mint a magasban megfigyelhető szárazföldi légáramlat hűlése. Elérve a szárazföldet pótolja az ott keletkezett léghiányt, s ezzel záródik a cirkuláció. A part irányába mozgó hideg légtömeget és a parton feláramló meleg áramlatokat egy frontfelület választja el, az ún. hidegdóm, mely (fél)kupola formájában rajzolódik ki a part és a víz találkozásánál (1a. ábra - 7).

Nappal a szárazföld erőteljesebb felmelegedése lévén a cirkuláció a fentiekben leírt irányba játszódik le. Éjszaka során (1b. ábra) a szárazföldi felszín esetében erőteljesebb

lehűlés mutatkozik, a part felől kezd fújni a szél és egy ellentétes irányú cirkuláció rajzolódik ki.



1. ábra: A parti cirkuláció sematikus ábrája a) nappal, b) éjszaka (a számok jelentése a szövegben megtalálható)

[1 – oceanservice.noaa.gov]

3. Parti cirkulációs vizsgálatok világszerte

A tóhatás okozta cirkulációt külföldi természettudósok több ízben vizsgálták és modellezték Földünk különböző tájegységein. A cirkuláció modellezése csak nagyobb vízfelülettel rendelkező tavakon valósulhat meg. Kisebb tavak esetén nem alakulhatnak ki akkora gradiensek, amelyek rendezett légmozgást tudnának generálni a víz környezetében. Ennek függvényében valósult meg az alábbi tavak cirkulációs vizsgálata.

Az Amerikai Egyesült Államok és Kanada határán helyezkedik el a világ egyik legnagyobb tó-rendszere a Nagy-tavak vidéke (2. ábra). Az öt tavat - Felső-tó, Michigan-tó, Huron-tó, Erie-tó, Ontario-tó - folyók láncolata fűzi fel egységes tó-agregátummá.



2. ábra: A Nagy-tavak (USA, Kanada) elhelyezkedése műholdfelvétel alapján [2 – visibleearth.nasa.gov]

A Felső-tó Földünk legnagyobb területű édesvízi tava, az észak-amerikai tórendszer legmélyebb tagja. A monumentális kiterjedésű (82 413 km²) állóvíz nyári vízfelszíni középhőmérséklete az utóbbi száz évben 3,5°C-al emelkedett. A tó felsőbb rétegeinek hőmérséklet növekedését a jégtakaró hosszú távú csökkenése eredményezi. Az egyaránt emelkedő levegő- és vízfelszín-hőmérsékletek, valamint a levegő és víz közötti hőmérsékleti gradiens csökkenése labilizálja a tó feletti légkört. Ennek köszönhetően a tó feletti szelek sebessége évtizedenként közel 5%-kal növekszik. A Felső-tóra készült cirkuláció numerikus modellje kimutatta, hogy a növekvő szélsőségek a tó áramlási rendszerét is nagyban befolyásolják. (Desai et al., 2009)

A Michigan-tó keleti partszakaszán kialakuló parti szélrendszer fizikai és dinamikai jellemzőinek meghatározását olyan időszakokban végezték, amikor az uralkodó külső

meteorológiai körülmények minimális hatást gyakoroltak a helyi cirkulációra (Moroz, 1967). A tóra elkészített numerikus modellben enyhe part felé tartó légáramlás rajzolódik ki, melynek jelenléte a vízfelszín feletti 1 km-es sávban és a parttól számított 30 km-t meghaladó távolságban is érzékelhető. A tavi széláramon kívül egy jól meghatározott visszaáramlási réteg is megjelenik, mely jóval alacsonyabb sebességű. Megmutatták, hogy a légmozgás iránya ellenkező irányú lehet a tó szemközti partoldalain, legalábbis a felszín közelében.

A tó nyugati partszakaszán 1974 szeptemberében egy klasszikus parti szél cirkulációs celláját tanulmányozták (Keen & Lyons, 1978). A cirkuláció levegő minőségére gyakorolt hatásait vizsgálták. A Nagy-tavak vidékének északi részét ekkor egy nagy kiterjedésű, magas légnyomású rendszer uralta. A felhőmentes és viszonylag hűvös éjszaka erős tavi szelek kialakulásához vezetett. A partról három meteorológiai léggömböt bocsátottak fel. A léggömbök az épp uralkodó szélviszonyoknak megfelelően indultak útnak északkelet felé. Időközben a szélfordulás ellentétes irányú röppályára kényszerítette a ballonokat, így később a felbocsátás helyétől északnyugatra találták meg őket. A Michigan-tó esetében is megállapították a parti cirkuláció fontosságát: meghatározza a Nagy-tavakhoz tartozó régiók helyi klimatikus viszonyait, hatással van a vízfelszín párolgására és a felhőzet mennyiségére, befolyásolja a tó vizének cirkulációját, illetve, a helyi szélrendszer transzportjával a környező iparvárosok szennyezőanyagait visszaáramlanak a tó térségébe.

Az öt nagy tó közül a legkisebb vízfelszínnel és legalacsonyabb tengerszint feletti magassággal (75 m) rendelkező tó az Ontario-tó. A tóra felállított cirkulációs modell a tavi széljárás megfigyelési adatain alapszik, melyeket speciálisan tervezett felszíni állomásokkal, rögzített léggömbökkel, szondákkal, repülővel és bójjakkal gyűjtöttek be. Ezen kívül végeztek további információ szerzés céljából felhőfotózást és videózást is. Az 1972. október 3-án kialakuló szelet tanulmányozták, mikor egy anticiklon helyezkedett el a tó nyugati oldalán. A kétdimenziós, időfüggő, egyszerű modellt azért hozták létre, hogy azzal szimulálják a megfigyelésen alapuló elemzés eredményeit (Estoque et al., 1976). A numerikus modell egy korábbi, Estoque & Bhumralkar (1969) által leírt kétdimenziós modell módosítása, amiben légnyomás és keverési arány számítására végeztek korrekciót, illetve az orografikus hatásokat is figyelembe vették. A modell számításai alapján a parti cirkuláció a tavon a partvonalától számított 40 km-es körzetre terjed ki. A megfigyelt tavi szél jellemzőit meglehetősen jól reprodukálta a numerikus modell.

Brit-Columbia leghosszabb természetes tava a Babine-tó. Az itt végzett megfigyelések elsősorban nem a parti cirkuláció jelenségére irányultak, sokkal inkább arra, miként

befolyásolják a szélhatások a tó termikus rétegződését (*Farmer & Carmack, 1981*). A vizsgálat során megállapították, hogy valóban fellép a parti cirkuláció a Babine-tavon és a tó dinamikáját illetően jelentős befolyásoló szereppel bír.

A Földközi-tenger keleti medencéje felől a Jordán völgyében találjuk a Kinneret-tavat, mely Izrael legnagyobb, s egyben a Föld legalacsonyabban fekvő (-290 m) édesvízi tava. A 166 km² felületű állóvizet dombok veszik körül, de gyakran így is eléri nagyobb szélviharok, melyek méteres hullámokat korbácsolhatnak a vízfelületen. A Kinneret-tóra készített modell elsődleges célja az volt, hogy jobban megértsék a tavon lejátszódó következő két folyamatot: majdnem minden délután erős olykor viharos szelek fejlődnek ki, valamint a tavon keresztül fújó szél sebessége majdnem 50%-os esést mutat egy mindössze 10 km-es távon, mire a nyugati partról a keleti partra átkel (*Alpert et al., 1982*). A tóra felállított modell kétdimenziós, szigma koordináta rendszert alkalmaz. A légáramlatok a Földközi-tengeren fújó szél átalakulásával keletkeznek, mire az nyugati szél formájában megérkezik a tóhoz 13–14 óra tájban. Ez a viszonylag hűvös szél hirtelen tör be a környezeténél melegebb Kinneret-völgybe, míg a nagy intenzitást a dombok dinamikai hatása magyarázza. A fentiek a lejtőszél jelenségét írják le, mely alapján elmondható, hogy nem a parti cirkuláció felelős az intenzívebb légáramlatokért, hanem egy nagyobb skálájú folyamat.

4. A Balaton parti cirkulációjának vizsgálata

Magyarország üdülőkörzetei közül napsütésben leggazdagabb tájegység a Balaton, mely 594 km²-es kiterjedésével Közép-Európa legnagyobb tava. Sekély vizű, tektonikus eredetű tó, mely 77 km-es hosszával és átlagosan 7,8 km-es szélességével elég nagynak bizonyult ahhoz, hogy derült, anticiklonális helyzetben a szárazföld és a víztömeg felett rendezett légáramlás alakuljon ki. A Balaton térségében előforduló parti szelet már régebb óta vizsgálják, főként a vitorlások számára ismeretes jelenség. A XX. század első felében indultak meg a Balaton szélklímájára vonatkozó vizsgálatok, melyek nem kifejezetten a cirkulációs rendszer létezésére irányultak. Életbiztonság szempontjából elsőrendűnek a viharok előrejelzését tekintették, mivel a térségben élő emberek életét gyakran megkeserítették a hegyekből a tóra lecsapó szélviharok. A vízfelszínen felkorbácsolt gyakran méteres hullámok veszélyt jelentettek mind a Balatont övező települések lakosságára, mind a vitorlázókra. A kezdetleges műszertechnika és viharjelzési kísérletek gyakran nem bizonyultak elégségesnek egy vihar előrejelzésére.

A Siófoki Viharjelző Observatórium munkatársai immáron 80 éve látják el ezt a feladatot. A numerikus előrejelzéseket 90%-os beválási mutatóval (*Bartha, 2008*) készítik és adják ki a viharjelzéseket, miközben a parton 25 fényjelző (*Bartha, 2008*), a kiemelt fürdőhelyeken pedig további 10 mobil fényjelző tájékoztatja a lakosságot a vihar közeledtéről. Kétségtől a legfontosabb feladat a tóra lecsapó szélviharok előrejelzése, de vannak más jellegű kutatási feladatok, melyek szintén a balatoni szélviszonyokhoz kapcsolódnak. Nem szabad figyelmen kívül hagyni a balatoni szélcsendes időszakok vizsgálatát sem, melyek legalább annyi kellemetlenséget okozhatnak egy vitorlázó számára, mint egy szélvihar. Azonban ritkán fordulnak elő szélcsendes napok a tavon, a helyi szélhatások átlagosan 2–3 m/s-os légáramlást biztosítanak a térségben (*Czelnai, 1955*).

Az 1950-es éveket megelőzően a Balatonon nem végeztek rendszeres műszeres szélméréseket (*Czelnai, 1963*). A mérések kezdetén feltételezték, hogy a vízfelület és a szárazföld eltérő felmelegedése hatással van a tó térségében kialakuló szélesebbségek és szélirány váltakozására. Fuess-féle szélíróval Siófokon, Keszthelyen és Balatonkenesén végeztek óránkénti szélméréseket anticiklonális helyzetben. A mérések a következő információkat szolgáltatották:

- a Balaton környezetére jellemző széljárás napi menetet követ, továbbá egy éves menet is kirajzolódik,
- a legnagyobb hőmérsékleti gradiens a kora délutáni órákban, 13–14 óra körül alakul ki, csakúgy, mint a szélmaximum,
- az éjszakai órákban egy másodmaximum mérhető, ez azonban kevésbé erőteljes, mivel ekkor a víz és szárazföld között jóval kisebb a hőmérsékletkülönbség, mint a déli órákban,
- napnyugta és napkelte után egy-két órával szélfordulás következik be, éppen amikor a szélsébségek minimálisak.

Az '50-es évek vizsgálatait újabb és újabb megfigyelések követték. A sűrűbb megfigyelő hálózat kiépítése gyakoribb szélregisztrációt hozott magával, mely a kialakuló helyi szélrendszer részletesebb szemügyre vételét tette lehetővé. Siófokon, Balatonkenesén, Balatonfüreden és Csepelen végzett vizsgálat során a következő kérdésekre keresték a választ a hazai meteorológusok:

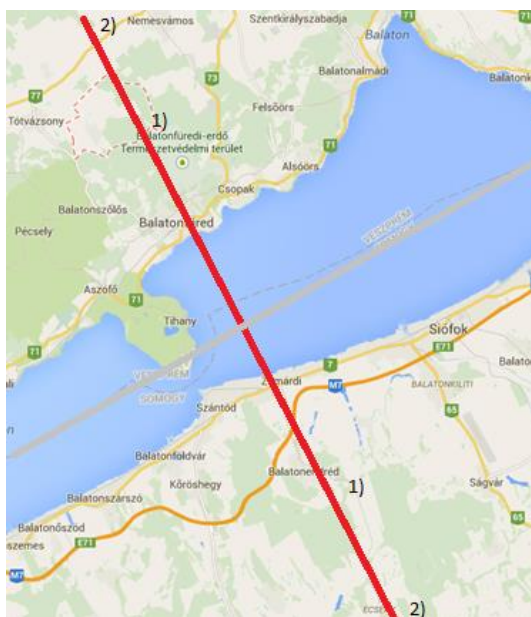
1. Milyen gyakorisággal fejlődik ki a parti cirkuláció a Balaton térségében?
2. Milyen a horizontális kiterjedése, mekkora távolságban érezteti hatását?
3. Mekkora a függőleges kiterjedése, milyen magasságig van jelen?

Öt nyári időszak 7, 14 és 21 órai méréseiből származó adatait hasonlították össze és három csoportba sorolták be őket annak megfelelően, hogy a cirkuláció melyik ága alakult ki az adott időintervallumban (1. táblázat). Azt mondjuk, hogy a helyi cirkuláció mindkét ága kifejlődött, ha 14 órakor a víz irányából fúj a szél, míg 21 órakor már a szárazföld felől és a szélfordulás meghaladta a 45°-ot mindhárom állomáson. A helyi cirkulációnak a nappali ága fejlődött ki, ha mindhárom állomáson a tó irányából fúj a szél 14 órakor. Ha egyik feltétel sem teljesült, akkor az adott napot a 3. kategóriába sorolták. A kategorizálásnál csak azokat a napokat vették figyelembe, mikor mindhárom állomásra kiterjedt a tóhatás, kizárva azokat a helyzeteket, mikor a mezoskálájú folyamatok elnyomták a Balaton által keltett légáramlást. A nyári hónapok során átlagosan 4 alkalommal fejlődött ki a cirkuláció nappali és éjszakai ága és minden negyedik-ötödik nap lehetett számítani a vízi szél kialakulására. Az 1957 és 1961 közötti szeptemberi hónapok anticiklonális helyzetben igencsak bővelkedtek. Ekkor négynaponta mindkét ág, a nappali ág pedig 33% relatív gyakorisággal kifejlődött (Péczely, 1962).

	április	május	június	július	augusztus	szeptember
a helyi cirkuláció mindkét ága kifejlődött	9	15	13	13	14	25
a helyi cirkuláció nappali ága fejlődött ki	19	21	21	21	17	33
a helyi cirkuláció egyik ága sem fejlődött ki	81	79	79	79	83	67

1. táblázat: A Balatonon kialakuló cirkuláció típusainak előfordulási gyakorisága az 1957–1961 időszakban (Pécely, 1962)

A második kérdés a cirkuláció horizontális kiterjedésére keresi a választ. A Balaton hossz tengelyére merőlegesen 4 kiválasztott település mentén folytak a vizsgálatok (3. ábra). Balatonendréd és Hidegkút a parttól 6–7 km-re eső körzetben (1), míg Lulla és Kövesgyűr a víztől 11–12 km-re eső (2) sávot jellemezték.



3. ábra: Cirkuláció intenzitás vizsgálta a parttól 6–7 km-re (1) és 11–12 km-re (2) fekvő körzetekben
1) Hidegkút (északi part), Balatonendréd (déli part)
2) Kövesgyűr (északi part), Lulla (déli part)

[3 – maps.google.com]

Amikor a cirkuláció legerősebb (13–14 óra), az áprilistól októberig terjedő időszakban 59 alkalommal regisztráltak vízi szelet. Az esetek közül 34 alkalommal ($\approx 60\%$) a víz felől fújó légáramlás csak a parti zónában volt kimutatható. 18 esetben mindkét parton a 6–7 km-ig húzódó sávban (1) érzékeltek légmozgást, míg a maradék 7 esetben mindkét parton legalább 11–12 km távolságig észlelhető volt a jelenség. Ez alapján mondható, hogy a vizsgált időszakok 60%-ában a cirkuláció gyengébb mértékű, s ekkor a part közvetlen környezetébe terjed ki, míg 8–10% mindössze, amikor intenzívebb cirkuláció révén a víztől távolabb fekvő településeken is érezteti hatását, legyőzve a fellépő általános áramlást.

A műszeres mérések már nem csak a felszín közeli szelekre fordították a figyelmet. A Balaton által keltett helyi légmozgás függőleges kiterjedését 7 Balaton parti város (2 déli, 5 északi parti) magassági szélmérései alapján vizsgálták. Mivel többnyire a nappali órákban volt pilotozás, így csak a cirkuláció nappali ágának vizsgálatára nyílt lehetőség. A Siófoki Viharjelző Observatórium magassági szélmérései megmutatták, hogy nappal a vízi szél az alsó néhány 100 méteres rétegben érezteti hatását, míg 500 méteren már a part felől fúj, az alsó légrétegben kialakuló levegőhiány pótlására. 1,5 km-es magasságban a szélvektorok a partvonallal párhuzamosan DNy-i irányba állnak be, majd 2000 m-en az Ekman-spirál jelensége már Ny-ÉNy-i irányba fordítja őket. Összességében a balatoni szélrendszer függőleges kiterjedését 1500 méterre becsülhetjük (*Péczely, 1961*).

Miután megismerkedtünk a parti cirkuláció horizontális és vertikális kiterjedésével a tó közvetlen part menti sávjaiban uralkodó szélviszonyokra szeretnék kitérni. Az ismertetéshez két nyári szezon (1982–83.) széladatait használtam fel (*Ambrózy & Papp, 1987*). A mérések megmutatták, hogy az átlagos szélesség a déli parton mindenhol meghaladta az északi parton mért sebességértékeket. Erős északi légáramlat esetén, a déli parton sokkal erősebb szelek fújhatnak, mint az északi parton, hiszen a nyílt víztükör lehetőséget biztosít a szélnek a felgyorsulására. A helyi szélre jellemző napi járás minden állomáson megfigyelhető volt (reggeli minimum, kora délutáni maximum). Kísérletet tettek szélirány-gyakoriság napi menetének leírására is, ezért 8 településre vonatkozóan szélrózsákat készítettek. A nappali órákban állomásonként eltérő szélirány volt uralkodó, míg az éjszakai, hajnali órákat ábrázoló széleloszlás hasonlóságot mutatott. Az északi parton napközben főként délies szelek a jellemzőek, ezzel szemben a déli parton az északias szelek vannak túlsúlyban. Az északi parton KDK-NyDNy irányok közti szeleket víz felőli szélnek, míg a déli parton ugyanezeket szárazföld felőli szélnek tekintjük. Jellemző a délies prefrontális szél nappali megerősödése, mely a parti cirkulációt jelentősen elnyomhatja. A DK-i irányhoz tartoztak a leggyengébb szelek, s ez a szélirány eloszlás megosztja a parti

településeket. A DNy-i komponenst vizsgálva a szélirány viszonylag nagy szórást mutat az egyes állomások esetében. A Balaton partján a szélirányeloszlás tehát igen nagy szórást mutat. Ennek mértéke az északi parton a Badacsony térségében a legnagyobb, ami elsősorban a tavi cirkuláció jelenléte mellett a domborzati viszonyokkal magyarázható. Olyan esetben, mikor a Balaton partján tartósan 10 m/s feletti szelek fújnak, a parti cirkuláció hatása eltűnik és kirajzolódik a szélvektorok izobárokkal párhuzamos iránya.

Ahogy már korábban említettem, a parti cirkuláció kialakulásának fő oka a szárazföld és a vízfelszín hő- és energiaháztartásában megnyilvánuló különbségek. Erre alapozva 1962 júliusa és októbere között Siófokon hőmérsékleti méréseket végeztek (*Endrődi & Götz, 1964*). Azokat az eseteket vizsgálták, mikor a felhőzet, csapadék, szél és egyéb időjárási állapothatározók nem befolyásolták az időjárást, túlnyomórészt csak sugárzási viszonyok uralkodtak. A szárazföld napi hőmérsékletmenetében sokkal nagyobb ingás következett be, mint a víz esetében. A parti állomáson a legnagyobb napi hőmérséklet különbséget októberben, a legkisebb értékeket júliusban mérték. A tó hőmérséklete pont ellentétes statisztikát mutatott. A vízfelszínen, valamint a vízfelszín felett 1 m-re elhelyezett mérőállomáson a hőmérséklet napi ingása augusztusban volt a legnagyobb és októberben volt a legkisebb. A maximális hőmérsékleti érték kirajzolódás a nap járásától függően évszakosan más-más időpontban következik be mindkét esetben, de szem előtt kell tartani, hogy a napi menetek alakulásában befolyásoló tényező lehet a konvekció kialakulása, valamint a reggeli órákra jellemző talajközeli inverzió jelensége.

Ha összehasonlítjuk a légtömegek hőmérsékletét, megállapíthatjuk, hogy a szárazföldi-vízi állomás között a különbség délelőtt, mikor legintenzívebb a felmelegedés, valamint a hajnali órákban a legnagyobb. Továbbá a léghőmérséklettel szemben a vízhőmérséklet jóval kiegyenlítettebb. Októberben kora délután a vízhőmérséklet csupán 1–2 fokkal marad el a felette tartózkodó levegő hőmérsékletétől, míg az esti órákban már a vízben mérhetőek a magasabb értékek.

5. Módszertan, eszközök

5.1. Kezdeti mezők létrehozása

A parti cirkulációval foglalkozó külföldi és a magyar szakirodalom áttekintését követően a balatoni cirkuláció modellezését tűztem ki célul. Egy egyszerűsített, kétdimenziós, nem-hidrosztatikus modell létrehozása volt a cél, C program nyelven. A jellegzetes cirkuláció kialakulását elősegítve anticiklonális napra vizsgáldtunk.

A Balaton hossz tengelyére merőlegesen egy Siófokot Csopakkal összekötő szakaszt jelöltünk ki. A szakasz mentén egy y-z keresztmetszet kialakítására került sor, ahol y az észak-déli irányítottságú, horizontális (30 km), z a vertikális kiterjedést jelöli (10 km). A kezdeti mező elkészítése során erre a keresztmetszetre egy M x N rácspontból álló gridet definiáltunk. A felállított rácsot horizontálisan 3 részre tagoltuk: északi part, Balaton, déli part. A tömbünket azért tagoltuk 3 területre, hogy későbbiekben az egyes részeket alkotó rácspontok számát könnyen tudjuk változtatni. Referenciaként 100-100 rácsponttal dolgoztunk és mindvégig ekvidisztáns rácsot használva. A horizontális (dy) és a vertikális lépésköz (dz), a rácspontok száma alapján 100-100 méternek adódik.

Elsődlegesen egy stabil, álló légréteget szeretnénk volna kialakítani. Ennek megfelelően a kezdeti hőmérsékleti értékeket a felszínen úgy állítottuk be, hogy a szárazföldek felszíni hőmérsékletei megegyezzenek, továbbá meghaladják a vízfelszín hőmérsékletét. A hőmérséklet magasság függését a száraz-adiabatikus hőmérsékleti gradiens ($\gamma=1^\circ\text{C}/100\text{m}$) segítségével számítottuk ki.

A hőmérsékletet követően a nyomás és a sűrűség inicializálása következett, melyet három fő lépéssel hajtottunk végre. A nyomási mező kezdeti értékeit egy anticiklonális napon (2013.08.07., 12 UTC) Pestszentlőrincen végzett ballonfelszállás nyomási adataiból határoztuk meg. A magassággal bekövetkező nyomáscsökkenés egy exponenciális görbét rajzol ki, így egy exponenciális görbét leíró függvényt illesztettünk a GNU PLOT segítségével a felszállási adatokra:

$$f(z) = a \cdot e^{bz} + c \quad (1)$$

Az illesztés eredményeképpen az együtthatók: $a=1026,17$ hPa, $b=-0,000123105$ és $c=1,00501 \cdot 10^{-30}$ hPa. Az illesztés hibája a felszín közelében a legnagyobb, a teljes légoszlopra átlagosan 7,52971 hPa, szórása kb. 57 hPa.

A teljes mezőre kiterjesztve az eljárás első lépése során a valódi légkörrel közel megegyező kezdeti mezőt kaptunk, homogén nyomási értékekkel.

A sűrűségi értékek származtatása az első légoszlopra a hőmérséklet (T) és a homogén nyomás (p) segítségével valósult meg, az ideális gáz száraz légkörre vonatkozó állapotegyenlete alapján:

$$\rho = \frac{p}{R_d T} \quad (2)$$

ahol T : hőmérséklet [K],

p : nyomás [Pa],

$R_d = 287 \frac{\text{J}}{\text{kgK}}$; a száraz levegőre vonatkoztatott specifikus gázállandó,

ρ : légsűrűség $\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right]$.

Harmadik lépésként, annak érdekében, hogy a nyomás ne legyen homogén, vertikális szintenként az y tengely mentén állandó sűrűséget feltételeztünk. A sűrűségi értékek ismeretében a nyomási értékeket az ideális gáz állapotegyenlet segítségével újraszámoltuk, így a kapott nyomási mező a hőmérséklet függvényében már inhomogénné vált.

5.2. A hidro-termodinamikai egyenletrendszer (HTER)

A balatoni cirkulációt jellemző dinamikai folyamatokat a hidro-termodinamikai egyenletrendszeren (Götz & Rákóczi, 1981) keresztül szeretnénk leírni, melynek numerikus megoldásához szükséges változók meghatározása a kezdeti mező felállításánál megtörtént. Számításaink során a légköri nedvességet nem vesszük figyelembe és a hőáramtól is eltekintünk, de a későbbiek folyamán szeretnénk bevonni a modellbe a szenzibilis hőáram, valamint a hődiffúzió jelenségét is. Továbbá, habár a modell térbeli léptéke indokolná, a turbulens átkeveredéstől eltekintünk.

5.2.1. Kontinuitási egyenlet

A kontinuitási egyenlet az anyagmegmaradást fejezi ki, a térrészbe be- és kiáramló légmennyiség egyensúlyát. Általános alakban felírva:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \cdot \mathbf{v}) = 0 \quad (3)$$

Mivel a modellünk csak meridionális és vertikális dimenziókkal rendelkezik, így a Descartes-féle koordináták közül x-től nem függnek az egyenleteink, ezért a sebességvektor $\mathbf{v} = \mathbf{v}(v, w)$ alakú. Így a felhasznált modellegyenlet:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho \frac{\partial v}{\partial y} - \rho \frac{\partial w}{\partial z} - v \frac{\partial \rho}{\partial y} - w \frac{\partial \rho}{\partial z} \quad (4)$$

ahol $v(y, z, t)$ az y irányú sebességkomponens $\left[\frac{m}{s}\right]$,
 $w(y, z, t)$ a z irányú sebességkomponens $\left[\frac{m}{s}\right]$.

5.2.2. Termodinamikai egyenlet

A termodinamikai egyenletet a termodinamika első főtételéből származtatjuk, ahol a hőmennyiség a belső energiaváltozás és a munka függvényeként áll elő:

$$Q = c_v \frac{dT}{dt} + p \frac{d\alpha}{dt} \quad (5)$$

ahol Q : hőmennyiség [J],

$c_v = 718 \frac{J}{kgK}$; a száraz levegő állandó térfogaton vett fajhője,

α : specifikus térfogat $\left[\frac{m^3}{kg}\right]$.

Figyelembe véve, hogy $\alpha = 1/\rho$:

$$Q = c_v \frac{dT}{dt} - \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} \quad (6)$$

A kontinuitási egyenlet (4) alapján:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \mathbf{v} \quad (7)$$

A (6)-os egyenletet átalakítva és (3)-at felhasználva, kifejezhető a hőmérséklet megváltozása:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{Q}{c_v} - \frac{p}{c_v \rho^2} \rho \nabla \mathbf{v} \quad (8)$$

A gradienst kifejezve (8)-ból és a teljes időderiváltat kifejtve, a modellben felhasznált termodinamikai egyenlet:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{Q}{c_v} - \frac{p}{c_v \rho^2} \left(\rho \frac{\partial v}{\partial y} + \rho \frac{\partial w}{\partial z} \right) - v \frac{\partial T}{\partial y} - w \frac{\partial T}{\partial z} \quad (9)$$

A számítások során a hőközléstől egyelőre eltekintettünk ($Q = 0$).

5.2.3. Ideális gáz állapotegyenlete

Modellezés során a légkört ideális gázként kezeljük, a Van der Waals-egyenlet helyett ezért megelégedtünk az ideális gáz állapotegyenletet használatával a számítások során:

$$p = \rho R_d T \quad (10)$$

5.2.4. Mozgásegyenletek

Ha egy légrézecskeket vizsgálunk, annak mozgását általában 4 erő befolyásolja: a nyomási gradiens erő, a nehézségi erő, a súrlódási erő és a Coriolis-erő. Ennek függvényében az általános mozgásegyenlet az alábbi alakban írható fel:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \underbrace{-\frac{1}{\rho} \nabla p}_{\substack{\text{nyomási} \\ \text{gradiens} \\ \text{erő}}} \underbrace{-2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}}_{\substack{\text{Coriolis} \\ \text{-erő}}} + \underbrace{+\mathbf{g}}_{\substack{\text{nehézségi} \\ \text{gyorsulás}}} + \underbrace{F_s}_{\substack{\text{súrlódási} \\ \text{erő}}} \quad (11)$$

A képletben szereplő $\boldsymbol{\Omega}$ a Föld forgásának szögsebesség vektora, $\mathbf{g}=(0,0,-g)$ a nehézségi gyorsulás. Jelen esetben a kényszererők hatásától eltekintettünk. A súrlódási erő hatását sem vettük figyelembe – habár felszín közelben vizsgáltuk a légkört –, mivel egyszerű modell építése volt a cél.

A tagok elhanyagolásával (11)-ből nyert és a modellben felhasznált mozgásegyenlet:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \mathbf{g} \quad (12)$$

(12) alapján v és w sebességkomponensekre vonatkozó mozgásegyenletek:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - v\frac{\partial v}{\partial y} - w\frac{\partial v}{\partial z} \quad (13)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g - v\frac{\partial w}{\partial y} - w\frac{\partial w}{\partial z} \quad (14)$$

A kezdeti időlépcsőkben mind a horizontális sebességeket (v), mind a vertikális áramlásokat (w) nullának tekintettük minden rácspontban.

5.3 A HTER megoldása véges különbséges módszerekkel

Az hidro-termodinamikai egyenletrendszernek nincsen analitikus megoldása, ezért explicit közelítő megoldási módszerekhez folyamodtunk. Az egyenletek folytonos állapotváltozóit (v, w, p, ρ, T) először diszkrétizáltuk, erre szolgált az 5.1. részben már ismertett kétdimenziós rács. A modellintegrálást az időtáv dt hosszúságú időlépcsőkre osztásával készítettük el.

Az egyenletekben kétféle differenciál-operátor szerepel, az idő és hely szerinti deriváltak, melyeket az elkészített rácson az alábbi véges különbséges módszerek (Szépszó, 2013) alkalmazásával oldottuk meg.

A térbeli deriváltak közelítését bal oldali illetve középponti sémával végeztük:

Bal oldali séma (elsőrendű):

$$\frac{d\phi}{dx} \approx \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\Delta x} \quad (15)$$

Középponti séma (másodrendű):

$$\frac{d\phi}{dx} \approx \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2\Delta x} \quad (16)$$

ahol ϕ_i az állapotváltozó i -edik rácspontban felvett értéke, és Δx a térbeli rácsávolság a két helyzet között. A sémák elnevezése megmutatja, hogy az állapotváltozó i -edik rácspontban felvett értékéhez milyen pozíciójú rácspontok felhasználása szükséges.

A hidro-termodinamikai egyenletrendszer *időderiváltjainak* közelítésére négy numerikus sémát is alkalmaztunk. Explicit sémákkal dolgoztunk, amely azt jelenti, hogy csak már ismert időlépcsőbeli értékeket használtunk fel egy adott idődifferenciál meghatározásához.

Tegyük fel, hogy a vizsgált jelenség leírható a következő differenciálegyenlet és kezdeti feltétel segítségével:

$$\begin{cases} \frac{d\phi}{dt} = f(\phi, t) \\ \phi(t_0) = \phi_0, \end{cases} \quad (17)$$

ahol $f(\phi, t)$ a jelenséget leíró függvény. Ekkor az állapotváltozó t -edik időpontbeli értékét az alábbi sémák segítségével határozhatjuk meg.

- Az **explicit Euler-séma** ismert értékből, időben előre meghatározza a következő időlépcsőbeli értéket:

$$\phi_{t+1} = \phi_t + f(\phi_t, t) \cdot \Delta t \quad (18)$$

Átrendezés után a folytonos időderivált közelítése:

$$\frac{d\phi}{dt} \approx \frac{\phi_{t+1} - \phi_t}{\Delta t} \quad (19)$$

ahol ϕ_t az állapotváltozó t -edik időpillanatban felvett értéke, Δt pedig az időlépcső.

- **Leapfrog-séma**

A Leapfrog-séma egy másodrendű explicit séma, mely érzékeny a kiindulási feltételekre, ezért két kezdeti feltétel megadására is szükség van. Az egyik feltétel egy triviális kiindulási feltétel: ϕ_0 adott. A másik ϕ_1 meghatározása, amely erősen érzékeny Δt időlépcsőre:

$$\phi_1 = \phi(\Delta t) \quad (20)$$

A kiindulási feltételeket figyelembe véve a Leapfrog séma:

$$\phi_{t+1} = \phi_{t-1} + f(\phi_t, t) \cdot 2\Delta t \quad (21)$$

Amint láthatjuk, a $t+1$ -edik időlépcsőbeli ϕ meghatározásához egy két időlépcsővel korábbi ϕ_{t-1} értékére is szükség van. Az t -edik időlépcsőbeli értéket csak az $f(\phi_t, t)$ függvényen keresztül veszi figyelembe, úgymond „átugorja”. Innen eredeztethető a séma elnevezése is. A sémát csak a második időlépést követően lehet alkalmazni, ezért szükséges a második kezdeti feltétel is.

A felsorolt explicit módszerek közül az Euler-séma elsőrendű, míg a Leapfrog-séma másodrendű, így utóbbi nagyobb pontosságot biztosít a differenciálegyenletek megoldása során.

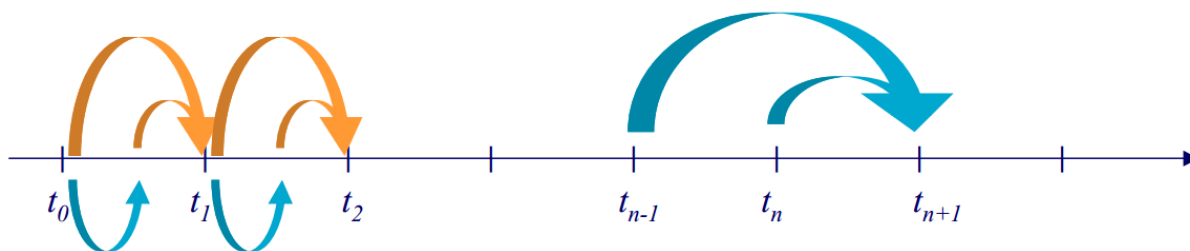
- **Runge-Kutta-módszer**

Az Runge-Kutta módszercsalád (*Butcher, 1964*) legáltalánosabb tagját, a fejezetben Runge-Kutta módszerként említjük. Tekintsük itt is (17) kezdeti érték problémát. A séma megoldásához egy *Euler segédlépést* (22) használunk, amely feleket lép az időlépcsőben:

$$\phi_{t+\frac{1}{2}} = \phi_t + f(\phi_t, t) \cdot \frac{\Delta t}{2} \quad (22)$$

$$\phi_{t+1} = \phi_t + f(\phi_{t+\frac{1}{2}}, t + \frac{1}{2}) \cdot \Delta t \quad (23)$$

A Runge-Kutta módszer a Leapfrog-sémától abban különbözik, hogy a segédlépés a következő időlépcsőben felhasználásra kerül (4. ábra).



4. ábra. Runge-Kutta (bal oldali rész) és a Leapfrog (jobb oldali rész) módszer szemantikus megjelenítése (Szépszó, 2013).

A Runge-Kutta módszerek leggyakrabban használatos tagja a negyedrendű Runge-Kutta, melynek elnevezése abból adódik, hogy minél kisebb lépésközzel számolunk, a hibára adott becslés a lépésköz negyedik hatványával zsugorodik. Ezt alkalmazva a következő összefüggésekből kapjuk:

$$\phi_{t+1} = \phi_t + \frac{a_t + 2b_t + 2c_t + d_t}{6} \cdot \Delta t, \quad (24)$$

ahol

$$a_t = f(\phi_t, t) \quad (25)$$

$$b_t = f\left(\phi_t + \frac{1}{2}\Delta t \cdot a_t, t + \frac{1}{2}\Delta t\right) \quad (26)$$

$$c_t = f\left(\phi_t + \frac{1}{2}\Delta t \cdot b_t, t + \frac{1}{2}\Delta t\right) \quad (27)$$

$$d_t = f(\phi_t + \Delta t \cdot c_t, t + \Delta t) \quad (28)$$

Az a_t kiszámítása még explicit módon megy végbe, d_t értékét már implicit módon határozzuk meg az előzetes lépéseknek köszönhetően.

6. Modellfejlesztés

6.1. A modell alapbeállításai

Véges különbséges megoldási módszerekkel kapcsolatban elvárjuk, hogy a lehető legpontosabban megközelítsék a folytonos megoldást. Stabilitásról akkor beszélünk, ha egy feladat megoldása folytonosan függ a kiindulási feltételektől. Egy sémát akkor nevezünk stabilnak, ha konzisztens (megadja a folytonos és diszkrét feladat kapcsolatát) és egyben konvergens, tehát a közelítő és pontos megoldás viszonyát is megadja. A stabilitás feltételét megszabja a CFL-kritérium (Courant-Fridrichs-Levy) (30), mely szerint a modell térbeli felbontása, valamint a fellépő legnagyobb terjedési sebességek határt szabnak az időlépcső beállításának [4 – *Weidinger és mtsai*, 2013]:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{c} \quad (30)$$

ahol Δt az időlépcső, Δx a térbeli felbontás, c pedig a közeget jellemző maximális terjedési sebesség.

A modellben, ahogy azt már a módszertani rész elején megemlítettük, 100 méteres lépésközzel dolgoztunk, mind a horizontális (dy), mind a vertikális irányt (dz) tekintve, a 300x100 pixelből álló ekvidisztáns rácson. Úgy gondoltuk, hogy a gradiensek által megindított cirkuláció maximális sebessége a hang terjedési sebességét semmilyen körülmények között nem lépheti át, ezek alapján c -nek $300 \frac{m}{s}$ -os sebességmaximumot határoztunk meg. A (9) egyenletbe visszahelyettesítve ezeket az értékeket, Δt -re 0,3 s-ot kaptunk.

6.2. Időderivált séma fejlesztése a modellben

A modellépítés kezdetén a hidro-termodinamikai egyenletrendszer bal oldali Explicit-Euler-módszerrel oldottuk meg (lásd 5.3. fejezet), mivel ez tűnt a legegyszerűbb explicit módszernek. Határfeltételek felállítása nélkül végeztük el a számításokat. Eleinte az egyenleteket következő sorrendben oldottuk meg: v -ra, majd w -re vonatkozó mozgásegyenletek, kontinuitási egyenlet, termodinamikai egyenlet, végül ideális gáz állapot egyenlet. A modellfutások nem adtak kielégítő eredményt, több helyen gravitációs hullámra

emlékeztető zajok jelentek meg, így további numerikus megoldási módszerekhez folyamodtunk.

A következőleg alkalmazott módszer a Leapfrog-séma volt. Mivel ez az eljárás érzékeny a kezdeti feltételekre (lásd 5.3 fejezet), ezért $\phi_0=0$ és $\phi_1 = 0$ kezdeti feltételeket határoztunk meg (minden η állapothatározó esetében). A modellfutások során az eredményekben nem mutatkozott számottevő javulás az Euleri esethez képest, így a Runge-Kutta-sémát is felhasználtuk az időderiváltak közelítésére. A Runge-Kutta módszer elméleti alapon pontosabb közelítő módszernek mutatkozik, mint az Explicit-Euler, mivel a számítások során egész helyett, csak egy felet lépünk előre az időben. Az általános Runge-Kutta mellett, a modellegyenletekre a negyedrendű Runge-Kutta-t is alkalmaztuk, bízva abban, hogy egyre jobb futtatásokat hajthatunk végre, de az eredményeink ez esetben sem mutattak látványos javulást.

6.3. Szenzibilis hőcsere folyamatok elhanyagolása

Kezdetben az egyenletrendszert még úgy oldottuk meg, hogy szerepelt benne a Q hőmennyiség, mivel esetünkben ez adja meg a szenzibilis hőcsere folyamatokat. Ennek leírása a vártnál bonyolultabbnak bizonyult és mivel egyszerű modell építését tűztük ki célul, a hőközléstől végül eltekintettünk.

6.4. Peremfeltételek

A modell peremfeltételek bevezetését is megkívánta. A jobb és bal oldali peremeken (és részben az alsó határon is) Neumann no-Flux határfeltételt alkalmaztunk (*Casten, 1978*), mely folytonos áramlást tette lehetővé. Mivel a feltétel a következő kritériumot szabja a határokon:

$$\frac{d\phi}{dx} = \text{állandó} \quad (29)$$

ennek köszönhetően az anyagmegmaradás teljesül. Esetünkben ez a következőképpen valósult meg a modellben: az oldalsó szélektől számított első rácspontok értékét a harmadik, míg a második rácspontok értékét a negyedik gridek értékével tettük egyenlővé. A

keresztmetszet felső részén nem alkalmaztunk határfeltételt, engedjük az anyagáram szabad mozgását. Alul lerögzítettük a rendszert és részben határfeltételt is alkalmaztunk, ezáltal itt nem megy végbe sem anyag, sem energiaáramlás. Mivel célunk, hogy állandó felszíni trigger hatására bekövetkező változásokat vizsgáljunk, ezért az alsó határfeltétel a következő volt: a legalsó pixelek értéke értelemszerűen rögzített, ám a második rácspontok értékét már az eggyel feljebb lévőkével tettük egyenlővé. Kivételt jelentett w , mert ennek értékét lefeleztük, hogy ezzel mérsékeljük az alsóhatáron a fel- és leáramlások okozta zavarokat. Nem meglepő módon ez is javulást eredményezett, de még mindig nem bizonyult stabilnak a modell (lásd 6.6.).

A kutatás előrehaladtával a peremfeltételek lecserélésére került sor, mivel a Neumann no-Flux határfeltétel interferenciát okozott a modell peremén.

Az újabb határfeltételek bevezetésekor a rácsháló bal oldalán jobb oldali sémával, a jobb peremen bal oldali sémával közelítettük az egyes rácspontbeli értékeket. A modell alsó rétegeiben konvergáló anyagáramokat konvekcióra kényszerítettük, a felső határfeltételt downwind sémával [5 – pauli.uni-muenster.de] oldottuk meg.

6.5. Térséma fejlesztése a modellben

Eddigiekben a modell bal alsó sarkából indítottuk meg a rácsponti értékek kiszámítását a bal oldali térséma segítségével. Kísérletet tettünk arra, hogy a rácsot másképpen pásztázzuk végig, de ezek a próbálkozások egyáltalán nem vezettek sikerre. Ekkor döntöttünk a térséma leváltása mellett és áttértünk a középponti sémára. Az alábbiakban bemutatásra kerülő eredmények határozottan bizonyítják, hogy a térderiváltak közelítésére alkalmasabb a középponti séma, de még mindig nem teljesíti az elvárt stabilitást.

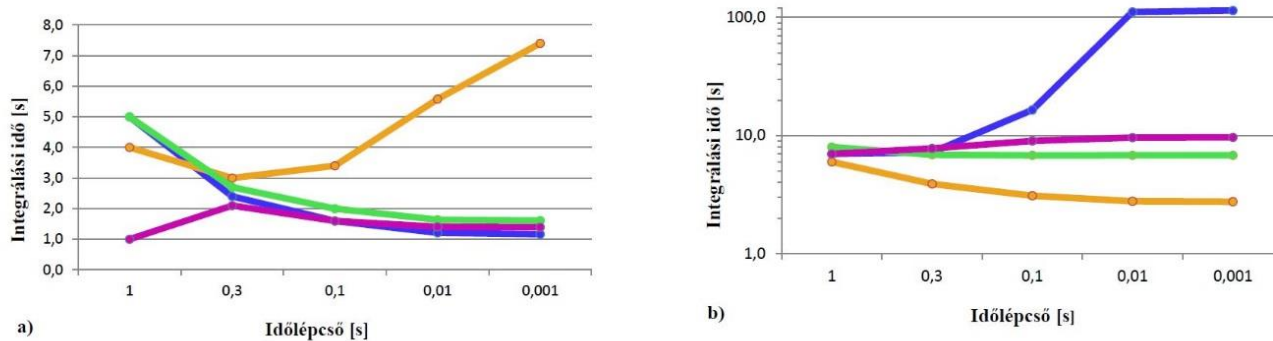
6.6. Stabilitás vizsgálatok

A stabilitás vizsgálat során szeretnénk volna látni, hogy ha különböző időlépcsővel végezzük az integrálásokat (1 s, 0,3 s, 0,1 s, 0,01 s, és 0,001 s), az explicit megoldási módszerek közül, melyik bizonyul a legstabilabbnak. Ahogy azt már a 6.1. részben kifejtettük, a megengedett maximális sebesség sosem haladhatja meg a $300 \frac{m}{s}$ értéket a

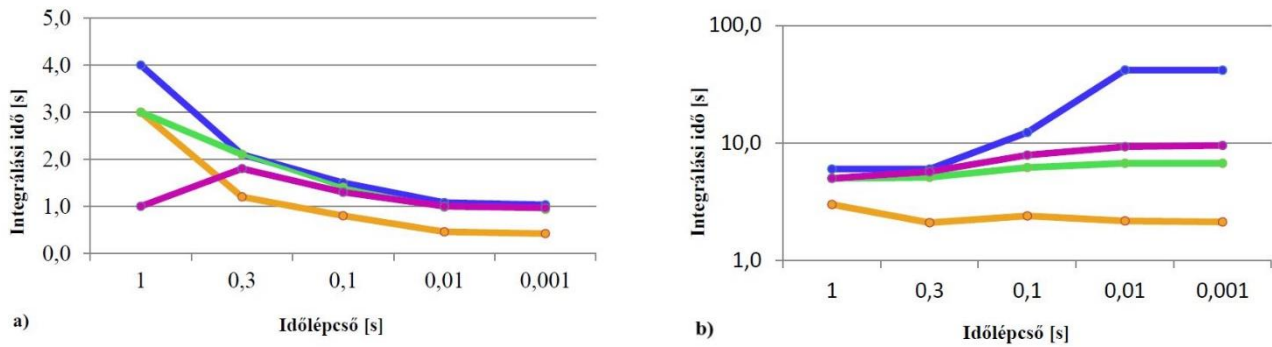
rendszerben. Ezért, ha ilyen értéket kapott a modell a számítás során, akkor automatikusan leállt és kiírta, hogy hány másodpercig tudta kiintegrálni az egyenleteket.

Két esettel próbálkoztunk: az első esetben a hőmérsékleteket úgy állítottuk be, hogy a part és a vízfelszín egyező értékeket vegyenek fel. A futtatásokhoz 298 K-es hőmérsékletet állítottunk be, míg az időlépcsőt változtatva figyeltük a különböző sémák milyen eredményeket adnak. A térbeli sémákat szemlélve láhattuk, hogy a bal oldali sémáról (5-a ábra) középponti sémára (5-b ábra) való áttérés után jobb értékeink születtek. Ugyanezt tapasztaltuk akkor is, ha az északi és a déli part hőmérsékletét 303 K-re, míg a vízfelszín hőmérsékletét 297 K-re állítottuk be (6. ábra). Érdeemes megfigyelni, a modellünk instabilabbá vált annak következtében, hogy megjelent a hőmérsékleti kontraszt a part és víz között.

A vizsgálat nem kielégítő pontossággal adja meg, hogy melyik módszer a legstabilabb. Habár az Explicit-Euler módszer bizonyult vizsgálataink alapján a legjobbnak, mi mégis a továbbiakban a negyedrendű Runge-Kutta módszert tervezzük használni. Ennek oka, hogy az Euler-módszer görbéje kiugróan eltérő menetet mutat a többihez képest (5-a. és 6-a. ábra). Ugyanezen megfontolások alapján a Leapfrog-séma bizonyult a leggyengébbnek, így a későbbiek folyamán ezzel a módszerrel nem kívánunk foglalkozni.



5. ábra: Stabil modell integrálás ideje, a) bal oldali, b) középponti sémát alkalmazva az Explicit-Euler (kék), a Leapfrog (narancs), a Runge-Kutta (zöld) és a negyedrendű Runge-Kutta módszerrel (lila), eltérő időlépcsők mellett; a part és a víz hőmérséklete megegyezik ($T=298$ K).



6. ábra: Stabil modell integrálás ideje, a) bal oldali, b) középponti sémát alkalmazva az Explicit-Euler (kék), a Leapfrog (narancs), a Runge-Kutta (zöld) és a negyedrendű Runge-Kutta módszerrel (lila), eltérő időlépcsők mellett; az északi- és déli-part hőmérséklete 303 K, míg a víz hőmérséklete 297 K.

6.7. Újabb közelítő módszer alkalmazása: a Lax-Wendroff séma

Stabilitásvizsgálat során, a bal oldali és a középponti sémával végzett futtatások nem hozták meg a várt eredményt, így egy újabb térséma bevezetésére került sor. Már korábban észrevettük, hogy a modellben fellépő advekcións áramlások mellett a numerikus diffúzió jelensége is megfigyelhető. A továbbiakban olyan sémát szeretnénk volna a modellbe építeni, amely ennek kiküszöbölését is magában hordozza.

A münsteri egyetem numerikus módszereket ismertető jegyzete a

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (31)$$

advekcións egyenlet megoldásának előállításával foglalkozik [5 – pauli.uni-muenster.de]. A differenciálegyenletek megoldására a Lax-séma felépítését követő Lax-Wendroff sémát alkalmazzák. A Lax-séma kisebb módosítása az **FTCS-sémának** (Forward in Time, Centred in Space):

$$\frac{\phi_i^{t+1} - \phi_i^t}{\Delta t} = -u \frac{\phi_{i+1}^t - \phi_{i-1}^t}{2\Delta x} \Leftrightarrow \phi_i^{t+1} = \phi_i^t - \frac{u\Delta t}{2\Delta x} (\phi_{i+1}^t - \phi_{i-1}^t). \quad (32)$$

A képletben szereplő ϕ_i^t paramétert a két szomszédos érték (térbeli) átlagával kifejezve nyerjük a **Lax-sémát**:

$$\phi_i^{t+1} = \frac{1}{2}(\phi_{i+1}^t + \phi_{i-1}^t) - \frac{u\Delta t}{2\Delta x}(\phi_{i+1}^t - \phi_{i-1}^t). \quad (33)$$

A képletben szereplő $u \frac{\Delta t}{\Delta x}$ tényező a Courant szám.

A **Lax-Wendroff séma** elnevezését Peter Lax és Burton Wendroff után kapta. Ez egy összetett séma, mely hiperbolikus parciális differenciálegyenletek megoldására szolgál. A térbeli deriváltak becslése többlépcsős módszerrel valósul meg (7. ábra). Az első lépés során időben felet lépünk előre:

$$\phi_i^{t+\frac{1}{2}} = \phi_i^t + \frac{\Delta t}{2} \left(-u \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{(i,t)} \right) \quad (34)$$

$$\phi_i^{t+1} = \phi_i^t + \Delta t \left(-u \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{(i,t+\frac{1}{2})} \right) \quad (35)$$

Majd felhasználva a $\phi_x|_{(i,t+\frac{1}{2})}$ deriváltak különbségét, a

$$\phi_i^{t+1} = \phi_i^t - u \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\phi_{i+\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} - \phi_{i-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} \right) \quad (36)$$

egyenlet adódik.

A második lépésben $\phi_{i+\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}}$ és az $\phi_{i-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}}$ mennyiségek meghatározását a Lax-sémával (33)

végezzük. Így az eredmény:

$$\phi_{i-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\phi_i^t + \phi_{i-1}^t) - \frac{u\Delta t}{2\Delta x}(\phi_i^t - \phi_{i-1}^t), \quad (37)$$

$$\phi_{i+\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\phi_i^t + \phi_{i+1}^t) - \frac{u\Delta t}{2\Delta x}(\phi_{i+1}^t - \phi_i^t), \quad (38)$$

$$\phi_i^{t+1} = \phi_i^t - u \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\phi_{i+\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} - \phi_{i-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} \right) \quad (39)$$

$$\phi_{tt} + v\phi_{ty} + w\phi_{tz} = 0 \rightarrow \phi_{tt} + v\phi_{yt} + w\phi_{zt} = 0. \quad (43)$$

A fentiekben szereplő ϕ állapothatározó második deriváltjai:

$$\phi_{ty} = -v\phi_{yy} - w\phi_{yz} \quad (44)$$

$$\phi_{tz} = -v\phi_{yz} - w\phi_{zz}. \quad (45)$$

Az advekción kifejezésben szereplő v és w sebességkomponenseket a szakirodalom konstansnak tekinti, így kiszámítva a deriváltakat a diffúziós egyenlet az alábbi alakot ölti:

$$\phi_{tt} = v^2\phi_{yy} + w^2\phi_{zz} + 2vw\phi_{yz} \quad (46)$$

Mivel modellünk az itt szereplő állapothatározókon kívül más tényezőket is tartalmaz, emiatt a fenti levezetést módosított alakban írtuk fel. Modellünkben az egyenletek felírásakor a jobb oldalon nulla helyett egy F függvény szerepel, amely minden a rendszerben ható további erőt magába foglal (például a nyomási gradienst és nehézségi erőt):

$$\phi_t + v\phi_y + w\phi_z \neq 0 \rightarrow \phi_t + v\phi_y + w\phi_z = F(y, z, t) \quad (47)$$

Az imént ismerttetett levezetés lépéseit követve, vesszük az inhomogén egyenlet időszerinti deriváltját:

$$\phi_{tt} + (v\phi_y)_t + (w\phi_z)_t = F_t. \quad (48)$$

A diffúziós tagok meghatározása során $F(y, z, t)$ idő- és helyfüggésétől eltekintünk. Ismét felhasználjuk a Young-tételt, ezen kívül a szorzatderiválás elvégzésekor az advekción sebességek, v és w időfüggésétől is eltekintünk. A deriválást elvégezve, a

$$\phi_{tt} + v\phi_{ty} + w\phi_{tz} = 0 \quad (49)$$

kifejezésekhez jutunk.

Ezt követően ϕ második deriváltjait (44) visszahelyettesítve (48)-ba megkapjuk a Lax-Wendroff sémában szereplő (45) diffúziós tagot.

Ezen eljárás segítségével a **két dimenziós Lax-Wendroff sémához** jutottunk [6 – lancs.ac.uk]:

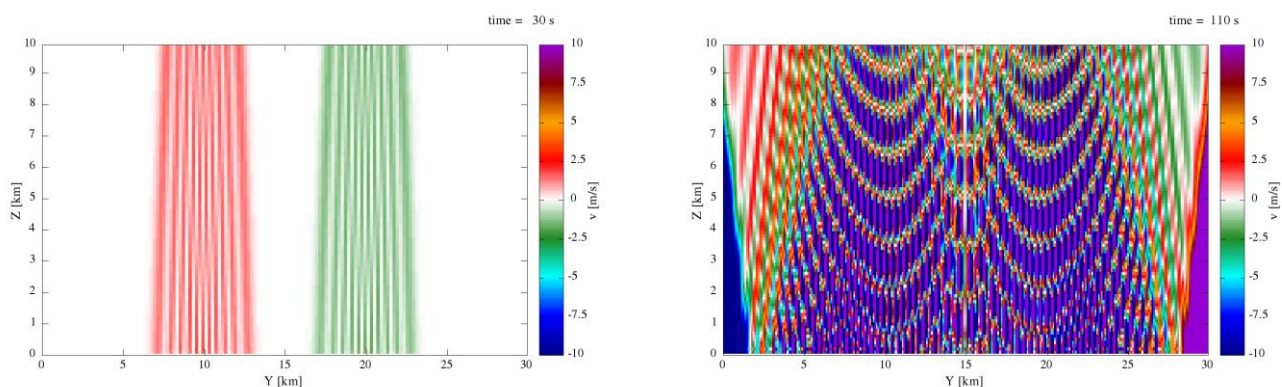
$$\begin{aligned} \phi_{j,k}^{t+1} = & \phi_{j,k}^t + F - \frac{V}{2}(\phi_{j+1,k}^t - \phi_{j-1,k}^t) - \frac{W}{2}(\phi_{j,k+1}^t - \phi_{j,k-1}^t) \\ & + \frac{V^2}{2}(\phi_{j+1,k}^t - 2\phi_{j,k}^t + \phi_{j-1,k}^t) + \frac{W^2}{2}(\phi_{j,k+1}^t - 2\phi_{j,k}^t + \phi_{j,k-1}^t) \\ & + \frac{VW}{4}(\phi_{j+1,k+1}^t - \phi_{j-1,k+1}^t - \phi_{j+1,k-1}^t + \phi_{j-1,k-1}^t), \end{aligned} \quad (50)$$

ahol V és W a Courant-számok. A kifejezésben az advekciós tagok mellett már diffúziós kompenzáló tagok is szerepelnek (az egyenletrendszer középső két tagja), valamint a két dimenziós Lax-Wendroff sémában már keresztderiváltak is megjelennek. Megkülönböztetett szerepet tölt be a numerikus módszerek között, ugyanis ő az egyetlen explicit séma, ami az advekciós egyenletre másodrendű pontosságú megoldást ad [5 – pauli.uni-muenster.de].

Kíváncsiak voltunk, hogy a korábban ismertett numerikus sémák (5.3. fejezet) miként viselkednek, ha a térbeli deriváltak becslését a Lax-Wendroff módszerrel végezzük. Úgy gondoltuk, hogy a hidro-termodinamikai egyenletrendszer stabilabb megoldását kapjuk, hiszen az eddigi módszerekkel ellentétben ez a séma csak felet lép a térben. A módszer modellbe történő beépítése azonban nem igazolta a hozzá fűzött reményeket.

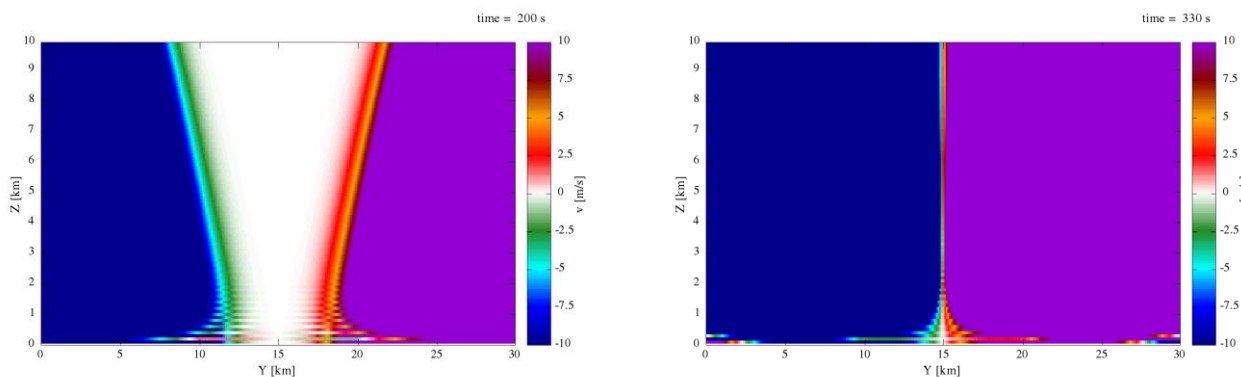
7. Eredmények

Az eredmények bemutatása során csak a főbb lépések bevezetése után kapott megoldásokat mutatjuk be. Az Explicit-Euler sémát bekapcsolva a programban, kezdetben a partok irányából a tó fele indul meg a légmozgás (8. ábra). Kis idő elteltével már 10 m/s-os horizontális sebességek lépnek fel a rendszerben. A sebességek önmagukkal interferálnak, s alig 120 másodperces futási időt követően összeomlik a modell.



8. ábra: Az Explicit-Euler módszerrel végzett számítás során fellépő horizontális sebességek 30 s (bal) illetve közel 2 perces (jobb) futást követően.

Áttérve a Runge-Kutta módszerre, megfigyelhetjük, hogy a rács jobb és bal oldali pereme irányából ellentétes irányú áramlatok indulnak meg (9. ábra). Azt várnánk, hogy a konvergencia az anyagmegmaradás elvének megfelelően feláramlást generál a légtömegek találkozásakor. Ez azonban nem következik be, a szabályszerűen egymásnak sodródó légtömegek rugalmasan ütköznek, s lepattanva egymásról az ellenkező irányba folytatódik az anyagáramlás.



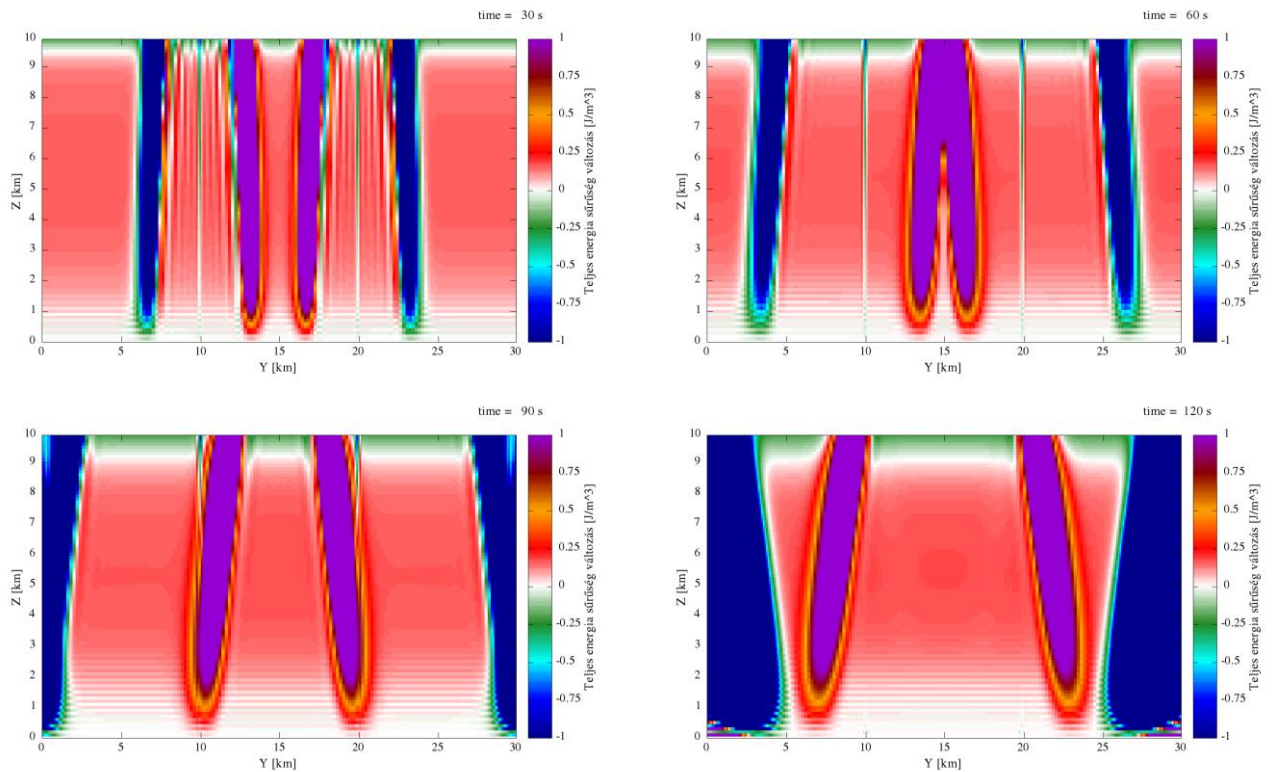
9. ábra: Az Runge-Kutta módszerrel végzett számítás során fellépő horizontális sebességek 200 s (bal), 330 s (jobb) futást követően.

A modell legnagyobb hibája a hirtelen fellépő nagy sebességek, illetve gyorsan terjedő energiák. Ennek felismerését követően, úgy gondoltuk, ha impulzuscsillapítást építünk a rendszerbe, a fentiekben már említett rugalmas ütközéseket valamint az interferencia jelenségét kiszűrhetjük. Az impulzus mérséklése a következőképpen valósult meg: az impulzus általános alakját, egy β konstans értékkel módosítottuk. Az volt a cél, hogy β -t közel 1-nek megválasztva az impulzusnak csupán töredékét hagyjuk meg a rendszerben. Mivel a modellben a vertikális mozgások intenzívebbek, így rájuk erőteljesebb csillapítást alkalmaztunk. A horizontális sebességekhez tartozó β értékét 0,9-nek, míg a vertikális impulzusok mérséklését elősegítő β -t önkényesen 0,9999-nek választottuk meg. Így a futtatások során fellépő eredő impulzusoknak nagyjából 10%-át hagyjuk meg a rendszerben.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p}_{t+1} - \mathbf{p}_t &= \Delta \mathbf{p} & / -\beta \Delta \mathbf{p} \\
 m_{t+1} \mathbf{v}_{t+1} &= m_{t+1} \mathbf{v}_{t+1} - \beta m_{t+1} \mathbf{v}_{t+1} + \beta m_t \mathbf{v}_t \\
 \mathbf{v}_{t+1} &= \mathbf{v}_{t+1} - \beta \mathbf{v}_{t+1} + \beta \frac{m_t}{m_{t+1}} \mathbf{v}_t & (51) \\
 \mathbf{v}_{t+1} &= (1 - \beta) \mathbf{v}_{t+1} + \beta \frac{m_t}{m_{t+1}} \mathbf{v}_t
 \end{aligned}$$

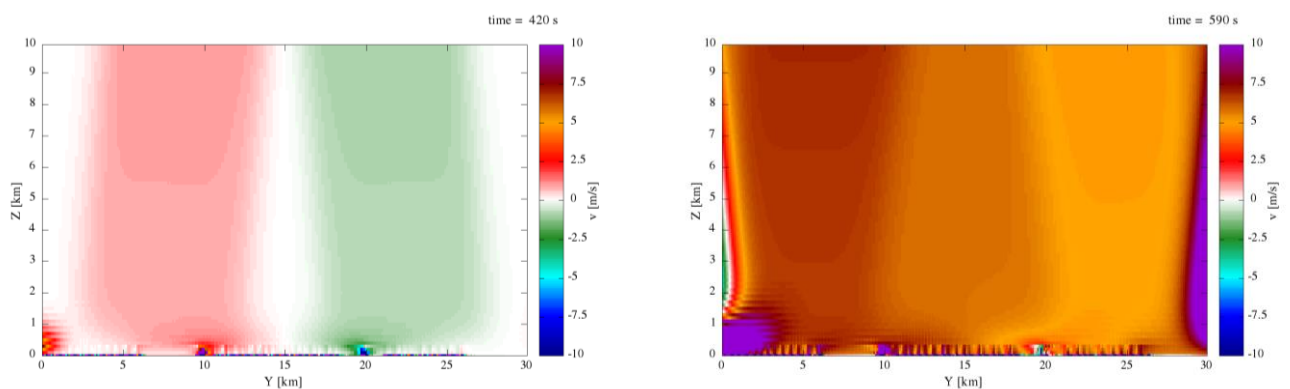
Ennek alkalmazása sem mérsékelte a rendszerben tapasztalható lökeshullámokat. Korábban már megvizsgáltuk, hogyan alakulnak az egyes rácspontokban az anyagsűrűségi viszonyok. Ekkor azt kaptuk, hogy a modell nem anyag konzisztens, az idő múlásával csökken benne az anyagmennyiség. A fellépő nagy energiák arra készítettek minket, hogy az energiamérlegét is megvizsgáljuk. Ekkor az egyes rácspontokra vonatkozólag, külön-külön megnéztük az energia viszonyokat és felírtuk a rendszer teljes energiasűrűség változását ($\frac{J}{m^3}$). A teljes energiasűrűség változást 3 összetevőből számítottuk ki: helyzeti energia, kinetikus energia horizontális és vertikális komponenseinek értékéből. A számításokból azt a következtetést vontuk le, hogy munkánkat az energia megmaradás problémája is hátráltatja.

A Runge-Kutta módszer energiamérlegét figyelve, látható az energiák rugalmas ütközése s ezt követően azok egymáson való keresztülhaladása (10. ábra).



10. ábra: A rendszer energiamérlege a Runge-Kutta módszer alkalmazása során, a futás különböző időpillanataiban (30 s, 60 s, 90 s, 120 s).

Végül negyedrendű Runge-Kutta-val megoldva az deriváltakat, már mérsékeltebb sebességértékek rajzoldódnak ki a modellben (11. ábra), bár a rugalmas ütközés itt is fenn áll. Ez esetben hosszabb futási időt tapasztalunk, a 10. percet megközelítve a rács bal alsó sarkában 10 m/s-ot meghaladó áramlási sebességek jelennek meg, s ezek rövid időn belül az egész rácshálót meghódítják.



11. ábra: Horizontális sebességek alakulása a negyedrendű Runge-Kutta módszer esetén, az integrálás 420. (bal), 590. (jobb) másodpercében.

Ugyanezzel a módszerrel vizsgálva a teljes energiasűrűség változását, még mindig fenn áll a konvekció és a rugalmatlan ütközés hiánya.

8. Konklúzió

Célunk a parti cirkuláció megismerése volt mind külföldi, mind hazai viszonylatban, továbbá a jelenség nem hidrosztatikus modellezése volt egyre bonyolultabb numerikus sémák felhasználásával. A feladat komolyságára való tekintettel nem meglepő, hogy az egyszerű numerikus sémák alkalmazásával a modell még erősen instabil. A numerikus módszerek fokozatos fejlesztése sem hozott markáns változást az eredményeinkben, így azt a következtetést vontuk le, hogy a rendszernek valamilyen háttérproblémája lehet. Ennek látható jelei is megmutakoztak, erőteljes impulzusok jelentek meg a modellben. Ezen hatások csökkentésére impulzuscsillapítást gondoltunk elhelyezni, de a problémát ez sem oldotta meg. Az impulzuscsillapítással végzett futtatások során megfigyeltük, hogy a szakirodalom által a numerikus sémák közt felállított „jósági” sorrend már a mi esetünkben is beigazolódni látszik. Vizsgálataink során az Explicit-Euler módszer bizonyult a leggyengébbnek, ezt követte a Runge-Kutta, végül elvárásainknak megfelelően a negyedrendű Runge-Kutta teljesített a legjobban. A modell egyik negatívuma az erős gravitációs hatás, ami a légkör igen gyorsan bekövetkező összeomlásáért felelős. Megállapítottuk, hogy az általunk szimulált légkör nagyon érzékeny arra, hogyan választjuk meg a nehézségi gyorsulás értékét. Végül arra a felismerésre jutottunk, hogy a kezdeti beállítások állhatnak a felmerülő problémák hátterében. Mivel a kezdeti nyomási értékek nem megfelelően vannak inicializálva, így ez hatással van a kezdeti sűrűségi és hőmérsékleti beállításainkra is. Illetve a part és a víz feletti légtömegek határán az állapotváltozók hirtelen ugrást szenvednek el. Ez okozza a kezdeti markáns impulzusokat, melyek a futtatás jövőére is egyértelmű hatással vannak. A kezdeti értékek helyes meghatározásához fejlett adatasszimilációs eljárásokat tervezünk segítségül hívni.

Köszönetnyilvánítás

Hálásan köszönöm témavezetőimnek Mona Tamásnak és dr. Breuer Hajnalkának, hogy mindvégig támogattak és figyelemmel kísérték munkámat. Köszönöm Harangozó Szilveszternek és Leelőssy Ádámnak, hogy ötleteivel nagymértékben segítette a modellezési munkálatok előrehaladását. Köszönet illeti Dr. Tasnádi Pétert, a modellegyenletek felírásánál nyújtott segítségével, illetve dr. Horváth Ákost, a Siófoki Viharjelző Observatórium vezetőjét, az értékes gondolatokért.

Függelék

Dolgozatomban az alábbi jelölésrendszert alkalmaztam:

dx – horizontális lépésköz (nyugat-kelet irányultságú)

dy – horizontális lépésköz (észak-dél irányultságú)

dz – vertikális lépésköz

$u(x, y, z, t)$ – x irányú sebességkomponens $\left[\frac{m}{s}\right]$

$v(y, z, t)$ – y irányú sebességkomponens $\left[\frac{m}{s}\right]$

$w(y, z, t)$ – z irányú sebességkomponens $\left[\frac{m}{s}\right]$

T – hőmérséklet [K]

p – nyomás [Pa]

R_d – a száraz levegőre vonatkoztatott specifikus gázállandó, értéke $287 \frac{J}{kgK}$

ρ – légsűrűség $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$

Q – hőmennyiség [J]

c_v – a száraz levegő állandó térfogaton vett fajhője, értéke $718 \frac{J}{kgK}$

α – specifikus térfogat $\left[\frac{m^3}{kg}\right]$.

Ω – a Föld forgásának szögsebesség vektora

g – a nehézségi gyorsulás, amelynek értéke a 45° -os szélességi körön $9,81 \frac{m}{s^2}$

ϕ_i – az állapotváltozó i -edik rácspontban felvett értéke

ϕ_t – az állapotváltozó t -edik időpillanatban felvett értéke

Δx – térbeli rácstávolság

Δt – időlépcső

i – egy dimenziós esetben az adott rácspontot jelöli

j – két dimenziós esetben az állapotátározó horizontális helyzetét jelöli a rácshálón

k – két dimenziós esetben az állapotátározó vertikális helyzetét jelöli a rácshálón

U – az u sebesség komponenshez tartozó Courant-szám

V – az v sebesség komponenshez tartozó Courant-szám

W – az w sebesség komponenshez tartozó Courant-szám

Irodalomjegyzék

Alpert, P., Cohen, A., Neumann, J., Doron, E., 1982: A Model Simulation of the Summer Circulation from the Eastern Mediterranean past Lake Kinneret in the Jordan Valley. *Monthly Weather Review*, **110**, 994–1006.

Ambrózy, P., Papp, É., 1987: Adatok a Balaton szélklímájához. *Időjárás*, **91**(5), 309–316.

Bartha, I., 2008: A balatoni viharjelzés története és a meteorológiai szolgáltatások fejlődése a kezdetektől napjainkig. *Országos Meteorológiai Szolgálat*, 40 p.

Butcher, J. C., 1964: On Runge-Kutta processes of high order. *Journal of the Australian Mathematical Society*, **4**, 179–194.

Casten, R. G., Holland, C. J., 1978: Instability results for reaction diffusion equations with Neumann boundary conditions. *Journal of Differential Equations*, **27**(2), 266–273.

Czelnai, R., 1955: A Balaton partmenti cirkulációs rendszerének néhány sajátossága. *Időjárás*, **59**(4), 224–229.

Czelnai, R., Mezősi, M., Tanczer, T., 1963: Automatikus szélmérő berendezések felállításának meteorológiai kérdései a Balaton körzetében. *Időjárás*, **67**(2), 86–90.

Desai, A. R., Austin, J. A., Bennington, V., McKinley, G. A., 2009: Stronger winds over a large lake in response to weakening air-to-lake temperature gradient. *Natural Geoscience*, **2**, 855–857.

Endrődi, G., Götz, G., 1964: A víz és a léghőmérséklet kölcsönhatása sugárzásos napokon a Balaton térségében. *Időjárás*, **68**(6), 371–375.

Estoque, M.A., Bhumralkar, C.M., 1969: Flow over a localized heat source. *Monthly Weather Review*, **97**, 850–859.

Estoque, M.A., Lai, H., 1976: A Lake Breeze over Southern Lake Ontario. *Monthly Weather Review*, **104**, 386–396.

Farmer, D. M., Carmack, E., 1981: Wind Mixing and Restratification in Lake near the Temperature of Maximum Density. *Journal of Physical Oceanography*, **11**, 1516–1532.

Götz, G., Rákóczi, F., 1981: A dinamikus meteorológia alapjai. *Tankönyvkiadó*, 369–370.

Keen, C. S., Lyons, W., 1978: Lake/Land Breeze Circulation on the Western Shore of Lake Michigan. *Journal of Applied Meteorology*, **17**, 1843–1855.

Mezősi, M., 1977: Távszélmérő a balatoni viharjelzés szolgálatában. *Időjárás*, **81**(2), 100–106.

Moroz, W., 1967: A Lake Breeze on the Eastern Shore of Lake Michigan: Observations and Model. *Journal of the Atmospheric Sciences*, **24**, 337–355.

Péczely, Gy., 1961: Adatok a Balaton helyi szélrendszeréhez. *Időjárás*, **65**(6), 362–364.

Péczely, Gy., 1962: A Balaton helyi szélrendszere. *Időjárás*, **66**(2), 83–89.

Szépszó, G., Bölöni, G., Horányi, A., Szűcs, M., 2013: A numerikus időjárési modellek felépítése: tér- és időskála, adatasszimiláció, diszkretizáció, parametizációk, valószínűségi előrejelzések, éghajlati modellezés. 26–34.

Internetes hivatkozások

[1 – oceanservice.noaa.gov]

<http://oceanservice.noaa.gov/education/yos/resource/JetStream/ocean/seabreezes.htm#sb>

[2 – <http://visibleearth.nasa.gov>]

[3 – <https://maps.google.com>]

[4 – *Weidinger és mtsai*, 2013]

http://elte.prompt.hu/sites/default/files/tananyagok/numerikus_prognosztika/index.html

[5 – <http://pauli.uni-muenster.de>]

<http://pauli.uni-muenster.de/tp/fileadmin/lehre/NumMethoden/WS0910/ScriptPDE/Advection.pdf>

[6 – <http://www.lancs.ac.uk>]

<http://www.lancs.ac.uk/~winterh/advectionCS.pdf>