

Diplomamunka  
Meteorológus mesterszak  
Időjárás előrejelző szakirány

# A sekélyfolyadék-egyenletekre alkalmazott Magnus-módszer elméleti és számítógépes vizsgálata



Készítette: Farkas Rita

**Témavezetők:** dr. Csomós Petra  
dr. Havasi Ágnes

ELTE Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

**Tanszéki konzulens:** dr. Breuer Hajnalka  
ELTE Meteorológiai Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem  
Földrajz- és Földtudományi Intézet  
Meteorológiai Tanszék

Budapest, 2018



# Tartalomjegyzék

<b>1. Bevezetés</b>	<b>4</b>
<b>2. Irodalmi áttekintés</b>	<b>5</b>
<b>3. A sekélyvízi egyenletrendszer</b>	<b>10</b>
3.1. A mozgásegyenletek . . . . .	10
<b>4. A Magnus-módszer</b>	<b>14</b>
<b>5. Korábbi eredmények, újabb célkitűzések</b>	<b>18</b>
<b>6. Konvergencia</b>	<b>21</b>
6.1. A Magnus-módszer konvergenciája . . . . .	21
6.2. A konvergencia rendje . . . . .	21
6.3. Richardson-extrapoláció (RE) . . . . .	23
<b>7. Eredmények</b>	<b>26</b>
7.1. Az advekciós egyenlet . . . . .	26
7.2. A Burgers-egyenlet . . . . .	30
7.3. 1D lineáris sekélyfolyadék-egyenletek . . . . .	36
7.4. 1D nemlineáris sekélyfolyadék-egyenletek . . . . .	42
7.5. 2D lineáris sekélyfolyadék-egyenletek . . . . .	46
7.6. 2D nemlineáris sekélyfolyadék-egyenletek . . . . .	53
<b>8. Összefoglalás</b>	<b>59</b>
<b>9. Irodalomjegyzék</b>	<b>62</b>

„Stay excited, stay humble, and good things will come.”

*Mark Morris*

## 1. Bevezetés

Az időjárás-előrejelzési modellek használatához és ezáltal az előrejelzés elkészítéséhez nélkülözhetetlen ismernünk a légkörben fellépő hidro-termodinamikai folyamatokat, kölcsönhatásokat. A kezdeti mező ismeretében a fizikai összefüggések alapján felállíthatjuk azokat a matematikai egyenleteket, amelyek segítségével számszerűsíthető a rendszer, meghatározható az időbeli fejlődés. Természetesen a légköri folyamatok nem mindig az előrejelzett módon változnak az idővel, de nagyon fontos a kiindulási feladat pontos definiálása (*Weidinger et al.*, 2013, chap. 13.).

A dolgozatban elsőként megmutatjuk, hogy az ismert fizikai törvényeket használva hogyan jutunk el a sekélyfolyadék-egyenletekhez. A légkör horizontális kiterjedése jóval nagyobb, mint a magassága, ezért – és más, a dolgozatban felsorolt egyszerűsítő feltevések figyelembe vételével – jó közelítéssel a légkör is sekélyvíz rendszernek tekinthető. Az egyenletek jellemzik például az egész Földet körülölelő Rossby-hullámokat, amelyek alapvető szerepet játszanak a nagyskálájú folyamatok leírásában, a légköri kölcsönhatások alakításában. Tehát a sekélyvízi egyenletrendszer leírja a prognosztika szempontjából fontos légköri, dinamikai folyamatokat, azonban matematikailag egy olyan parciális differenciálegyenlet-rendszer, melynek egzakt megoldását gyakorlatilag lehetetlen megadni, azonban különböző numerikus módszerekkel közelíthető (*Horányi et al.*, 1998).

Ilyen a Magnus-módszer is, amely az időderivált közelítésére használt, igen pontos és jó numerikus módszer. A dolgozatban bevezetjük a Magnus-féle közelítést, majd az eddigi eredményeinkre utalva, és azokból kiindulva végzünk további vizsgálatokat. A végső cél a kétdimenziós sekélyfolyadék-egyenletek numerikus megoldása, egy stabil és konzisztens, tehát konvergens módszerrel. A célhoz vezető úton több helyen megállunk, hogy aztán könnyebben haladjunk majd tovább.

Elsőként a lineáris advekciós egyenletet oldjuk meg a Magnus-módszerrel, majd ezt követően ennek nemlineáris változatát, a Burgers-egyenletet is. Kapcsolatot teremtve a Burgers-egyenlet és a sekélyvízi egyenletrendszer között, megoldjuk az egydimenziós sekélyfolyadék-egyenletek lineáris, majd nemlineáris változatát is. Ezt követően pedig kitérünk a kétdimenziós egyenletrendszer lineáris, illetve végül a nemlineáris megoldására is.

## 2. Irodalmi áttekintés

Az időjárás előrejelzése napjainkban egy olyan tudományos tevékenység, amely nagyban hozzájárul az iparhoz, gazdasághoz és a társadalmi jóléthez. A néhány nap múlva bekövetkező időjárás prognosztizálásához elengedhetetlen a jelen légköri állapot ismerete.

Az összes légköri folyamat ideális modellje valamilyen parciális differenciálegyenlettel adható meg, természetesen megfelelő fizikai paraméterek mellett. Ilyen például az advekción egyenlet, amely megfelelően írja le a szennyezőanyag terjedést a légkörben. Ezen parciális differenciálegyenletek adják meg a kapcsolatot a numerikus modellezés és a dinamikus meteorológia között (*Byun, 1998*). Segítségükkel leírhatóak a fizikai folyamatok, megoldásukkal megadható a jövőbeli esemény, azaz az időjárás előrejelzése.

Sokféle parciális differenciálegyenlet numerikus megoldását használják a légköri folyamatok közelítésére, többek között ilyen az advekción egyenlet is. Képzeljük el, hogy egy repülőtet vezetünk a légkör egy olyan tartományában, ahol horizontális nyomási gradiens figyelhető meg. Most tétélezzük fel, hogy ez a légoszlop, amelyben repülünk egyenesen mozog egy adott sebességgel, és mi együtt mozgunk vele. Ekkor a légoszlopban a hőmérséklet alakulását a repülönk magasságában – úgy, hogy végig egy magasságban haladunk – egy időtől és tértől függő függvény fogja leírni. A probléma felírására jól használható az advekción egyenlet (*Lynch, 2008*). Elengedhetetlen megemlíteni a transzportfolyamatok, speciálisan a légszennyező anyagok terjedésének modelljét, melyet szintén az advekción egyenlet megoldásával közelítünk (*Byun, 1998*). Azonban az advekción parciális differenciálegyenlet egy elsőrendű, hiperbolikus egyenlet, mely két tagból áll (*Delleur, 2006*).

Bonyolultabb légköri folyamatokhoz elengedhetetlen bonyolultabb fizikai összefüggéseket leíró matematikai eszközökhöz nyúlni. Szinte az összes használatban lévő előrejelző modell folyadékként közelíti a légkört, az itt zajló kis- és mezoskálájú folyamatok tehát leírhatók valamilyen folyadékdinamikai egyenlettel – pl. a sekélyvízi egyenletrendszerrel –, ahogyan a nagyskálájú folyamatok is (*Belousov et al., 2009*). Ilyen az időjárás egyik fontos befolyásolója, a globális Rossby-hullám is, amely jól közelíthető a sekélyfolyadék-egyenletekkel, útja és változása ezáltal az egyenletrendszer megoldásával szimulálható. Természetesen minél pontosabban le tudjuk írni egy ilyen légköri objektum tulajdonságait – horizontális méretét, karakterisztikus idejét, vagy akár a vertikális sebességét –, azaz minél pontosabb a szóban forgó szimuláció,

az előrejelzésünk annál jobb lesz.

Számos kutató foglalkozott és foglalkozik jelenleg is a sekélyvízi egyenletrendszerrel, hiszen egy adott felület felett áramló folyadék jelensége egyike a tudósok és mérnökök által gyakran használt fizikai folyamatnak. Az említett meteorológiai vonatkozás mellett széles körben használják még az árhullámok, árapály jelenségek leírására, gátszakadás modellezésére is. Annak ellenére, hogy az áramló víz mindennapos jelenség, a mozgást leíró egyenletek túl bonyolultak a gyakorlati használathoz. Az egyszerűsítő feltevéseket alkalmazva kapott egyenletrendszer csak nagyon ritkán oldható meg pontosan, és még a numerikus közelítésekben is nehézségek adódhatnak, nem szólva az olyan gyakorlati akadályokról, mint például a változó domborzatú meder.

Nagyon sok numerikus módszer születik, azonban kevés olyan van, amely megbízható minden típusú sekélyfolyadék-egyenletre; egy erős és jó numerikus módszer úgy képes megoldani az egyenletrendszert, hogy figyelembe veszi a változó talajt, és minden más nehezítő körülményt is (*George, 2004*).

A kutatók körében a szóban forgó hiperbolikus egyenletek problémájára nagyon elterjedtek a Godunov- és a Riemann-féle módszerek használatával alkotott numerikus megoldások. Népszerűségük oka lehet, hogy könnyen kezelhető velük több, a hiperbolikus tulajdonságaikból adódó akadály. Azonban ezen típusú egyenletek numerikus kezelése nehezebb, és más típusú megközelítést igényel, mint a parabolikus és elliptikus feladatok megoldása. Mégis elengedhetetlen a vizsgálatuk, hiszen ezek azok az egyenletek, amelyek megfeloén sima, szakadásmentes kezdeti feltétel mellett is szakadást eredményezhetnek a megoldásban, ezzel pedig jelentősen torzul a fizikai valóság modellje, tehát ezt szükségszerűen orvosolnunk kell (*Canuto et al., 1998*).

LeVeque (*LeVeque, 2004*) a Godunov-módszer nagy felbontású verzióit készítette el, ezzel olyan, a sekélyvízi egyenletrendszerhez hasonló egyenletek megoldásait vizsgálta, melyek leírják a hullámterjedési- és transzport jelenségeket. Sémáit eredetileg a légkörben is gyakran kialakuló lökéshullámok vizsgálatára készítette, de a módszerei használhatóak más hullámterjedési problémák leírására is. Jakeman szintén – másodrendű centrális upwind sémára épülő – Godunov-módszerrel, emellett másodrendű Runge–Kutta-módszerrel is megadta az egydimenziós egyenletrendszer megoldását (*Jakeman, 2006*).

Több numerikus kísérlet irányult arra, hogy az egyenletrendszer mellett figyelembe vegyenek egy ún. forrástagot is, amely a különböző mederaljzat tulajdonságait hordozza magában. Ezáltal a folyadék nem egy teljesen homogén felszín felett áram-

lik, hanem például a lejtő vagy más domborzati viszonyok hatásai is megjelennek, a gyakorlati problémától függően. George egy olyan, Godunov-típusú numerikus megoldást dolgozott ki, amely igen pozitív eredményeket ad nagyon sekély áramlás esetén, a meder figyelembevételével is (*George, 2004*).

A Godunov típusú módszerek előnyei mellé fontos megjegyeznünk egy hátrányokat is: nagy számításigényüket. Broomans kutatása során nagy hangsúlyt helyezett azon numerikus módszerek vizsgálatára, amelyekkel a memória és számításigény minimalizálható, emellett a megoldás pontossága növelhető (*Broomans, 2003*). A numerikus sémák célja tehát a minél pontosabb és gyorsabb megoldások szolgáltatása, ennek érdekében a Godunov mellett számos más módszerrel is próbálkoztak. Delis és Katsaounis (*Delis and Katsaounis, 2005*) relaxációs módszereket alkalmaztak. Ez a séma a klasszikus módszereket és a Runge-Kutta-módszer időlépcsőit ötvözi. Hatalmas előnye, hogy alkalmazása során semmilyen Riemann-féle megoldóképlet nem szükséges, számításigénye ezáltal lecsökken. A relaxációs mellett a véges különbséges módszerek is igen jónak bizonyulnak a sekélyvízi egyenletrendszer megoldására, azaz a hullám magasságának megadására és a sebesség meghatározására (*Crowhurst and Li, 2013; Hudson, 2009*). Ezen módszer használatának további előnye, hogy a rácsháló finomításával a megoldás folyamatosan javul, a hiba így minimálisra csökkenthető.

Az eddigiekben említett összes numerikus módszer a megoldás során horizontális lépésközöket alkalmazott, azonban felmerülhet a kérdés, hogy egy vertikális lépés beépíthető-e valamelyik numerikus modellbe, ezzel is javítva a megoldást. A felszíni gradiens módszer a medret lejtőnek tekinti, és amennyiben a lejtő elég meredek, a módszer hasonlíthat a vertikális lépéssel való megoldásra. Zhou munkatársaival a valós vertikális lépés kezelése céljából kiterjesztette a felszíni gradiens módszert, ezzel egy újabb hatékony és stabil sémával bővítve a megoldások tárházát (*Zhou et al., 2002*).

Jelen dolgozat célja a halmaz kiegészítése egy újabb numerikus módszer, a Magnus-módszer vizsgálatával. A séma megoldásvektorát egy mátrixexponenciális és egy vektor szorzatának közelítésével kapjuk. A megoldás, integrátorok végtelen soraként áll elő, melynek minél több tagját tekintjük, annál bonyolultabb, de pontosabb sémát kapunk (*Magnus, 1954*). A Magnus-integrátorok megfelelően csonkolt változatát használva több teszt eredményeként elmondható, hogy a megoldás képes önmagát stabilá tenni, ezáltal hatékonyabb séma például a Runge-Kutta-módszernél (*Iserles et al., 2001*).

A Magnus-féle közelítést eredetileg matematikai problémák megoldására mutatták be, azonban Magnus munkájában leírja, hogy a módszer kvantummechanikában is használatos. Az integrátorok konvergenciájának problémája Magnus eredeti cikkében elég homályosan kezelt, azonban erre több kutatást végeztek, az alacsonyabb és magasabb rendű sémákra egyaránt (*Pechukas and Light*, 1966; *Wei*, 1963; *Wei and Norman*, 1963; *Bátkai and Sikolya*, 2012). A Magnus-módszert a fizika sok területén alkalmazták, ilyen például a nukleáris- és az atomfizika is, de a numerikus eszközt a híres időfüggő Schrödinger-egyenletek megoldására is használták (*Chang and Light*, 1969; *Hochbruck and Lubich*, 2003). A Magnus-módszer az elektrodinamika területén is bizonyította hatékonyságát. Általa ismert egy olyan, másodrendben pontos, a Maxwell-egyenletek megoldására vonatkozó numerikus módszer, amely képes időfüggő anyagi paramétereket – permeabilitást és permittivitást – is kezelni (*Faragó et al.*, 2012).

A legtöbb kutatás célja a módszer működtetése és konvergenciájának vizsgálata újabb és újabb egyenlettípusokra (*Blanes et al.*, 1998; *Casas*, 2007). Annak ellenére, hogy a sémát eredetileg elsőrendű, közönséges differenciálegyenlet-rendszerek megoldására alkották, a megoldott feladatok halmaza időközben folyamatosan szélesedett például Sturm–Liouville-problémák nemlineáris egyenleteivel is (*Blanes et al.*, 2009). A legfontosabb, hogy a módszer egy fontos eszköz a fizikusok számára, úton-útfélen bizonyítja, hogy sok jó tulajdonsága miatt érdemes a kutatás tárgyává tenni.

A dolgozat további célja, ahogyan az eddig említett kutatásoké is, hogy a Magnus-módszerrel megoldott sekélyvízi egyenletrendszer pontos és stabil megoldást szolgáltatson, minél kisebb számításigénnyel. Ehhez elengedhetetlen a módszer stabilitásának és konvergenciájának vizsgálata, azonban a módszer konvergenciája hiperbolikus típusú feladatra kevésbé ismert.

A Maxwell-egyenletekre alkalmazott Magnus-módszer másodrendű konvergenciájának ismeretében (*Faragó et al.*, 2012) szeretnénk mi is minél pontosabb közelítést adni a konvergenciára. Ismert, hogy a Richardson-extrapoláció alkalmas a közelítés pontosságának növelésére (*Zlatev et al.*, 2012). Számos numerikus módszeren keresztül, sok feladatra belátták már, és foglalkoznak vele a jelenben is, hogy az aktív és a passzív Richardson-extrapoláció jelentősen javíthat a feladat megoldásához választott numerikus módszer pontosságán (*Burg and Erwin*, 2008). Ebből kiindulva cél a sekélyfolyadék-egyenletek minél pontosabb numerikus megoldása, alkalmazva a Richardson-extrapolációt a rend tovább növelése érdekében.



Elképesztően sok matematikai eszköz és kutatás áll rendelkezésünkre, előttünk tehát a megvalósítás. Tekintsünk úgy a Magnus-módszerre, mint egy sok oldalú térbeli alakzatra. Jelentsen minden oldala egy újabb, feltárássra kerülő alkalmazási lehetőség. Láttuk, hogy megannyi gyors, stabil, tehát hatékony megoldást dolgoztak ki a séma használatával. Az elképzelt objektumunk további újabb oldala a másodrendű Magnus-integrátorok vizsgálata parabolikus parciális differenciálegyenletekre. González ennek kapcsán munkatársaival igazolta, hogy a kidolgozott módszerük, amely minden lépés során kétszer követeli meg a mátrixexponenciális kiszámítását – ezzel is növelve a pontosságot – stabil és konvergens (*González et al.*, 2006), és ez a konvergencia akár másodrendű is lehet (*González and Thalhammer*, 2007).

Ezen diplomamunkával célunk újat fordítani képzeletbeli alakzatunkon, és a parabolikus kutatások után hiperbolikus parciális differenciálegyenlet-rendszerre, a sekélyfolyadék-egyenletekre tesztelni a Magnus-módszert.

### 3. A sekélyvízi egyenletrendszer

Elsőként megmutatjuk, hogy a sekélyvízi egyenletrendszer (shallow water equations) miként kapható meg a megfelelő fizikai és matematikai összefüggések felhasználásával (*Csomós and Winckler, 2014; Havasi, 2000*).

Tekintsünk egy  $M \subset \mathbb{R}^2$  tartomány felett áramló folyadékot. Az áramlás közben egy tetszőleges  $t \geq 0$  időpontban egy választott folyadékelem helyzetét a térben az  $(x, y, z) \in M \times [0, H] \subset \mathbb{R}^3$  helyvektor adja meg, ahol  $x$  a kelet-nyugati,  $y$  az észak-déli irányú komponens,  $z$  pedig az  $(x, y)$ -síkra merőleges, függőleges irányú komponens úgy, hogy  $H > 0$  a folyadék legnagyobb magassága. A folyadék mozgását minden pontban meghatározzák az  $x, y, z$  irányú  $u(t, x, y, z), v(t, x, y, z), w(t, x, y, z)$  sebességkomponensek.

Ez a descartes-i jelölésrendszer használható a mozgásegyenletek leírására, amelyek különböző változóikban egyszerűsödnek, ha alkalmazzuk a következő feltevéseket.

- i. Az áramló folyadék horizontális kiterjedése jóval nagyobb, mint a magassága.
- ii. A folyadék összenyomhatatlan, sűrűsége egy trajektória mentén állandó.
- iii. A felső, szabad határfelület nyomása állandó.
- iv. A belső súrlódástól eltekintünk.
- v. A folyadék hidrosztatikus egyensúlyban van, azaz a gravitációs erő egyensúlyt tart a vertikális nyomási gradiens erővel.
- vi. A horizontális sebességkomponensek nem függenek a magasságtól.

Ezen egyszerűsítő feltevések mellett a légkör is sekélyfolyadék rendszernek tekinthető. A dolgozat további részeiben, amennyiben ezek egyértelműek, eltekintünk a bevezetett függvények koordináta-függésének jelöléseitől.

#### 3.1. A mozgásegyenletek

A sekélyfolyadék közelítés egyszerűsége miatt igen elterjedt, segítségével lehetőség nyílik többek között a légköri nagyskálájú folyamatok leírására is (*Weidinger et al., 2013*). Ahhoz, hogy a modellt a későbbiekben mi is használni tudjuk, megmutatjuk, hogyan jutunk el az egyenletrendszerig.

Alkalmazzuk a fent felsorolt egyszerűsítő feltételeket a hidro-termodinamikai egyenletrendszer általános alakjára.

### 3.1.1. Kontinuitás

Zárt rendszerben a teljes folyadék mennyisége nem változik, érvényes tehát a kontinuitási egyenlet:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0, \quad (1)$$

ahol  $\rho(t, x, y, z)$  a folyadék sűrűsége az  $(x, y, z)$  pontban, valamely  $t$  időpontban. Az egyenlet a (ii.)  $\left(\frac{d\rho}{dt} = konst\right)$  feltétel miatt

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

alakban írható fel. Fejezzük ki  $\frac{\partial w}{\partial z}$ -t és integráljuk  $z$  szerint:

$$w(t, x, y, z) = -z \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right). \quad (3)$$

Jelölje  $h = h(t, x, y)$  a folyadékkréteg magasságát. Használjuk fel, hogy  $z = h$ -ra (Nagy, 1985)

$$\begin{aligned} w(t, x, y, z) &= -h \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \\ w(t, x, y, z) &= \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y}. \end{aligned} \quad (4)$$

Innen a két egyenlet jobb oldalát egyenlővé téve kapjuk a következőt:

$$-h \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y}. \quad (5)$$

Szorozzuk meg mindkét oldalt  $g$ -vel, amely a gravitációs gyorsulás állandó értéke. Látható, hogy megjelenik a  $gh$  szorzat. Legyen  $\Phi = \Phi(t, x, y) = gh(t, x, y)$  a szabad határfelület geopotenciálja. Ezt felhasználva, és az egyenlőséget egy oldalra rendezve jutunk el a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \Phi \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (6)$$

összefüggésig.

### 3.1.2. Sztatika

Tekintsük a (iii.) feltételt, miszerint  $h$  magasságban a folyadék nyomása állandó. Ezek alapján:

$$p(t, x, y, h) = p_0, \quad (7)$$

a szabad határfelület nyomása, úgy, hogy a koordináta-rendszer  $z = 0$  szintjét a folyadék alatti felszínhez rögzítjük. Az (v.) feltételből következik, hogy érvényes a sztatika alapegyenlete:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g. \quad (8)$$

Ezt  $z$  szerint integrálva a

$$p(t, x, y, z) = -\rho g z + c(t, x, y) \quad (9)$$

egyenletet kapjuk, ahol  $c(t, x, y)$  az integrációs állandó. Mivel  $z$  szerint integráltunk, jelenleg  $c$  független  $z$ -től. A (7), (9) összefüggések alapján látható, hogy

$$-\rho g h + c(t, x, y) = p_0. \quad (10)$$

Ebből  $c(t, x, y)$ -t kifejezve és (9)-be helyettesítve kapjuk a következő egyenletet:

$$p(t, x, y, z) = -\rho g z + p_0 + \rho g h = \rho g (h - z) + p_0. \quad (11)$$

A nyomás tehát a folyadék egy  $(x, y, z)$  pontjában egyenlő a hidrosztatikai nyomás és a szabad határfelület nyomásának összegével. Differenciáljuk az imént kapott egyenletet  $x$  és  $y$  változók szerint, majd használjuk a (6)-ban is alkalmazott feltételt, így itt is megjelenik a már említett  $\Phi(t, x, y)$  függvény.

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho g \frac{\partial h}{\partial x} = \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho g \frac{\partial h}{\partial y} = \rho \frac{\partial \Phi}{\partial y}. \quad (13)$$

### 3.1.3. Az Euler-egyenletek

Nincs más hátra, mint felhasználni az Euler-féle horizontális mozgásegyenletek ismert alakját (*Czelnai et al.*, 1991):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\mathbf{v} \nabla u - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f v - \frac{1}{\rho} F_x, \quad (14)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\mathbf{v} \nabla v - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - f u - \frac{1}{\rho} F_y, \quad (15)$$

ahol  $\mathbf{v} = (u, v, w)^\top$ ,  $F_x$  és  $F_y$  az  $F$  súrlódási erő  $x$  és  $y$  irányú komponensei, ezeket a tagokat a (iv.) feltétel miatt elhagyhatjuk. Az  $f = 2\omega \sin \varphi$  a Coriolis-paraméter, ahol  $\omega$  jelöli a Föld forgási szögsebességét,  $\varphi$  pedig a földrajzi szélességet. Továbbá eltűnnek mindkét egyenletben a gradienst kifejezve kapott  $w \frac{\partial u}{\partial z}$  és  $w \frac{\partial v}{\partial z}$  tagok az  $u$  és  $v$  függvények  $z$ -től való függetlensége miatt ((vi.) feltétel). Rendezzük a tagokat egy oldalra, és helyettesítsük be a (12) összefüggéseket, így a horizontális mozgásegyenletek a következő alakra egyszerűsödnek:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} - fv &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} + fu &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Fejessük ki a (6), (16) egyenletekből a  $\frac{\partial h}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial t}$  deriváltakat.

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} = -u \frac{\partial h}{\partial x} - v \frac{\partial h}{\partial y} - h \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} - g \frac{\partial h}{\partial x} - fv, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = -u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} - g \frac{\partial h}{\partial y} + fu. \end{cases} \quad (17)$$

A kapott (17) rendszer egyenletei alkotják a sekélyvízi egyenletrendszert, amely egy elsőrendű nemlineáris parciális differenciálegyenlet-rendszer. A későbbi felhasználás miatt a geopotenciált ismét kifejeztük, így az egyenletrendszer ismeretlen függvényei  $h(t, x, y)$ ,  $u(t, x, y)$  és  $v(t, x, y)$ . A feladatot az  $u_0(x, y)$ ,  $v_0(x, y)$  és  $h_0(x, y)$  kezdeti és megfelelő peremfeltételek mellett szeretnénk numerikusan megoldani az ún. Magnus-módszerrel.

## 4. A Magnus-módszer

A Magnus-féle numerikus módszer segítségével időfüggő mátrixú differenciálegyenlet-rendszerek megoldásait állíthatjuk elő, alkalmazását különböző példákon keresztül ismertetjük (*Magnus*, 1954).

Legyen a megoldandó Cauchy-feladat egy  $n$  db egyenletből álló lineáris differenciálegyenlet-rendszer a következő alakban:

$$\begin{cases} b'(t) = A(t)b(t) \\ b(0) = b_0. \end{cases} \quad (18)$$

Keressük a  $b(t) = (b_1(t), b_2(t), \dots, b_n(t))$  függvényt, amely egy  $n$  komponensű vektorértékű függvény. Az  $A$  egy  $t$ -től függő  $n \times n$ -es mátrix, és a kezdeti feltételben megadott  $b_0$  egy  $\mathbb{R}^n$ -beli vektor. A probléma megoldása  $n$  értékétől függően több esetre bomlik.

1. Először tekintsük az  $n = 1$  esetet, azaz  $A$  egy  $1 \times 1$ -es mátrix, vagyis  $A(t) = a$ ,  $a \in \mathbb{R}$  szám, és tételezzük most fel, hogy ez az  $a$  szám nem függ  $t$ -től. A feladat ekkor

$$\begin{cases} b'(t) = ab(t) \\ b(0) = b_0 \end{cases} \quad (19)$$

alakban írható fel, mely igen egyszerűen megoldható. A keresett függvény az exponenciális, hiszen ez a függvény rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy deriváltja önmaga (jelen esetben egy  $a$  valós számmal szorozva). Tehát  $b(t) = e^{at}b_0$ . Ellenőrizzük ezt:  $b'(t) = ae^{at}b_0 = ab(t)$ ,  $b(0) = e^{a \cdot 0}b_0 = e^0b_0 = b_0$ .

2. A második esetben legyen  $n > 1$ , ekkor  $A$  már egy  $n \times n$ -es mátrix, de tegyük fel újra, hogy elemei  $t$ -től független, adott számok.

Például  $n = 2$ -re egy egyenletrendszer és a hozzá tartozó  $A$  mátrix:

$$\begin{cases} b'_1 = 4b_1 - b_2 \\ b'_2 = 5b_1 + 8b_2 \end{cases} \quad (20)$$
$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

A megoldás – a példától eltekintve is – az első esethez hasonlóan  $b(t) = e^{tA}b_0$  alakban áll elő. Itt viszont az  $e^{tA}$  már nem egy szám, hanem egy  $n \times n$  mátrix exponenciálisa. Egy mátrix exponenciálisán a következő végtelen összeget értjük:

$$e^A = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \dots, \quad (21)$$

ahol  $I$  az  $n \times n$ -es identitásmátrix.

Ez alapján tehát a megoldásban szereplő  $e^{At}$  is felírható egy végtelen sor összegként, mely összeg szintén egy  $n \times n$ -es mátrix lesz:

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}. \quad (22)$$

Az  $A$  egy mátrix, normája tehát véges, ezért a (22) sornak létezik összege, melyet az  $A$  mátrix exponenciálisának nevezünk.

3. Az előző két esetben  $a \in \mathbb{R}$  és  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$   $t$ -től függetlenek voltak. Vizsgáljuk most azt az esetet, amikor az  $A$  egy  $t$ -től függő mátrix. Ekkor a (18) feladat az alábbi alakban írható fel:

$$\begin{cases} b'(t) = A(t)b(t) \\ b(0) = b_0. \end{cases} \quad (23)$$

Az első két esetből kiindulva gondolhatnánk, hogy a megoldás újra előáll  $b(t) = e^{tA(t)}b_0$  formában, ez azonban általános esetben nem igaz. 1954-ben Magnus foglalkozott azzal, hogy az exponenciális argumentumában lévő szorzatot, és ezáltal a keresett  $b(t)$  függvényt hogyan közelíthetnénk (*Magnus*, 1954). Az általa kidolgozott és róla elnevezett Magnus-módszer lényege, hogy a (23) egyenletrendszer megoldását

$$b(t) = e^{\Omega(t)}b_0 \quad (24)$$

alakban keressük, ahol  $\Omega(t)$  egy  $t$ -től függő mátrix, amely előáll egy végtelen sor összegeként. Ez a Magnus-sor, melynek első néhány tagja (*Bátkai and Sikolya*, 2012):

$$\begin{aligned} \Omega(t) = & \int_0^t A(s_1)ds_1 - \frac{1}{2} \int_0^t \left[ \int_0^{s_1} A(s_2)ds_2, A(s_1) \right] ds_1 \\ & + \frac{1}{4} \int_0^t \left[ \int_0^{s_1} \left[ \int_0^{s_2} A(s_3)ds_3, A(s_2) \right] ds_2, A(s_1) \right] ds_1 \dots, \end{aligned} \quad (25)$$

ahol  $[U, V] = UV - VU$  az  $U$  és  $V$  mátrix kommutátorát jelöli. Az  $\Omega(t)$  mátrix tagjait ezen analógia szerint a végtelenig írhatnánk, és minél több tagot tartalmaz,

annál bonyolultabb, de természetesen annál pontosabban is kapjuk meg a megoldás numerikus közelítését.

Látjuk, hogy a végtelen sor az  $A$  mátrix integráljaiból és  $A$  különböző helyeken vett kommutátorainak integráljaiból áll. A második tagban  $A(s_1), A(s_2)$  kommutátorát kell integrálnunk, vagyis az  $A(s_1)A(s_2) - A(s_2)A(s_1)$  kifejezést, figyelembe véve, hogy egy mátrixot elemenként integrálunk. Megjegyezzük, hogy a gyakorlatban a Magnus-integrátorokban szereplő integrálokat általában csak közelítőleg, valamilyen numerikus integrálási séma alkalmazásával tudjuk kiszámolni, ahogy a dolgozat további részeiben is tesszük.

Keressük tehát az  $\Omega(t)$  mátrix valamilyen egyszerűbb alakú közelítését. A Magnus-sorfejtés első tagjában szereplő integrált a középponti módszerrel közelítve az

$$\Omega(t) \approx t \cdot A\left(\frac{t}{2}\right) \quad (26)$$

közelítéshez jutunk. Ekkor

$$b(t) = e^{\Omega(t)}b_0 \approx e^{tA(\frac{t}{2})}b_0. \quad (27)$$

Ez a közelítés csak kis  $t$  esetén kellően pontos, ezért a módszert szakaszonként alkalmazzuk. Osszuk fel a  $[0, t]$  intervallumot  $N \in \mathbb{N}$  darab  $\tau = t/N$  hosszúságú lépésközre, így  $n\tau$  az a hely, ahol  $n$  lépésszám után állunk. Alkalmazzuk az  $n$ -edik részintervallumon is a középponti módszert. Ekkor a (23) feladat megoldásvektora felírható  $b(n\tau) = e^{n\tau A(n\tau + \frac{\tau}{2})}b_0$  alakban, mely a hatványozás azonosságait felhasználva előáll  $b(n\tau) = e^{\tau A(n\tau + \frac{\tau}{2})}b((n-1)\tau)$  formában. Legyen  $b(n\tau) =: b_n$ , ezt bevezetve az előzőek alapján felírható a  $b_{n+1}$  megoldásvektor is:

$$b_{n+1} = e^{\tau \cdot A(n\tau + \frac{\tau}{2})}b_n, \quad n = 0, 1, 2 \dots \quad (28)$$

Ez a megoldásvektor az elsőrendű Magnus-féle közelítés. Munkánk során alkalmaztuk még az eggyel bonyolultabb iterációs eljárást is. Ez először a  $t = (t_n + \frac{\tau}{2})$ -ben számítja ki a megoldást, majd ezt használja az  $(n+1)$ -edik lépés megoldásához, a következő módon:

$$\begin{cases} b_{n+\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\tau \cdot A(n\tau + \frac{\tau}{4})}b_n \\ b_{n+1} = e^{\tau \cdot A(n\tau + \frac{\tau}{2})}b_{n+\frac{1}{2}} \end{cases} \quad n = 0, 1, 2 \dots \quad (29)$$



A numerikus megoldás egy olyan vektort eredményez, amely függ a  $\tau$  lépésköztől. A (29) összefüggéshez megadunk egy  $b_0$  kezdeti értéket, majd ebből számítjuk a  $b_1, b_2, \dots, b_{n+1}$  megoldásvektorokat, ahol  $n$  értékét természetesen mi választjuk meg.

Látható, hogy a számításaink során szükségünk van egy – az adott feladattól függő – mátrix exponenciálisának megadására, ezt követően pedig az exponenciálisvektor szorzat minél hatékonyabb kiszámítására, ami a gyakorlatban csak közelítéssel lehetséges.

## 5. Korábbi eredmények, újabb célkitűzések

A dolgozat további részeiben vizsgáljuk a Magnus-módszert. Célunk egy jó időbeli numerikus módszer megalkotása a sekélyvízi egyenletrendszerre.

Egy numerikus közelítés akkor jó, ha:

- i. Konzisztens, vagyis az egy időlépés során, a pontos kezdeti feltételből indulva elkövetett hiba a lépésköz nullához tartásával tart nullához.
- ii. Stabil, azaz egy kezdetiérték-feladatban, ha a kezdeti feltétel csak kis hibával terhelt, akkor az idő előrehaladtával ez a hiba ne nőjön ki a végtelenbe.
- iii. Konvergens, azaz  $\tau$  nullához tartásával a numerikus megoldás tart a pontos megoldáshoz.
- iv. Hatékony, azaz a lehető legkisebb a számításigény.

Korábbi munkánk során vizsgálatokat végeztünk az egyenletrendszer numerikus megoldásának gyorsaságára és hatékonyságára vonatkozóan. Elsőként az egydimenziós, lineáris advekción egyenlettel foglalkoztunk, mely

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -c \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (30)$$

alakban írható fel, és leírja a légköri transzport folyamatokat  $\xi(x, t)$  ismeretlen függvény és  $c$  terjedési sebesség esetén. Azért választottuk ezt az elsőrendű hiperbolikus parciális differenciálegyenletet, mert a sekélyfolyadék-egyenletek is ehhez hasonló tagokból állnak.

A (30) egyenlet numerikus megoldásához elsőként térbeli diszkretizációt végeztünk. A cél az volt, hogy a (30) egyenletben szereplő  $\xi(x, t)$ -nek megfeleltessünk egy olyan  $m$  függvényt, amely a

$$\frac{dm}{dt} = A \cdot m \quad (31)$$

szemidiszkrét feladat megoldására vezet. Tehát a térbeli  $[0, 1]$  intervallumot  $J$  db részre osztottuk,  $\Delta x$  lépésközzel, ilyen módon a  $j$ -edik ( $j = 1, 2, \dots, J$ ) osztópontban, azaz  $x_j$ -ben definiáltuk a  $\xi(t, x_j) =: m_j(t)$  értéket. Ezt követően alkalmaztuk a bal és jobb oldali véges különbségeket (upwind séma), amely a következő szemi-diszkrét egyenletekre vezet:

- ha  $c < 0$ :

$$Am_j = -c \cdot \frac{m_{j+1} - m_j}{\Delta x}, \quad (32)$$

- ha  $c > 0$ :

$$Am_j = -c \cdot \frac{m_j - m_{j-1}}{\Delta x}. \quad (33)$$

Jól leolvasható a (32)-(33) egyenletekből, hogy  $A$  egy tridiagonális mátrix lesz. A  $c < 0$  esetben a mátrix főátlójában  $-1$ -esek, a felső mellékátlójában  $1$ -esek találhatóak, míg  $c > 0$  esetben a főátlójában  $1$ -esek, alsó mellékátlójában pedig  $-1$ -esek találhatóak. Ezzel az elkészült  $J \times J$  mátrixszal szorozva a  $J$  hosszú  $m$  vektort kapjuk a  $\frac{dm}{dt}$  értéket, melyre a Magnus-féle közelítést alkalmazva az

$$m(t) = e^{tA} m(0). \quad (34)$$

megoldásra jutunk, ahol  $m(0)$  a kezdeti feltételből származó kezdeti vektor.

A megoldáshoz itt is szükség van immár az időbeli felosztásra, az  $[a, b]$  időintervallumot  $n$  darabra osztjuk fel  $\Delta t$  lépésközzel, és úgy alkalmazzuk a Magnus-módszert.

A megoldáshoz szükség volt tehát egy mátrix exponenciálisának egy vektorral való szorzására. A Magnus-módszer összes alkalmazását MATLAB programrendszerben végeztük, ahogyan ezen dolgozat során is, és itt a mátrixexponenciális számításának hatékonyságára több kísérletet végeztünk.

A beépített `expm` függvény a mátrixexponenciális közelíti, nekünk minden időlépésben ezt még egy vektorral kell szoroznunk a megoldásvektor meghatározásához, azaz minden időrétegen egy mátrixexponenciális és egy vektor szorzatára van szükségünk. Ez motiválta az `expmv` függvény használatát, mely egy mátrixexponenciális és egy vektor szorzatát adja eredményül, igen hatékony módon (*Al-Mohy and Higham, 2011*).

Többféle feladaton végzett próbafuttatások eredményeként megállapítottuk, hogy kisméretű mátrixok esetén az `expm`, míg nagyobb méretűek esetén az `expmv` volt hatékonyabb. Megmutattuk továbbá, hogy a sekélyfolyadék-egyenletek megoldása során a térbeli diszkretizációkból igen nagy méretű blokkmátrixok adódnak – ezt ezen dolgozat további részében is látni fogjuk –, így célszerűbb az `expmv` függvény alkalmazása. Jelen dolgozatban ezt az eredményt felhasználva csak az utóbbi függvényt használjuk.

Ezen információk tudatában diszkretizáltuk – térben az upwind, időben pedig a Magnus-módszert alkalmazva – az egydimenziós lineáris, illetve a nemlineáris sekélyvízi egyenletrendszer, majd megadtuk ezek megoldását.

Azt tapasztaltuk, hogy csak igen nagy kezdeti  $u(x, 0)$  sebesség és  $h(x, 0)$  magasság esetén működik a módszer, ez nagyjából 100-as nagyságrendű értékeket jelentett, 10-es nagyságrendekre oszcillációt tapasztaltunk. Ezen túl azt láttuk, hogy egyfajta disszipáció is megjelenik, melyet úgy észleltünk, hogy ha  $u(x, 0) = 0$  értékről indulunk, adott  $h(x, 0)$  magasságból, akkor fizikailag mi egy  $h$  magasságú hullámot a gravitáció hatására indítunk el, mind lineáris, mind nemlineáris esetben.

Ennek megfelelően azt szeretnénk, hogy a hullám magasságának folyamatos csökkenése után váljon szét, és két púpként két irányban folytassa az útját. Ennek ellenére, a nulla sebességből indítva is folyamatos áthelyeződést tapasztaltunk, miközben a hullám kettévált. Ezt a térbeli diszkretizáció hibájának tudtuk be.

Útelágazás előtt állva úgy döntöttünk, megvizsgáljuk a Magnus-módszer stabilitását és konvergenciáját. Ahogyan azt már említettük, a cél egy jó numerikus módszer megalkotása, és ahogyan azt az alkalmazott analízis alapköve, a Lax-Richtmeyer tétel kimondja, ha egy parciális differenciálegyenlet numerikus megoldása – amennyiben a feladat korrekt kitűzésű – konzisztens, akkor pontosan akkor konvergens, ha stabil is (*Smith*, 2010). Mindemellett, figyelve a számításigényre, már készen is van a Magnus-módszer a hiperbolikus sekélyvízi egyenletrendszerre.

## 6. Konvergencia

### 6.1. A Magnus-módszer konvergenciája

A Magnus-módszer (24)-ben felírt alakját használva szeretnénk feltételt adni a konvergenciára.

A Magnus-módszer különlegessége abban rejlik, hogy bár a módszerben használatos  $\Omega(t)$  mátrix, melynek exponenciálisát közelítjük, egy igen hosszúságú számításokkal – kommutátorok, és ezek integráljainak összegeként, (25) szerint – előálló végtelen sor, ez mégsem jelent problémát. Ugyanis a (25) algoritmus a strukturális tulajdonságait a csonkolás során is megőrzi, így bátran használható kevesebb tag is, nem szükséges az egész végtelen sor.

Tekintsük  $\Omega_1(t) = \int_0^{\Delta t} A(s) ds$  értéket, azaz a végtelen sor első elemét (*Blanes et al.*, 1998). Ekkor a módszer konvergenciájára az alábbi feltétel adható (*Moan et al.*, 1999)

$$\int_0^{\Delta t} \|A(s)\| ds < \frac{1,086869}{\mu}. \quad (35)$$

Itt  $\mu$  egy algebrai állandó, értéke valós térben 1, a használt norma pedig a Frobenius-norma.

A következtetés tehát az, hogy a megoldás során nekünk ahhoz, hogy a numerikus közelítés konvergáljon a pontoshoz, a térbeli diszkretizáció által adott, a feladatra vonatkozó mátrixunk Frobenius-normájára van szükség. Ennek ismeretében könnyen kiszámolható a (35) értéke.

### 6.2. A konvergencia rendje

A numerikus megoldás létezésén és konvergenciáján kívül szeretnénk tudni a konvergencia rendjét is.

Induljunk ki (18)-ból. Legyen  $b_\tau(t)$  a numerikus módszer térbeli rácshálóján – melynek lépésköze  $\tau$  – előállított megoldás, és legyen  $b(t)$  a feladat pontos megoldása. Mivel parciális differenciálegyenletről van szó,  $b_\tau(t)$  és  $b(t)$  értékét vektorokként értelmezzük.

Ekkor azt mondjuk, hogy a numerikus megoldás konvergál a pontos megoldáshoz az értelmezési tartomány egy  $t^*$  belső pontjában, ha  $t^*$  az időbeli felosztás egy pontja is, illetve

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \|b_\tau(t_n) - b(t^*)\| = 0, \quad (36)$$

az időbeli felosztás  $n$ -edik pontjában, ahol  $n = (t^* - t_0)\tau$ , azaz az időbeli felosztás  $n$ -edik pontjában a  $\tau$  lépésköz finomításával a numerikus közelítés a pontoshoz tart. A numerikus módszer konvergencia, ha konvergencia minden  $t^*$  pontban.

Az előző jelölések alapján a módszer  $p$ -ed rendben konvergencia, ha

$$\|b_\tau(t_n) - b(t^*)\| = \mathcal{O}(\tau^p) \quad (37)$$

teljesül (*Faragó and Horváth*, 2013).

Látható, hogy szükség van a pontos megoldásra a konvergenciarend kiszámításához. Ez a vizsgált esetekben csak korlátozottan áll rendelkezésre. Tehát a lineáris advekción egyenlet esetében, illetve a nemlineáris advekción leíró Burgers-egyenlet esetén (a nemlineáris advekción) tudjuk vizsgálni a konvergenciát, azonban a sekélyvízi egyenletrendszer egy- illetve kétdimenziós változatának nem ismeretes az analitikus megoldása.

Tekintsük a numerikus közelítést  $\Delta x$  térbeli és  $\Delta t$  időbeli lépésközzel. Ekkor térbeli rendre a  $p_x$ , az időbelire pedig a  $p_t$  jelölést használva a közelítés felírható a

$$b_{\Delta x, \Delta t}(x, t_N) = b(x, t_N) + r_1(x, t_N)(\Delta x)^{p_x} + r_2(x, t_N)(\Delta t)^{p_t} + \dots \quad (38)$$

alakban, ahol a magasabb rendű tagokat elhagyhatjuk. Ahogyan eddig is,  $b(x, t_N)$  adja a pontos megoldást az utolsó időrétegen, az  $x$  térbeli rácspontban. Az  $r_1$  és  $r_2$  értékei nem függenek a tér- és időbeli diszkretizáció paramétereitől.

Alkalmazzuk ugyanezt a numerikus módszert, és adjunk megoldást az utolsó  $t_N$  időrétegen a  $(\Delta x, \Delta t_1)$ ,  $(\Delta x, \Delta t_2)$  lépésközöket használva. Azaz alkalmazzunk három időbeli lépésközt ugyanazon térbeli lépésköz mellett. Ekkor a további két megoldás a

$$\begin{aligned} b_{\Delta x, \Delta t_1}(x, t_N) &= b(x, t_N) + r_1(x, t_N)(\Delta x)^{p_x} + r_2(x, t_N)(\Delta t_1)^{p_t} + \dots, \\ b_{\Delta x, \Delta t_2}(x, t_N) &= b(x, t_N) + r_1(x, t_N)(\Delta x)^{p_x} + r_2(x, t_N)(\Delta t_2)^{p_t} + \dots \end{aligned} \quad (39)$$

alakban írható fel (*Richards*, 1997).

Felhasználva (38) és (39) egyenleteket a

$$\frac{\|b_{\Delta x, \Delta t} - b_{\Delta x, \Delta t_1}\|}{\|b_{\Delta x, \Delta t_1} - b_{\Delta x, \Delta t_2}\|} \approx \frac{|(\Delta t)^{p_t} - (\Delta t_1)^{p_t}|}{|(\Delta t_1)^{p_t} - (\Delta t_2)^{p_t}|} \quad (40)$$

összefüggést kapjuk. Ebben viszont számunkra csak az időbeli séma konvergenciájának rendje, azaz  $p_t$  az ismeretlen, mivel a  $\Delta t, \Delta x, \Delta t_1, \Delta t_2$  értékeket a diszkretizáció során mi választjuk meg, illetve a numerikus megoldás értéke is ismert.

Tehát olyan feladatoknál, melyeknél a pontos megoldás nem ismert – így például az egy- és kétdimenziós sekélyfolyadék-egyenletek numerikus közelítése során –, használható a (40), mely tehát egy numerikus konvergenciarend számító séma (*Banks and Aslam, 2013*).

Azonban  $p_t$  értéke analitikus módon nem fejezhető ki, ezért egy numerikus iterációt kell használnunk. A kísérletek során ehhez a Newton-iterációt alkalmaztuk, mely az  $F(x) = 0$  alakú egyenletek megoldását adja meg. Egy tetszőleges  $x_0$  pontból indítva az iterációt,  $n$  db iterációs lépés után kellően közel kerülünk a megoldáshoz, az

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)} \quad (41)$$

algoritmust használva. A (40) kifejezést nullára rendezve megkapjuk a szükséges  $F(p_t)$ -t és az iteráció elvégzése után az időbeli konvergenciarendet, azaz a  $p_t$  értékét is.

Ahhoz, hogy meggyőződjünk róla, hogy ez a módszer valóban jó rendet ad, azon feladatokra is végeztünk tesztek, amelyeknek pontos megoldása ismert, azaz az advektációs egyenletre. Ezt követően tehát a (40) - (41) összefüggéseket használva számítottuk ki a kísérletek során az egy- ill. kétdimenziós sekélyvízi egyenletrendszer konvergenciarendjét.

Miután a Magnus-módszer konvergenciarendjét már ismerjük, olyan módszert keresünk, amely lehetővé teszi, hogy még pontosabb megoldást állítsunk elő. Ezzel foglalkozunk a következő fejezetben.

### 6.3. Richardson-extrapoláció (RE)

Ismert tehát a Magnus-módszer a hiperbolikus feladatra, és tudjuk, hogy  $p_t$ -ed rendben konvergens.

A Magnus-módszer időbeli integrálási módszer, így legyen most  $p_t$  a Magnus-módszer konvergenciarendje. Tekintsük újra a  $t = t_n$  pontban a  $\Delta t$  lépésközű rácson a

$$b(t_n) = b_{\Delta t}(t_n) + r(\Delta t)^{p_t} + \mathcal{O}(\Delta t^{p_t+1}) \quad (42)$$

megoldást.

Az ötlet az, hogy alkalmazzuk a numerikus megoldást egy finomabb ( $\Delta t_1 < \Delta t$ ) lépésközű időbeli rácson is, de a durvább rácson kapott megoldást is használjuk fel, tehát kombináljunk egy durvább és egy finomabb közelítést egy új numerikus megoldás előállításához.

A finomabb rácson vett közelítés kielégíti a

$$b(t_n) = b_{\Delta t_1}(t_n) + r(\Delta t_1)^{p_t} + \mathcal{O}(\Delta t^{p_t+1}) \quad (43)$$

egyenletet. Képezzük a két numerikus megoldás lineáris kombinációját:

$$b_{komb}(t_n) = K_1 b_{\Delta t}(t_n) + K_2 b_{\Delta t_1}(t_n) \quad (44)$$

kombinált megoldásra vonatkozó összefüggést.

A két numerikus megoldás ismert, a kérdés, hogy a  $K_1$  és  $K_2$  súlyokat hogyan válasszuk meg. A (44) felírható a

$$b_{komb}(t_n) = (K_1 + K_2)b(t_n) - (K_1\Delta t^{p_t} + K_2\Delta t_1^{p_t})r + \mathcal{O}(\Delta t^{p_t+1}) \quad (45)$$

formulával. A fentiek alapján szükséges:

- $K_1 + K_2 = 1$  a konvergenciához, illetve
- $K_1\Delta t^{p_t} + K_2\Delta t_1^{p_t} = 0$  a  $p_t + 1$  rend eléréséhez.

A két feltételből következik, hogy a keresett súlyok a következők lesznek:

$$\begin{cases} K_1 = -\frac{(\Delta t_1)^{p_t}}{(\Delta t)^{p_t} - (\Delta t_1)^{p_t}}, \\ K_2 = 1 - K_1. \end{cases} \quad (46)$$

Speciálisan, ha  $\Delta t_1 = \frac{\Delta t}{2}$  akkor, ha a kombinált módszer

- elsőrendű, azaz  $p_t = 1$ , ha  $K_1 = -1, K_2 = 2$ ,
- másodrendű, azaz  $p_t = 2$ , ha  $K_1 = -\frac{1}{3}, K_2 = \frac{4}{3}$ .

Megkülönböztetünk aktív és passzív Richardson-extrapolációt.

A passzív esetén, miután elkészítettük mindkét numerikus közelítést, a  $\Delta t$  illetve a  $\Delta t_1$  lépésközzel is, elkészítjük a kombinált megoldást. Azonban a következő időrétegen csak a finom és a durva rácshálón elkészített megoldással számolunk tovább. Tehát a kombinált megoldást minden időrétegen elkészítjük, de mindig felülírjuk az előző időrétegen vett megoldást, anélkül, hogy azt felhasználnánk az újhoz.

Az aktív RE esetén ezzel szemben a durva rács minden egyes időrétegen a kombinált megoldásból lépünk tovább. Tehát aktív RE esetén a kombinált értéket minden időrétegen újra felhasználjuk (*Burg and Erwin, 2008*).



Jelen dolgozatban a kapott konvergenciarendet az aktív Richardson-extrapolációval kísérletezve vizsgáltuk, várva a rend növekedését.

A Magnus-módszerre általunk is alkalmazott aktív Richardson-extrapoláció a következőképpen írható fel:

$$b_1((n+1)\Delta t) = e^{\Delta t \cdot A(n\Delta t)} b_0, \quad (47)$$

$$b_2((n+1)\Delta t) = e^{\frac{\Delta t}{2} \cdot A(n+0.5\Delta t)} e^{\frac{\Delta t}{2} \cdot A(n\Delta t)} b_0, \quad (48)$$

$$b((n+1)\Delta t) = 2b_2((n+1)\Delta t) - b_1((n+1)\Delta t). \quad (49)$$

Hogyan is értelmezhető ez?

A jelölésben továbbra is  $b$  fejezi ki a megoldásvektort,  $A$  a diszkretizációból származó, feladattól függően konstans vagy időtől függő mátrix,  $\Delta t$  az időbeli felosztás lépésköze és  $n$  adja meg, hogy hányadik időpillanatról van szó a durva időbeli rácson.

Elsőként szükség van a kezdeti vektorra, amelyet  $b_0$  ad meg. Ezen vektorral és tudva azt, hogy ez a lépés  $\Delta t$  hosszúságú, legyártjuk a numerikus módszer megoldásvektorát, ezt  $b_1$  jelöli. Ugyanezen az időrétegen – egyelőre az első –, hasonló módon létrehozunk egy másik megoldást, annyi különbséggel, hogy míg előbb  $\Delta t$  hosszúságút léptünk, most a csizmánkkal kisebb lépésekben menetelünk előre.

A kísérletek során ez a lépésköz pontosan  $\frac{\Delta t}{2}$  volt, ami persze azt jelenti, hogy ezt a megoldást kétszer annyi időrétegen kell majd előállítani.

Maradjunk először az első időrétegen, itt egy  $\Delta t$  nagyságú lépéssel, és két darab  $\frac{\Delta t}{2}$  hosszúságú lépéssel kaptunk egy megoldást. Ezek lineáris kombinációjaként kerül ki maga  $b((n+1)\Delta t)$  megoldás is, a (49) összefüggés szerint. Ez azonban az első időréteg, mi történik a további időpontokban? Hasonlóan áll elő a megoldás, azzal a különbséggel, hogy a második időrétegen már nem a kezdeti vektort használjuk, hanem az első durva lépés után kapott kombinált megoldást.

Fontos arra is figyelmet szentelni, hogy a mátrix, amennyiben időtől függ, minden időpillanatban változik,  $\Delta t$  értékétől is függő objektum. A Richardson-extrapoláció Magnus-módszerbe való beépítésének numerikus kísérleteiről részletesen a következő fejezetekben olvashatunk.

## 7. Eredmények

### 7.1. Az advekciós egyenlet

#### 7.1.1. Numerikus módszer

Keressük azt a  $\xi$  függvényt, amely kielégíti a

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -c \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad c \in \mathbb{R}, \quad x \in [0, \pi] \quad (50)$$

egyenletet a

$$\xi(x, 0) = \xi_0(x) \quad (51)$$

kezdeti feltétel és a

$$\xi(0, t) = \xi(\pi, t) \quad (52)$$

periodikus peremfeltétel mellett.

Az elsőrendű, hiperbolikus, parciális differenciálegyenlet numerikus megoldásához térbeli, majd időbeli diszkretizációra van szükség. Legyen  $\Delta t$  időbeli lépcső mellett  $\Delta x > 0$  a térbeli ugrás.

Ha a  $[0, \pi]$  intervallumot  $J$  db részre osztjuk, akkor a  $j$ -edik osztópont az  $x_j := (j - 1) \cdot \Delta x$  pont lesz ( $j = 1, 2, \dots, J + 1$ ).

Diszkretizáljuk térben a  $\xi(x, t)$  függvényt, és vezessük be az

$$m_j(t) := \xi(x_j, t) \quad (53)$$

jelölést, valamint definiáljuk az  $m(t)$  vektort a következőképpen:

$$m(t) = \begin{pmatrix} m_1(t) \\ m_2(t) \\ \vdots \\ m_J(t) \end{pmatrix}. \quad (54)$$

A feladatban a Magnus-módszer alkalmazásával keressük a (18)-ban már bevezetett alakban az  $m(t)$  vektort. Ezek alapján  $m(t)$  időderiváltja és a megoldás a következő módon írható fel:

$$\begin{aligned} m'(t) &= Am(t), \\ m(t) &= e^{tA}m(0). \end{aligned} \quad (55)$$

Az (51)-ből  $\xi(0)$  ismert,  $m(0)$  ezen  $\xi(0)$  kezdeti, tértől függő függvény rácsponti értékeiből álló vektor. A kérdés: hogyan áll elő az  $A$  mátrix?

Térbeli diszkretizációs sémánknak – a korábbi bal és jobb oldali véges külön-ségek helyett – a középponti módszert választottuk, amely a következőképpen áll elő:

$$\frac{dm_j}{dt} = \frac{m_{j+1} - m_{j-1}}{2\Delta x}. \quad (56)$$

Jól leolvasható, hogy az  $m(t)$  vektor  $j$ -edik elemének közelítéséhez milyen értékekre van szükség, így tehát az (56) megadja nekünk az  $A$  mátrixot; ez egy olyan tri-diagonális mátrix, melynek főátlójában 0-k, alsó mellékátlójában  $-1$ -esek, a felső mellékátlójában pedig  $1$ -esek találhatóak. A mátrix méretét tekintve  $J \times J$  nagyságú. Készen van tehát az a mátrix, melynek exponenciálisát keressük, és ezt kell majd szoroznunk a megoldásvektorral, a Magnus-féle módszer szerint.

Egyetlen dolog hiányzik már csak, mégpedig az (52) által megadott peremfeltétel beépítése a mátrixba.

Gyakorlatban ezen feladat megoldása egy, a  $c$  értékétől függő irányban mozgó Gauss-csúcs. A periodikus perem azt mondja meg, hogy a jelenleg  $[0, \pi]$  intervallumon megadott megoldás értékek közül, amennyiben a csúcs a  $0$  felé közlekedik, akkor jöjjön vissza a  $\pi$  irányából, ha pedig  $\pi$  felé, akkor a  $0$  irányából.

A diszkretizációnk alapján ez az első, és az utolsó  $m_j$  értéket érinti:

$$\frac{dm_1}{dt} = \frac{m_2 - m_0}{2\Delta x}, \quad \frac{dm_J}{dt} = \frac{m_{J+1} - m_{J-1}}{2\Delta x}. \quad (57)$$

Látjuk, hogy  $m_1$  értékéhez szükség lenne  $m_0$  értékére is, azonban az (54) mutatja, hogy  $m_0$  nem áll rendelkezésre. A periodikus peremfeltétel miatt,  $m_0$  helyett  $m_J$  értékét használjuk, hasonlóan kell eljárunk az  $m_J$  értékének elkészítésekor is, azaz a vektor utolsó koordinátájához szükség lenne egy utolsó utánira, ami helyett szintén a periodikus perem miatt az első értéket vesszük.

Mindezek alapján az  $A$  mátrix egy kicsit megváltozik; a peremfeltétel beépítésével az első sor utolsó eleme, illetve az utolsó sor első eleme  $0$ -tól különböző értéket tartalmaz, illetve nem szabad megfelelni az  $\frac{1}{2\Delta x}$  szorzóról, és az advekciónak irányát

meghatározó  $c$  sebességről sem:

$$A = -\frac{c}{2\Delta x} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (58)$$

Ismert, hogy a feladat pontos megoldása előáll a kezdeti feltételként megadott  $\xi_0$  differenciálható függvény  $(x - ct)$  pontban vett értékeként. Legyen a kezdeti függvény

$$\xi_0(t) = e^{-2,5(x-x_0)^2} \cdot x \cdot (\pi - x). \quad x_0, b \in \mathbb{R}, \quad (59)$$

Így egy tetszőleges helyen és időpillanatban a pontos megoldás megadható  $\xi(x, t) = \xi_0(x - c \cdot t)$  alakban.

Ez azt jelenti, hogy a kiindulási függvényünk az idő előrehaladtával  $c$  értékétől függően változik. Helyben marad, ha  $c = 0$ , ha  $c > 0$ , akkor az  $x$  tengelyen pozitív irányba, ha pedig  $c < 0$ , akkor negatív irányba tolódik el.

Mivel ismert a feladat pontos megoldása is, ezért a numerikus és a pontos megoldás hibájából kiindulva a (37) összefüggést alkalmazva a konvergencia rendje megadható. Természetesen használható a (40) numerikus rendszámítás is.

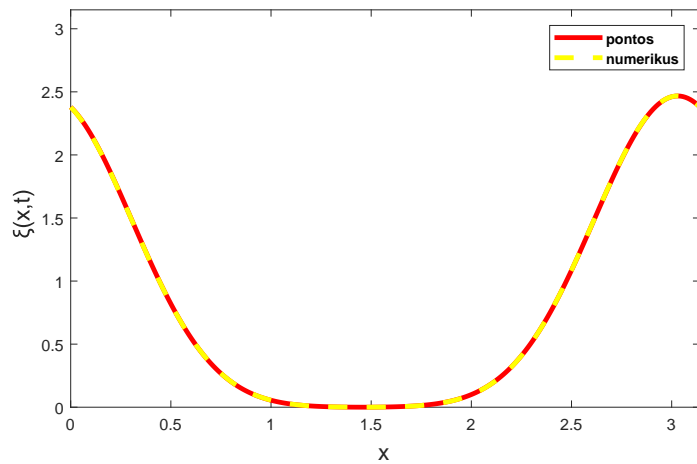
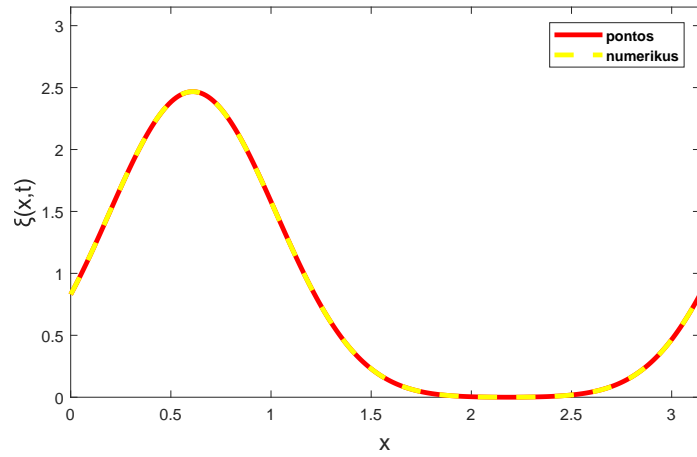
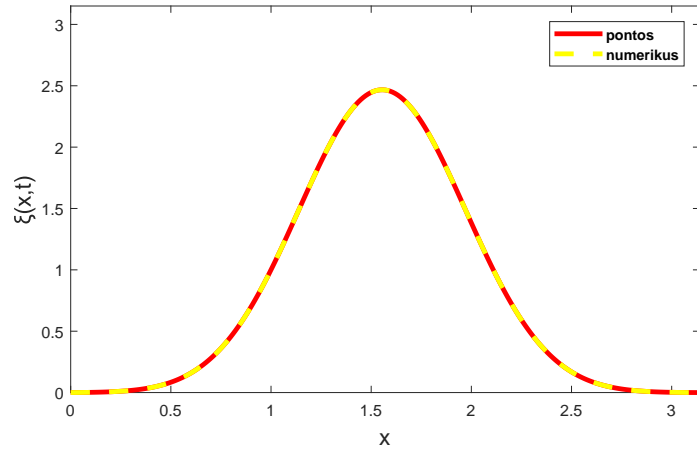
### 7.1.2. Megvalósítás

Minden útravalóval felvértezve nincs más hátra, mint megoldani az egyenletet numerikusan, és vizsgálni a stabilitást, illetve a rendet.

Az 1. ábra mutatja a kapott eredmény időbeli változását, ügyelve a stabilitási feltételre (*Stoyan and Takó, 2008*):

$$\Delta t < \frac{\Delta x}{|c|}. \quad (60)$$

A  $[0, \pi]$  térintervallumot  $2^8$  részre osztottuk, időben pedig  $N = 500$  lépést tettünk,  $c = -2$  sebesség értéket választva. Jól látható, hogy a pontos és a numerikus megoldás végig tökéletesen együtt mozog. A kezdetben definiált Gauss-csúcs a választott sebességnek megfelelő irányba,  $c = -2$  miatt most balra indul. A peremet



1. ábra: A lineáris advekciós egyenlet megoldása térben középponti, időben Magnus-módszerrel,  $n = 4$ ,  $n = 240$  és  $n = 420$  időpillanatokban.

elérve a periodikus peremfeltétel miatt a másik oldalon ugyanaz a hullám jön vissza. Ezt a jelenséget több perióduson keresztül is láthatjuk időben kellően sokat lépve.

### 7.1.3. Konvergencia

Ahogy az 1. ábrán is láttuk, a pontos és a numerikus megoldás az idő előrehaladtával teljesen együtt mozog. Az advekción egyenlet lineáris, a Magnus-módszerrel a numerikus megoldás során teljesen pontosan integrálunk, a módszer ebben az esetben „végtelen” rendűnek is tekinthető.

Célunk természetesen a sekélyfolyadék-egyenletek megoldása és vizsgálata. Tudjuk, hogy az egyenletrendszerben nemlineáris advekción tagok szerepelnek, vizsgáljuk meg tehát, hogy hogyan viselkedik az advekción egyenlet a nemlineáris esetben.

## 7.2. A Burgers-egyenlet

A Burgers-egyenlet egy olyan nemlineáris parciális differenciálegyenlet, melyet igen sok helyen használnak. Felhasználása többek között a sekélyvízi hullámterjedésben és a magnetohidrodinamikában jelentős.

Az egyenlet egy hiperbolikus egyenlet, amely a már tárgyalt advekcióntól annyiban különbözik, hogy a  $c$  állandó terjedési sebességet kicseréljük magára az ismeretlen függvényre. Ez már időfüggő lesz – az ezzel való szorzásból adódik az egyenlet nemlinearitása.

Tekintsük tehát a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad x \in [0, \pi] \quad t \in [0, 1] \quad (61)$$

egyenletet, az alábbi kezdeti és periodikus peremfeltétel mellett:

$$\varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \quad (62)$$

$$\varphi(0, t) = \varphi(\pi, t). \quad (63)$$

Az egyenlet különlegessége, hogy szakadásmentes kezdeti feltétel megadása mellett a megoldásban szakadást tapasztalhatunk.

Az egyenlet megoldásában – ahogyan a valóságban is – a hullám egyes részei nem azonos sebességgel haladnak. A hullám tehát, ahogyan a lineáris advekción egyenletnél láttuk, elindul, de egy idő után a hullámcsúcs nagyobb sebességgel halad, a hullám ebből kifolyólag torzulni – dőlni fog. Ez a sebességkülönbség és torzulás akkora is lehet, hogy lökéshullám (shockwave) alakulhat ki (*Garabedian*, 1964). Ez a lökéshullám egy olyan rész, ahol a sebesség tér szerinti deriváltja a végtelenhez tart.

A (61) egyenlet pontos megoldása tehát függ az időtől, és előáll

$$\varphi(x, t) = \varphi_0(x - \varphi(x, t) \cdot t) \quad (64)$$

alakban, ahol  $\varphi_0$  az általunk megadott kezdeti függvény, esetünkben:

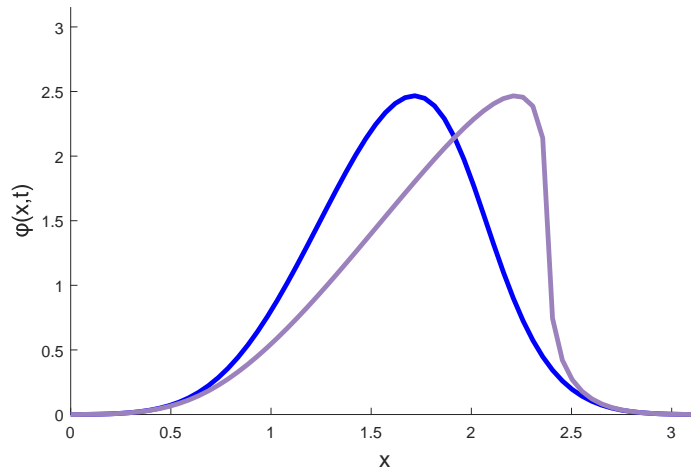
$$\varphi_0(t) = e^{-2,5(x-x_0)^2} \cdot x \cdot (\pi - x) \quad x_0 \in \mathbb{R}. \quad (65)$$

Látható azonban, hogy a megoldás előállításához szükség van magára a megoldásra is. Ehhez viszont bármelyik iterációs eljárás pár lépését könnyen eszközül vehetjük.

Tekintsük tehát a kezdeti  $\varphi_0$  függvényt, legyen ő a kezdeti vektorunk. Ezt követően a

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, t) &= \varphi_0(x - \varphi_0(x, t) \cdot t) \\ \varphi_2(x, t) &= \varphi_0(x - \varphi_1(x, t) \cdot t) \\ \varphi_3(x, t) &= \varphi_0(x - \varphi_2(x, t) \cdot t) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (66)$$

iteráció pár lépését elvégezve a megoldás közelítőleg:  $\varphi(x, t) = \varphi_{final}(x, t)$ , ahol  $\varphi_{final}(x, t)$  az utolsó iterált. Egy másik lehetőség a Newton-féle iteráció használata, mi is ez utóbbit alkalmaztuk.



**2. ábra: A Burgers-egyenlet Newton-iterációval megadott pontos megoldása,  $n = 4$ (kék) és  $n = 135$ (lila) pontban.**

A 2. ábra mutatja, hogy a hullám a vártak megfelelően elindul, kialakul a hullámbeli sebességkülönbség. Későbbi időpontban a megoldáson már észrevehető az oszcilláció, ami a lökéshullám kialakulását jelenti.

### 7.2.1. Megvalósítás

Természetesen a cél az egyenlet numerikus megoldása térben középponti, időben Magnus-módszerrel.

Újra szeretnénk elvégezni a tér- és időbeli diszkretizációt, hogy tudjuk alkalmazni a Magnus-féle közelítést. Ahogyan már ismertettük, úgy jutunk a numerikus megoldáshoz, hogy térben  $J$  db felosztást készítve, egy  $J$  hosszúságú vektort kell egy  $J \times J$  nagyságú mátrixszal szoroznunk  $N$ -szer, ahol  $N$  az időintervallum felosztása.

Szerencsére ismét az a kérdés, hogy mi ez a mátrix, amivel a vektort  $N$ -szer szorozva a megoldás előáll. A válasz pedig könnyen megadható, hasonló alakban írjuk fel, mint az (58)-ban tettük, viszont ügyelnünk kell arra, hogy eddig egy  $A$  időtől független mátrixunk volt, most azonban egy  $A(t)$  dinamikusan változó mátrixszal kell dolgoznunk. Az (58) mátrix elemeit úgy kell kicserélnünk, hogy  $c \in \mathbb{R}$  konstans érték helyett most  $\varphi(x, t)$  érték szerepeljen.

Jelölje a  $\varphi$   $J$  darab rácsponti értékét a  $\chi$  vektor, a  $j$ -edik rácsponton vett értékét pedig  $\chi_j$ . Ez a  $\chi$  vektor tehát minden időrétegen számítandó, és az  $(i+1)$ -edik időréteg megoldásához az  $i$ -edikre szükség van, nemcsak a mátrix-vektor szorzatban lévő vektor miatt, hanem az egyenlet nemlinearitása miatt is, hiszen a mátrixban az elemek minden időrétegen újra és újra cserélődnek az alábbi alapján:

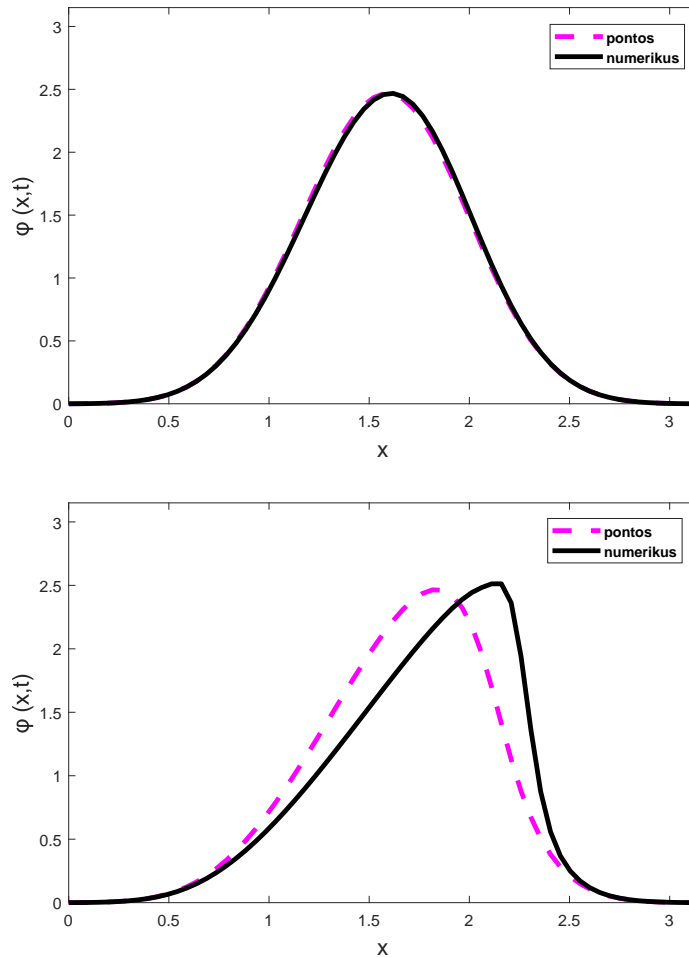
$$A = -\frac{1}{2\Delta x} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \chi_2 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\chi_J \\ -\chi_1 & 0 & \chi_3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\chi_2 & 0 & \chi_4 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \chi_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (67)$$

Természetesen most sem szabad elfeledkeznünk a  $\frac{-1}{2\Delta x}$  szorzóról, ahol a negatív előjel az egyenletből adódik. Újra rendelkezésünkre áll minden szükséges információ a numerikus megoldás elkészítéséhez. Az eredményeket a 3. ábra mutatja. A numerikus és a pontos megoldás már nem halad teljesen együtt. Megfigyelhető a 68. időlépés után a lökéshullám kialakulása a numerikus megoldásban is.

### 7.2.2. Konvergencia

A Burgers-egyenletnél, mivel nemlineáris, már nem integrálunk pontosan az időben. A numerikus konvergenciavizsgálat eredményét az 1. táblázat mutatja, időben  $2^{10}$ ,  $2^{11}$  és  $2^{12}$  lépést téve. A vizsgálat során a térbeli felosztás továbbra is  $J = 2^8$





3. ábra: A Burgers egyenlet pontos és numerikus megoldása a  $t = 4$  és  $t = 54$  időpontban.

1. táblázat: A Burgers-egyenlet numerikus megoldásának időbeli rendvizsgálata  $N$  időbeli felosztás mellett. ( $p_t$  - megoldás rendje, RE - Richardson-extrapoláció)

	$N = 2^{10}$	$N = 2^{11}$	$2^{12}$
$p_t$	1,7678	0,9520	0,9862
$p_t$ <b>RE</b>	2,8022	2,6493	2,2364

volt, és a táblázat első sora mutatja, hogy hány időrétegen közelítettük a Magnus-féle megoldást.

A módszer tehát a hiperbolikus, nemlineáris Burgers-egyenletre elsőrendű, míg aktív Richardson-extrapoláció alkalmazása esetén a rend eggyel javul, időben másodrendű közelítést kapunk.

### 7.2.3. Kapcsolat a sekélyfolyadék-egyenletekkel

Eredeti célunk a sekélyvízi egyenletrendszer sikeres megoldása a Magnus-módszerrel. Miután láttuk a szükséges eszközöket, írjuk át a 3. fejezetben ismertetett egyenletrendszert a következő alakra:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} = -u \frac{\partial h}{\partial x} - v \frac{\partial h}{\partial y} - h \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} - g \frac{\partial h}{\partial x} - fv, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = -u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} - g \frac{\partial h}{\partial y} + fu. \end{cases} \quad (68)$$

Keressük a  $h(x, y, t)$ ,  $u(x, y, t)$ ,  $v(x, y, t)$  függvényeket  $t \geq 0$ ,  $(x, y) \in M \subset \mathbb{R}^2$  mellett. Az egyenletekben szereplő  $f$  a Coriolis-paraméter,  $f = 2\omega \sin \varphi$ , mely értéke a közepes földrajzi szélességen közelítőleg  $10^{-4} \frac{1}{s}$ . Szintén az egyenletrendszerben szereplő  $g$  a gravitációs gyorsulás értéke,  $g \approx 9,81 \frac{m}{s^2}$ .

Végezzünk el a (68) egyenletrendszerre is egy megfelelő diszkretizációt, mely után a kapott feladatot kompaktabb formában írhatjuk fel. Cél egy operátormátrix és egy vektor szorzatát képezni, így alkalmazható lesz a Magnus-féle numerikus közelítés.

Legyen  $\mathcal{U} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  az alábbi:

$$\mathcal{U}(x, y, t) = \begin{pmatrix} h(x, y, t) \\ u(x, y, t) \\ v(x, y, t) \end{pmatrix}, \quad t \geq 0, \quad (x, y) \in M \subset \mathbb{R}^2 \quad (69)$$

A (68)-ban felírt egyenletrendszer a (69)-ben szereplő függvények parciális deriváltjait tartalmazza, azaz szükségünk van az  $\mathcal{U}$  idő szerinti deriváltjára.

Ezt a kifejezést fel tudjuk írni az advekción egyenlet esetében is ismertetett módon, tehát egy megfelelő mátrix és az  $\mathcal{U}$  szorzataként. Ismét felírható a keresett  $\mathcal{A}$  mátrix, ez egy olyan  $3 \times 3$ -as operátormátrix, amellyel az  $\mathcal{U}$ -t megszorozva a (68)-ben felírt parciális differenciálegyenlet-rendszert kapjuk. Az  $\mathcal{A}$  elemei azok az operátorok,

amelyek  $h, u$  és  $v$  függvényre hatnak:

$$\mathcal{A}(\mathcal{U}) = \begin{pmatrix} -u \frac{\partial}{\partial x} - v \frac{\partial}{\partial y} & -h \frac{\partial}{\partial x} & -h \frac{\partial}{\partial y} \\ -g \frac{\partial}{\partial x} & -u \frac{\partial}{\partial x} - v \frac{\partial}{\partial y} & -f \\ -g \frac{\partial}{\partial y} & f & -u \frac{\partial}{\partial x} - v \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}. \quad (70)$$

Vegyük észre, hogy a (68) egyenletrendszer minden tagja nagyon hasonlít a (61) egyenletre. Így tehát könnyen látszik, hogy ha a 3 egyenletet az  $\mathcal{U}$  vektor és az  $\mathcal{A}$  operátormátrix szorzataként szeretnénk felírni, akkor tökéletesen használhatjuk kiindulópontként a már ismertetett mátrix-vektor alakot.

Azaz az advekciós egyenlet és a Burgers-egyenlet esetében definiált mátrixok segítségével előállítható egy olyan  $3 \times 3$ -as blokkmátrix, melynek egyes blokkjai rendre tridiagonális mátrixok, különböző együtthatókkal. Az eddigiekben időtől független és időtől függő tesztpéldákkal dolgoztunk, most az  $\mathcal{A}$  elemei szintén függnak a keresett  $h, u, v$  függvényektől, tehát implicit módon az időtől is.

Az  $\mathcal{A}$  operátormátrixból térbeli diszkretizáció után tehát egy nagy méretű  $\tilde{\mathcal{A}}$  blokkmátrix áll elő, mellyel alkalmazható lesz a Magnus-módszer. Láttuk, hogy a blokkokban lévő tridiagonális mátrixok mérete változik aszerint, hogy mennyire finomítjuk a felosztást. Ez a blokkmátrix egydimenziós esetben – tehát ha csak az  $x$  szerinti változást tekintjük – nagyon megnő, hiszen minden blokkja  $J \times J$ , ezt pedig minden időlépésben számítva a futási idő nagyon elnyúlhat.

A továbbiakban a nehezebb és összetettebb feladatok során igyekszünk a számításigényt optimálisan csökkenteni, a stabilitás és a megfelelő finomság megtartása mellett. Ezek miatt az egydimenziós és a kétdimenziós sekélyvízi egyenletrendszer térbeli felosztása és a Magnus-módszerrel vett időrétegek száma egyre kevesebb lesz, de ez nem befolyásolja a megoldás jóságát.

## 7.3. 1D lineáris sekélyfolyadék-egyenletek

### 7.3.1. Numerikus módszer

Tekintsük a (17) egyenletrendszer egydimenziós alakját:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} = -u \frac{\partial h}{\partial x} - h \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} - g \frac{\partial h}{\partial x}, \end{cases} \quad (71)$$

az alábbi kezdeti feltétellel:

$$\begin{cases} h(x, 0) = e^{-x^2} \\ u(x, 0) = 0, \end{cases} \quad (72)$$

és a következő periodikus peremfeltételek mellett:

$$\begin{cases} h(0, t) = h(\ell, t) \\ u(0, t) = u(\ell, t) \end{cases} \quad x \in [0, \ell] \quad \ell \in \mathcal{R} \quad (73)$$

Ekkor a mozgás független az  $y$  koordinátától, csak egy síkban történik. Ha ezt a Földön lejátszódó folyamatként értelmezzük, akkor most egy kelet-nyugati irányú mozgást egy adott  $x \in [0, \ell]$  pontban és  $t > 0$  időpillanatban leíró  $h(x, t)$  magasság és  $u(x, t)$  sebességfüggvény az ismeretlen függvények.

Végezzük most el a (71) egyenletrendszer linearizálását a dinamikus meteorológiában legelterjedtebb módszerrel, az ún. kis perturbációk módszerével. Ez a módszer olyan légköri hullámmozgások leírására használható, amelyeknek az állapotváltozók mezőiben lényegesen kisebb az amplitúdója, mint az adott állapotváltozó átlagos értéke a légkörben. Ezt a viszonylagos kicsinységi feltételt a légköri hullámok többsége kielégíti. Így tehát az egyenletrendszerben szereplő állapotváltozók felbonthatók az átlagos mezők (alapállapot) és az ezekhez viszonyított kis perturbációk mezőinek összegére (*Práger*, 1982).

Az egydimenziós egyenletrendszerben szereplő sebesség- és magasságértékek tehát  $u = \bar{u} + u_{pert}$  és  $h = \bar{h} + h_{pert}$  alakban írhatóak fel. A perturbációs tagokról feltesszük, hogy legalább egy nagyságrenddel kisebbek, mint az átlagolt tagok. Az egyenletrendszerbe behelyettesítve ezeket az értékeket a tagok újabb tagokra esnek szét. Ezeket pedig három csoportra tudjuk osztani. Az első az átlagértékekből és azok szorzataiból álló tagok, a második a perturbációs mennyiségek és azok szorzataiból képzett tagok és a harmadik – számunkra fontos – a perturbációs mennyiségek és ezek átlagértékekkel vett szorzataiból álló tagok.

Az egyenletrendszert egy oldalra rendezve belátható, hogy az azonos csoportba tartozó tagok közelítőleg kompenzálják egymást. Ez alapján egy új egyenletrendszert nyerünk, a kis perturbációkra vonatkozó sekélyfolyadék- egyenleteket:

$$\begin{cases} \frac{\partial h_{pert}}{\partial t} = -\bar{u} \frac{\partial h_{pert}}{\partial x} - \bar{h} \frac{\partial u_{pert}}{\partial x} \\ \frac{\partial u_{pert}}{\partial t} = -\bar{u} \frac{\partial u_{pert}}{\partial x} - g \frac{\partial h_{pert}}{\partial x}, \end{cases} \quad (74)$$

ennek megfelelően kell megadnunk a kezdeti és a peremfeltételeket is. A (74) egyenletrendszerben  $u_{pert}$  és  $h_{pert}$  jelzi, hogy az egyenletek a perturbációkra vonatkoznak, felírásuk után célunk megadni a  $h_{pert}$  és  $u_{pert}$  függvények, mint megoldásvektorok értékét– tehát a perturbációk viselkedését.

Szeretnénk a feladatot a Magnus-módszerrel megoldani, ehhez pedig meg kell adnunk az  $\mathcal{A}$  mátrix azon alakját, ami az egydimenziós egyenletrendszerre vonatkozik. Ez az operátormátrix most egy  $2 \times 2$ -es blokkmátrix, amely az

$$\mathcal{A}_{1Dlin} \begin{pmatrix} h_{pert} \\ u_{pert} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\bar{u} \frac{\partial}{\partial x} & -\bar{h} \frac{\partial}{\partial x} \\ -g \frac{\partial}{\partial x} & -\bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (75)$$

alakban írható fel. Ez tehát egy olyan blokkmátrix, amelynek minden blokkja az advekción egyenlet megoldása során használt diszkretizáció eredménye lesz.

Fontos látni, hogy az  $\mathcal{A}_{1Dlin}$  mátrixban szereplő blokkokat meghatározza egy konstans érték is, ebben is hasonlít a feladat az advekciónhoz. Lineáris esetben a (75) mátrix jobb oldalán  $\bar{h}$  és  $\bar{u}$  szerepelnek, melyek a linearizálás során kapott átlagos értékek. Ezeket mi adjuk meg, tetszőlegesen választott valós értékeként, így tehát a mátrix a megoldás során végig állandó marad, nem függ az időtől.

Megadhatjuk, hogy az általunk választott magasságú és sebességű folyadék mozgása hogyan alakul az idő előrehaladtával, ügyelve arra, hogy  $\bar{h}$  értéke megfelelően kicsi legyen a horizontális kiterjedéshez képest, például egy Rossby-hullám mozgását figyelve a  $\bar{h}$  legyen körülbelül az  $\frac{1}{100}$ -ad része a horizontális kiterjedésnek.

Nincs más hátra, mint előállítani az  $\mathcal{A}_{1Dlin}$  mátrixot, majd közelíteni az exponenciálisvektor szorzatot. A térbeli diszkretizációhoz újra a középponti módszert használtuk.

Azok a tagok, amelyek az  $\bar{u}$  értékével szorozódnak, az

$$A_{\bar{u}} = -\frac{\bar{u}}{2\Delta x} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & -1 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\Delta x} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \bar{u} & 0 & \dots & -\bar{u} \\ -\bar{u} & 0 & \bar{u} & \dots & 0 \\ 0 & -\bar{u} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{u} & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (76)$$

alakban, azok pedig, amelyeket a  $\bar{h}$  értékkel kell szoroznunk az

$$A_{\bar{h}} = -\frac{\bar{h}}{2\Delta x} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & -1 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2\Delta x} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \bar{h} & 0 & \dots & -\bar{h} \\ -\bar{h} & 0 & \bar{h} & \dots & 0 \\ 0 & -\bar{h} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{h} & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (77)$$

alakban írhatóak fel. Szükség lesz egy olyan mátrixra is, amely  $g$ -vel szorozódik, ez tehát a (77) mátrixhoz képest csak egy kicsi változtatás;  $\bar{h}$  értékei helyett  $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$  szintén fix értékek kerülnek a megfelelő helyre. A mátrixok függnének a térbeli felosztástól, rendre  $J \times J$  nagyságúak,  $J$  továbbra is a térbeli felosztások száma. Azonban nem szabad elfeledkeznünk a kezdeti és peremfeltételekről sem.

A periodikus perem értelmében a térintervallum bal és jobb oldali végpontját egyenlővé tesszük. A sekélyfolyadék modell fontos tulajdonsága, hogy a folyadék horizontális kiterjedése jóval nagyobb, mint a vertikális. A geoid alakú Földön lejátszódó mozgásformák modellezéséhez ez a peremfeltétel természetes választás: a bal oldal „összeér” a jobb oldallal, ha az  $x$  koordináta egy szélességi kör mentén változik. Ahogyan az (58) mátrix esetében láttuk, most is kiegészül az  $\mathcal{A}$  operátormátrix minden blokkja a peremfeltétellel. A (76) és (77) mátrixok első sorának utolsó eleme és az utolsó sorának első eleme kerül kiegészítésre a középponti módszer sajátossága miatt. Természetesen a  $g$  által meghatározott blokkra is igaz a kiegészülés, így az

$$A_{1Dlin} = -\frac{1}{2\Delta x} \cdot \left( \begin{array}{ccccc|ccccc} 0 & \bar{u} & 0 & \dots & -\bar{u} & 0 & \bar{h} & 0 & \dots & -\bar{h} \\ -\bar{u} & 0 & \bar{u} & \dots & 0 & -\bar{h} & 0 & \bar{h} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{u} & 0 & 0 & \dots & 0 & \bar{h} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & g & 0 & \dots & -g & 0 & \bar{u} & 0 & \dots & -\bar{u} \\ -g & 0 & g & \dots & 0 & -\bar{u} & 0 & \bar{u} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g & 0 & 0 & \dots & 0 & \bar{u} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right) \quad (78)$$

mátrix megadja a teljes rendszer operátormátrixát.

A Magnus-módszer használata előtt az utolsó kérdés, hogy a már ismertetett (78) blokkmátrixot, amely  $2J \times 2J$  nagyságú, a (72) kezdeti feltételek ismeretében milyen vektorral szorozzuk, hogy a lineáris egyenletrendszert visszacapjuk. Leolvasható, hogy a  $h(x, t)$  és  $u(x, t)$  függvényeket térben diszkretizálva egy hosszú oszlopvektorba rendezhetjük

$$p(t) = \begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ \vdots \\ p_J(t) \\ p_{J+1}(t) \\ \vdots \\ p_{2(J)}(t) \end{pmatrix} \quad (79)$$

módon, ahol

$$\begin{aligned} p_j(t) &:= h_{pert}(t, (j-1) \cdot \Delta x), & j = 1, 2, \dots, J \\ p_j(t) &:= u_{pert}(t, (j-1) \cdot \Delta x), & j = J+1, \dots, 2J, \end{aligned} \quad (80)$$

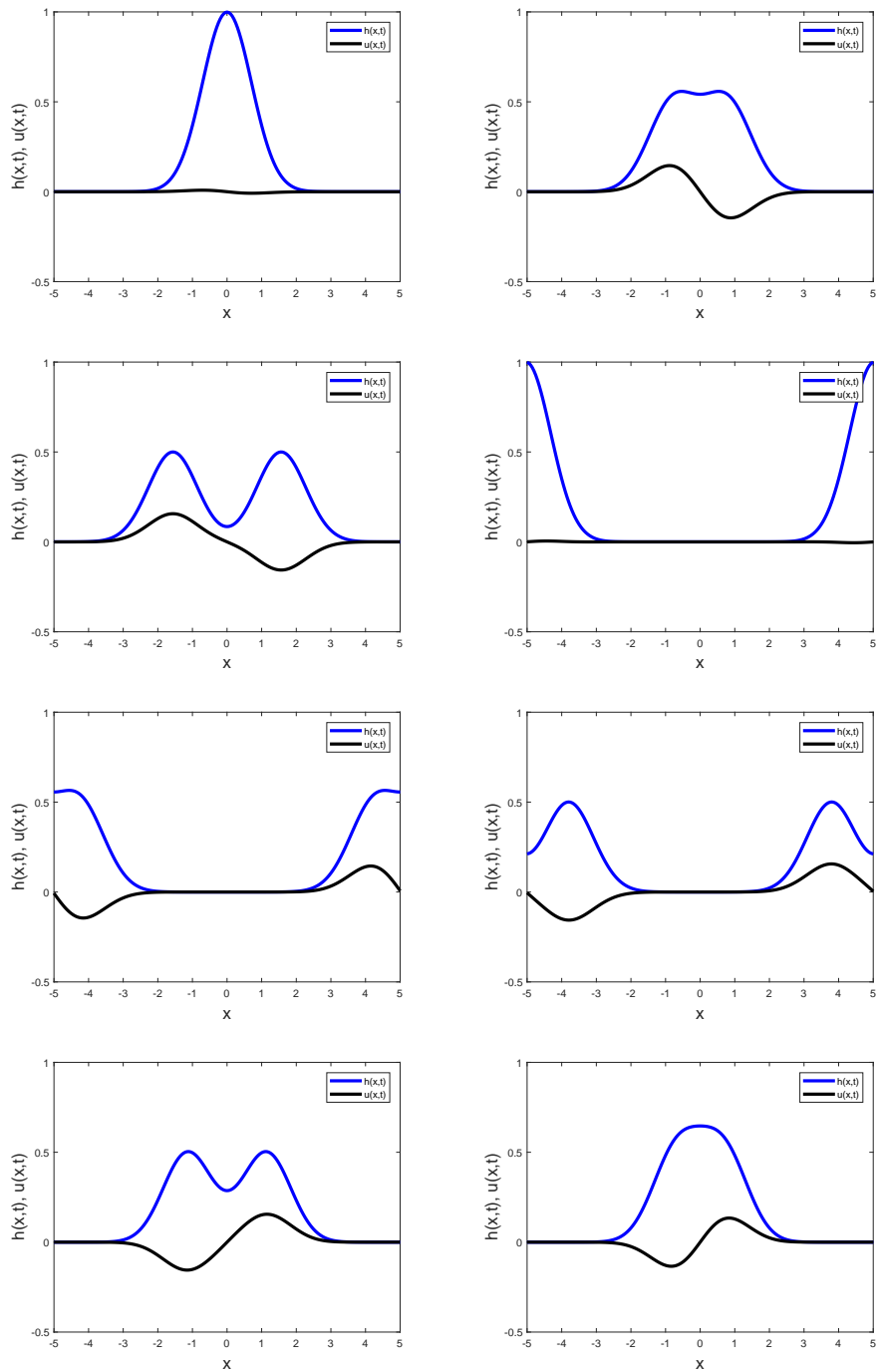
azaz a hosszú vektor első  $J$  elemét a  $h_{pert}$ , második  $J$  elemét pedig az  $u_{pert}$  perturbációs értékek adják. Ez a vektor  $2J$  hosszúságú, megfelelő dimenziójú ahhoz, hogy a (78) mátrixsal szorozzuk, tehát a következő lépés a mátrixexponenciális-vektor szorzat közelítése a Magnus-módszerrel.

Ezzel minden időrétegen megkapjuk a megoldást, az előző időlépésben kapott megoldást mindig felhasználjuk a következő időlépésben, azonban az  $A_{1Dlin}$  mátrix végig állandó marad.

### 7.3.2. Megvalósítás

A 4. ábra mutatja az egydimenziós sekélyfolyadék-egyenletek térben középonti, időben Magnus-féle numerikus módszerrel történő megoldását az  $n = 1, n = 25, n = 50, n = 160, n = 185, n = 200, n = 285, n = 300$  időpillanatokban.

A fix térbeli felosztást ( $J = 200$ ) alkalmaztunk. Az ábrán az  $\bar{u} = 0$  sebesség,  $\bar{h} = 100$  magasság értékek és  $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$  gravitációs gyorsulás melletti megoldás látható. A kezdeti vízmagasság az idő előrehaladtával kettéválik, és a két csúcstól két külön irányba indul. Folyamatosan távolodnak egymástól, míg a peremet el nem érik. A periodikus peremfeltétel miatt találkoznak, interferálnak, majd szétválhatnak és újra két irányba indulnak el. Ezt követően egy későbbi időpontban újra találkoznak. Ezt a



4. ábra: Az 1D lineáris sekélyvízi egyenletrendszer megoldása fix térbeli felosztással, az idő előrehaladtával.

fajta mozgást ismétlik az időlépések számától függően. A 4. ábrát  $N = 1000$  időlépés melletti futtatás során vett időrétegeken láthatjuk. Az ismertetett viselkedést akkor



is megkapjuk, ha  $\bar{h}$  értékét csökkentjük, és  $\bar{u}$  értékét tetszőlegesen változtatjuk.

A módszerhez tartozó stabilitási feltételt természetesen minden esetben ellenőriznünk kell, tehát teljesülnie kell a

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{|\bar{u} + \sqrt{g\bar{h}}|} \quad (81)$$

feltételnek. A 4. ábrán látott futtatás esetén  $\Delta t \leq 1,6 \cdot 10^{-3}$  feltételnek kellett teljesülnie, ezt minden próbafuttatás esetén ellenőriztük.

### 7.3.3. Konvergencia

A módszer – ahogyan azt már láttuk – nagyon hasonlít az advekiós egyenletre kialakított numerikus módszerre. Ez a konvergencia szempontjából azt jelenti, hogy a feladat linearitásából adódóan pontosan integrálunk. A Richardson-extrapolációt alkalmazva nem kapunk megfelelően jó eredményt, hiszen a mátrix nem függ az időtől, minden időlépésben és bármilyen időbeli felosztás mellett konstans mátrixszal kell dolgoznunk. Emiatt a (49) összefüggésben ismertetett konvergencia növelést jelenleg nem tudjuk alkalmazni, hiszen a  $\frac{\Delta t}{2}$  esetén számított mátrix értéke megegyezik a  $\Delta t$  esetén számított mátrixéval. A konvergenciarend változására a nemlineáris esetben számítunk.

## 7.4. 1D nemlineáris sekélyfolyadék-egyenletek

### 7.4.1. Numerikus módszer

Tekintsük most újra az egyenletrendszer előzőekben már látott egydimenziós alakját, a következő kezdeti és peremfeltétel mellett:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} = -u \frac{\partial h}{\partial x} - h \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} - g \frac{\partial h}{\partial x}, \end{cases} \quad (82)$$

$$\begin{cases} h(x, 0) = \bar{h} + e^{-x^2} \\ u(x, 0) = 0, \end{cases} \quad (83)$$

$$\begin{cases} h(0, t) = h(\ell, t) \\ u(0, t) = u(\ell, t). \end{cases} \quad x \in [0, \ell] \quad (84)$$

A lineáris feladathoz képest fontos változás, hogy a (82) rendszerben szereplő  $h(x, t)$  és  $u(x, t)$  értékek már nem a linearizálás eredményeképpen kapott perturbációkra vonatkoznak, hanem az adott pontban vett tényleges értékeket jelölik. A lineáris eset (78) mátrixához képest újra változtatásokat kell tennünk.

A nemlineáris  $A_{1Dnemlin}$  mátrixban a négy blokkból háromban, a  $h$  és az  $u$  blokkjaiban, az alsó és felső mellékátlókban, illetve a peremfeltétel által meghatározott helyeken már  $\bar{h}$  és  $\bar{u}$  helyett  $h(x, t)$  és  $u(x, t)$  értékek szerepelnek. Tehát a mátrixban szereplő konstans értékek helyett már helytől és időtől függő értékek lesznek. A helyfüggést a mátrixban meghatározott indexük adja meg – szintén középponti módszert alkalmazva –, az időfüggésük miatt viszont minden lépésben a Magnus-módszerrel kapott megoldásvektort kell felhasználnunk.

Ahhoz tehát, hogy az  $n$ -edik időlépcsőben is megkapjuk a nemlineáris egyenletrendszer megoldását, szét kell szednünk az  $(n - 1)$ -edik lépésben kapott hosszú vektort, amelyet elkészítettünk, hogy közelíteni tudjuk a mátrixexponenciális-vektor szorzatot. Az  $n - 1$ -edik lépésben kapott vektorból  $h$  és  $u$  értékeit kell beültetnünk az  $A$  mátrix megfelelő helyeire.

Természetesen nem szabad elfeledkeznünk a peremfeltételről sem, azonban a diszkretizációt felírva láthatjuk, hogy az előző időréteg megoldásvektorának mely  $u$  és  $h$  értékét milyen helyre kell tennünk. A nemlineáris egydimenziós egyenletrendszer

térbeli diszkretizációja után kapott mátrix tehát az

$$A_{1Dnemplin} = -\frac{1}{2\Delta x} \cdot \left( \begin{array}{ccccc|ccccc} 0 & u_2 & 0 & \dots & -u_J & 0 & h_2 & 0 & \dots & -h_J \\ -u_1 & 0 & u_3 & \dots & 0 & -h_1 & 0 & h_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ u_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & h_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & g & 0 & \dots & -g & 0 & u_2 & 0 & \dots & -u_J \\ -g & 0 & g & \dots & 0 & -u_1 & 0 & u_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ g & 0 & 0 & \dots & 0 & u_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right) \quad (85)$$

alakban írható fel. A középponti módszer sajátossága miatt szükséges az  $A_{1Dnemplin}$  mátrixot  $\frac{1}{2\Delta x}$ -el szorozni, a negatív előjel pedig a (82) összefüggésből adódik. A  $g$  értéke továbbra is állandó, így jelen esetben az az egyetlen blokk, amely minden időlépésben állandó és ugyanaz marad.

Kérdés tehát, hogy mi alapján kell az  $u$  és  $h$  értékeitől függő blokkokat feltölteni minden lépésben. A (85) mátrix jól mutatja, hogy az (57) összefüggést felhasználva a mátrix melyik sorába melyik érték kell, hogy kerüljön – az alsó index az  $u$  és  $h$  vektorok elemeit jelzik –, azaz hogyan áll elő a mátrix minden időrétegen. Fontos természetesen a peremfeltétel értéke is, ami szintén az (57)-ből adódik.

Ismerjük tehát újra a mátrixot, mellyel a mátrixexponenciális-vektor szorzat közelítése a feladat, tehát a Magnus-féle megoldás elkészítése  $n$  db időrétegen.

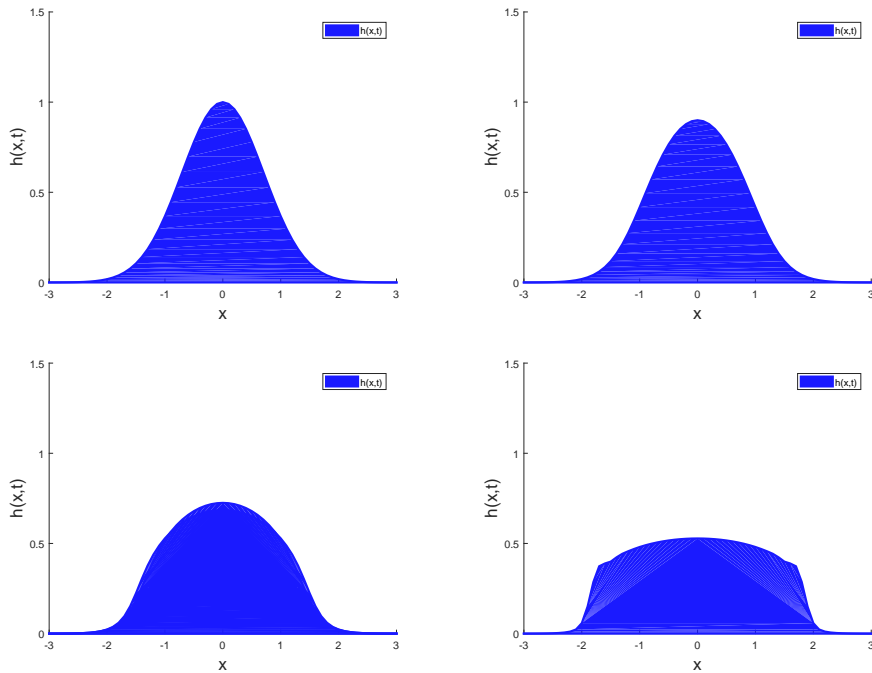
#### 7.4.2. Megvalósítás

Az 5. ábra mutatja, hogy fix térbeli felosztás,  $J = 100$  mellett hogyan viselkedik a  $h(x, t)$  értéke az idő előrehadtával,  $n = 1, n = 40, n = 90, n = 140$  időrétegeken. A  $g$  értéke továbbra is  $9,81 \frac{m}{s^2}$ , a  $\bar{h} = 0$  (ez a kezdeti feltétel miatt meghatározó) és a kezdeti sebesség is  $\bar{u} = 0$ . A maximális időlépés  $N = 500$  mellett a

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\max(u)} \quad (86)$$

stabilitási feltétel teljesülésével vizsgáljuk a rendszer működését, ahol  $\max(u)$  értéke térben és időben egyaránt értendő, azonban időben nem tudjuk előre meghatározni.

A Burgers-egyenletnél már tapasztaltuk, hogy bármilyen sima kezdeti feltétel ellenére a hullámon belül sebességkülönbség alakul ki, és a hullám tetején lökeshullám keletkezik. Hasonló jelenséget tapasztalunk. A  $t = 1$  időpillanattól indított hullám elkezd laposodni. A lineáris esethez hasonlóan két irányba indul, azonban

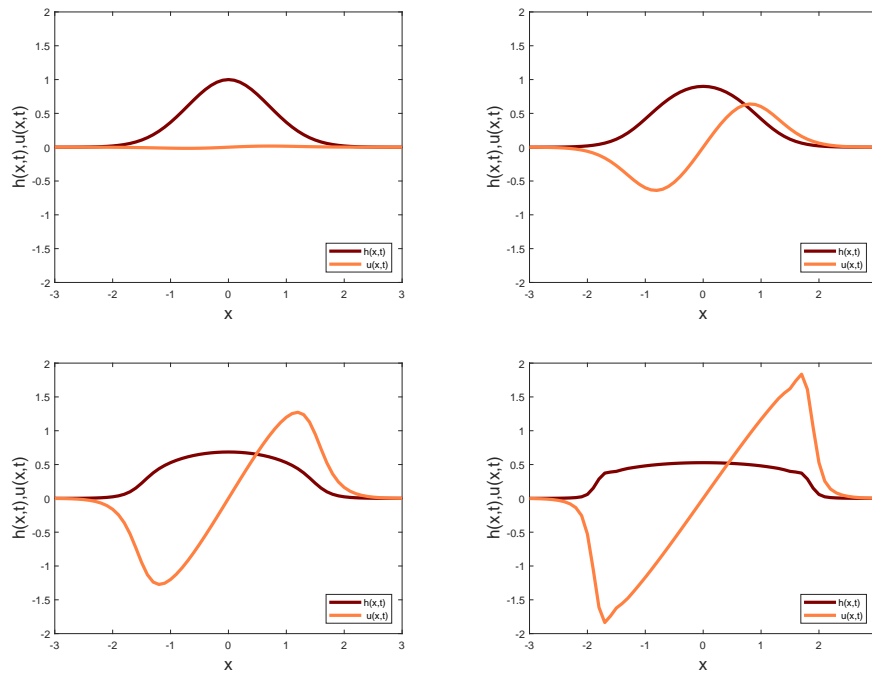


**5. ábra: Az 1D nemlineáris sekélyvízi egyenletrendszer megoldásának magasságértékei fix térbeli felosztással, az idő előrehaladtával.**

mielőtt teljesen szétválna, megjelenik a várt lökéshullám, amely a  $n = 140$  időpillanatban már látható. Nagyobb  $n$  értékre, tehát kisebb  $\Delta t$  időlépésenként közelítve a megoldást tovább megmarad a simaság. A 6. ábrán láthatjuk a magasság értékek mellé az  $u(x, t)$  sebesség változását is. Az említett lökéshullám kialakulása a sebességgörbén is jól követhető, kirajzolódik a sebességkülönbség, ami a hullámon belül figyelhető meg.

### 7.4.3. Konvergencia

A nemlineáris sekélyfolyadék-egyenletek numerikus közelítése során a mátrix minden időlépésben változik,  $n$ -edik időlépésben függ az  $(n - 1)$ -edik időrétegen kapott értéktől. Emiatt az időbeli integrálás nem pontos, szükséges és értelmes a konvergenciarend vizsgálata. Ehhez elengedhetetlen lenne a pontos megoldás ismerete, azonban a (82) hiperbolikus egyenletrendszer pontos megoldását nem ismerjük. Ennek tudatában most is a (40) numerikus rendvizsgálattal kerestük a  $p_t$  időbeli rendet, és a Richardson-extrapolációval szeretnénk volna javítani rajta. A 2. táblázat mutatja a numerikus rendvizsgálat eredményeit,  $J = 2^8$  térbeli felosztás mellett,



6. ábra: Az 1D nemlineáris sekélyvízi egyenletrendszer megoldása fix térbeli felosztással, az idő előrehaladtával.

2. táblázat: Az 1D nemlineáris sekélyfolyadék-egyenletek időbeli konvergenciájának rendvizsgálata  $N$  időbeli felosztás mellett ( $p_t$  - megoldás rendje, RE - Richardson-extrapoláció).

	$N = 2^{10}$	$N = 2^{11}$	$N = 2^{12}$
$p_t$	1,2147	1,0983	1,0265
$p_t$ RE	1,9545	1,9841	1,9973

az időbeli felosztást  $N = 2^{10}, N = 2^{11}, N = 2^{12}$  értékeknek véve, azaz a felosztás finomításával. Látható, hogy a Magnus-módszer rendje az 1D nemlineáris feladatra egyre kisebb  $\Delta t$  értékeket véve tart az egyhez. Erre alkalmazva az aktív Richardson-extrapolációt, a rend a vártan megfelelően eggyel növekszik. Így tehát a (82) feladatra alkalmazott időbeli sémánk, a Magnus-módszer a Richardson-extrapolációval kombinálva másodrendű.

## 7.5. 2D lineáris sekélyfolyadék-egyenletek

### 7.5.1. Numerikus módszer

Tekintsük a 2 dimenziós sűrűlódásmentes sekélyvízi egyenletrendszert a dolgozat elején ismertetett

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} = -u \frac{\partial h}{\partial x} - v \frac{\partial h}{\partial y} - h \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} - g \frac{\partial h}{\partial x} - fv, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = -u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} - g \frac{\partial h}{\partial y} + fu \end{cases} \quad (87)$$

alakban, az alábbi kezdeti és peremfeltételek mellett:

$$\begin{cases} h(x, y, 0) = \bar{h} + e^{-10(x-0.5)^2 - 10(y-0.5)^2} \\ u(x, y, 0) = \bar{u} \\ y(x, y, 0) = \bar{v}, \end{cases} \quad (88)$$

$$\begin{cases} h(0, 0, t) = h(\ell, \ell, t) \\ u(0, 0, t) = u(\ell, \ell, t) \\ v(0, 0, t) = v(\ell, \ell, t) \end{cases} \quad x \in [0, \ell], y \in [0, \ell] \quad (89)$$

A  $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$  nehézségi gyorsulás és  $f = 10^{-4} \frac{1}{s}$  Coriolis-paraméter fix értékei mellett keressük a három ismeretlen függvény,  $h(x, y, t)$ ,  $u(x, y, t)$  és  $v(x, y, t)$  értékét. Az eddigiektől eltérően már van  $y$ , azaz észak-dél irányú mozgás is, és emiatt a  $zy$  irányú sebesség  $v$  is ismeretlen.

Szeretnénk megoldani az egyenletrendszert az eddig megszerzett tudásunkkal felvértezve. Először alkalmazzuk a kis perturbációk módszerét az egyenlet linearizálására. Ekkor a magasság és a sebességek  $h = \bar{h} + h_{pert}$ ,  $u = \bar{u} + u_{pert}$  és  $v = \bar{v} + v_{pert}$  alakban írhatók fel, azaz egy átlagos érték amit  $\bar{h}$ ,  $\bar{u}$  és  $\bar{v}$  fejeznek ki, illetve az ezektől vett eltérés, azaz a perturbációk értékei, amit az alsó index jelez.

A linearizálás után az egyenletrendszer a

$$\begin{cases} \frac{\partial h_{pert}}{\partial t} = -\bar{u} \frac{\partial h_{pert}}{\partial x} - \bar{v} \frac{\partial h_{pert}}{\partial y} - \bar{h} \left( \frac{\partial u_{pert}}{\partial x} + \frac{\partial v_{pert}}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial u_{pert}}{\partial t} = -\bar{u} \frac{\partial u_{pert}}{\partial x} - \bar{v} \frac{\partial u_{pert}}{\partial y} - g \frac{\partial h_{pert}}{\partial x} - f v_{pert}, \\ \frac{\partial v_{pert}}{\partial t} = -\bar{u} \frac{\partial v_{pert}}{\partial x} - \bar{v} \frac{\partial v_{pert}}{\partial y} - g \frac{\partial h_{pert}}{\partial y} + f u_{pert} \end{cases} \quad (90)$$

alakra hozható. A már ismertett átlagos értékek – ahogyan az egydimenziós esetben is láttuk – állandók, az ismeretlenek pedig a perturbációk, tehát az egyenletrendszer megoldásával a perturbációk értékét kapjuk.

A feladat ismert, szükséges tehát a mátrix-vektor alak létrehozása, hogy a Magnus-módszerrel közelíteni tudjuk a megoldást. Képezzük a bal oldalból az

$$\mathcal{U}_{2Dlin} = \begin{pmatrix} h_{pert} \\ u_{pert} \\ v_{pert} \end{pmatrix} \quad (91)$$

vektort, így a kérdés, hogy melyik az az operátormátrix, amellyel ezt a vektort szorozva a jobb oldalhoz jutunk. Természetesen a jobb oldali tagok – ahogyan az 1D egyenletek megoldása során is láttuk – mind az advekción egyenlethez hasonlóak, így az operátormátrix megadható az

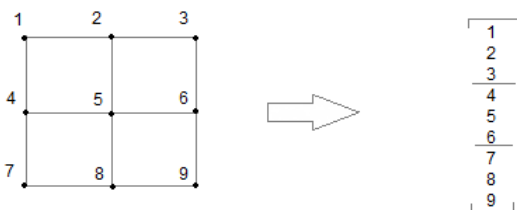
$$\mathcal{A}_{2Dlin} \begin{pmatrix} h_{pert} \\ u_{pert} \\ v_{pert} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\bar{u} \frac{\partial}{\partial x} - \bar{v} \frac{\partial}{\partial y} & -\bar{h} \frac{\partial}{\partial x} & -\bar{h} \frac{\partial}{\partial y} \\ -g \frac{\partial}{\partial x} & -\bar{u} \frac{\partial}{\partial x} - \bar{v} \frac{\partial}{\partial y} & -f \\ -g \frac{\partial}{\partial y} & f & -\bar{u} \frac{\partial}{\partial x} - \bar{v} \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (92)$$

összefüggés alapján. Ez a mátrix tehát egy  $3 \times 3$ -as blokkmátrix, melynek minden blokkja a térbeli diszkretizáció tulajdonságait hordozza. A közelítést elvégezve kapjuk a konkrét mátrixot, és a (91) adja a vektort, amellyel a Magnus-féle közelítéshez szükséges mátrixexponenciális-vektor szorzatot meg kell adnunk, minden időlépésben.

Tehát nincs más hátra, mint a középponti módszerrel elvégezni a 2 dimenziós diszkretizálást. Itt viszont egy kicsit eltérően kell gondolkoznunk, hiszen eddig csak

az  $x$  irányban történt mozgás, csak ez a változó határozta meg a diszkretizációt is. Egyetlen  $[0, \ell]$ ,  $\ell = 1$  intervallum  $J$  darab  $\Delta x$  lépésközönként való felosztása helyett most egy rácshálónk van,  $x \in [0, 1]$  és  $y \in [0, 1]$  alapján a rács a  $T = [0, 1] \times [0, 1]$  téglalapon található.

Ezt a téglalapot osztjuk fel  $x$  irányban  $J$ , és  $y$  irányban  $J$  darabra. Ez azt jelenti, hogy  $J^2$  pontot definiálunk a rácson, a (99) megoldásvektor közelítését ennyi pontban kell majd elvégeznünk. Az eddigiekhez képest tehát  $h$ ,  $u$  és  $v$  értékét nem egy vektor, hanem egy rácsponti értékeket tartalmazó  $J \times J$  nagyságú mátrix adja meg. Vegyük ezen a téglalapon az ekvidisztáns felosztást, azaz legyen  $\Delta x = \Delta y$ .



7. ábra: A 2 dimenziós rács szemléltetése,  $J = 3$  esetén.

A 7. ábrán szemléletesen látjuk a 2 dimenziós rácsot,  $J = 3$  esetén. Az  $x$  irányban 3 és  $y$  irányban is 3 részre osztott sík így kapott  $J^2 = 9$  rácspontját számozzuk balról jobbra, fentről lefelé. Azonban a célunk továbbra is a Magnus-módszer alkalmazása, amihez elengedhetetlen egy mátrixexponenciális-vektor szorzat közelítése.

Jelenleg a (92) mátrix – a térbeli diszkretizációra váró – a mátrixunk, melynek exponenciálisát kell szoroznunk a (91) megoldásvektorral. Ez a megoldásvektor azonban jelenleg három mátrixból álló blokkmátrix, melynek egy oszlopa és 3 sora van – a három sorban találhatóak a  $h$ -ra,  $u$ -ra és  $v$ -re vonatkozó blokkok. Ezt elengedhetetlen vektor alakra hozni. Definiáljuk azt a vektort, amelyet az ő mátrixaikból tudunk képezni.

Tekintsük a  $3 \times 3$ -as esetet a 7. ábrán. A felső sortól indulva képezzük azt az oszlopvektort, amely minden sor elemét egymás után tartalmazza, balról jobbra haladunk, tehát ha új sor következik, akkor is az első elem a bal oldali, az utolsó pedig a jobb oldali. Így tehát a rácsponton értelmezett értékeket vektorba rendezzük. A rácson  $h$ ,  $u$ , és  $v$  értékét is egyenként egy  $J \times J$  nagyságú mátrix adja meg. Ezeket



vektorba rendezve három  $J^2$  hosszúságú vektort kapunk, ezek elemeit pedig az

$$\mathcal{U}_{2Dlin} = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_J \\ u_1 \\ \vdots \\ u_J \\ v_1 \\ \vdots \\ v_J \end{pmatrix} \quad (93)$$

hosszú vektorba rendezzük. Így már a megoldásvektorunk előáll olyan alakban, hogy a Magnus-módszerhez használni tudjuk.

Nincs más hátra, mint hogy megadjuk a (92) mátrix középponti módszerrel diszkrétizált alakját. Ez is némileg eltérő lesz az eddigiektől, de a periodikus peremfeltételt most is figyelembe kell vennünk. Nézzük tehát a 7. ábrán szemléltetett rácsot. Legyen az  $x$  a vízszintes,  $y$  pedig a függőleges irány. A feladat tehát az, hogy hogyan tudjuk megadni az 1. rácspont értékét a középponti módszer segítségével,  $x$  irányban, illetve hogyan tudjuk ugyanezt megadni  $y$  irányban is. Az  $x$  irányban az 1. rácspont értékét a 2. rácspont és a 0. rácspont fogja meghatározni, azonban ez nincs, és a periodikus perem miatt ez az utolsó,  $J$ -edik rácspont lesz, a 7. ábrán mutatott példán ez a 3. rácsponti érték.

Ilyen módon haladva tovább, minden pontban a  $\frac{\partial}{\partial x}$  közelítése megadható az

$$A_{2Dlx} = \frac{1}{2\Delta x} \cdot \left( \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \quad (94)$$

alakban. Ez tehát egy tridiagonális blokkmátrix, a főátlójának blokkjai tartalmazzák a megfelelő értékeket. A (94) mátrix a konkrét  $J = 3$  esetben a  $\frac{\partial}{\partial x}$  közelítése.

Látható, hogy ebben az esetben a mátrix  $J^2 \times J^2$  nagyságú. Tehát, ha  $J$  értékét nagyra választjuk, ez a mátrix egy óriási blokkmátrix lesz, melynek a főátlójának blokkjai tartalmazzák a térbeli diszkretizációt. A főátló blokkjai mindig egyformák. Egy ilyen blokkban tridiagonális mátrix található, amely a szokott módon, az alsó és felső mellékátlóban tartalmazza a nullától különböző elemeket, illetve a peremfeltételnek megfelelően az első sor utolsó eleme, illetve az utolsó sor első eleme különbözik nullától.

A kérdés az, hogy hová is kerül ez a mátrix, és milyen formában? Tekintsük a (92) mátrixot. Látjuk, hogy több helyen tartalmazza a  $\frac{\partial}{\partial x}$  elemet. Ezen elemek helyére kell beillesztenünk a (94) mátrixot, a megfelelő szorzóval.

Például a (92) második sor első eleme  $-g\frac{\partial}{\partial x}$ , azaz a (94) mátrixot kell szoroznunk  $-g$ -vel, és ez kerül a második sor első elemének pozíciójába. Látszik tehát az, hogy a (92) mátrixot diszkretizálva egy olyan nagy blokkmátrixot fogunk kapni, hogy mindegyik blokkja  $J^2 \times J^2$  nagyságú, és további  $J \times J$  nagyságú blokkokból állnak.

Szükséges megadnunk a  $\frac{\partial}{\partial y}$  közelítését is. Továbbra is vegyük a  $J = 3$  példát, és tekintsük a 7. ábrát. Most tehát azt kell megmondanunk, hogy hogyan közelítjük az 1. rácspontot a középponti módszerrel a 7. rácspont és a 0. rácspont segítségével. Így kell végighaladnunk  $y$  irányban a rácson, ezen a módon, a periodikus peremfeltétel figyelembe vételével kapjuk az

$$A_{2Dty} = \frac{1}{2\Delta y} \cdot \left( \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad (95)$$

blokkmátrixot.

A 7. ábra alapján tehát  $9 \times 9$ -es a mátrix, de általánosabb esetben ez is  $J^2 \times J^2$  nagyságú,  $J$  darab blokkból álló mátrix. Minden blokkja  $J \times J$ -s és megfelelő blokkokban található a diszkretizálásból kapott identitásmátrix. A  $J$  értékétől függetlenül az első sor utolsó blokkja és az utolsó sor első blokkja tartalmazza a peremfeltételből

adódó értékeket. A térbeli felosztás értékének növelésével egyre több blokk jelenik meg, de az elrendezés a (95) szerint alakul.

Fontos látnunk, hogy a  $\frac{\partial}{\partial y}$  kapott közelítését a (92) összefüggésben látott  $A_{2Dlin}$  mátrix megfelelő elemeinek helyére kell betennünk, a megfelelő szorzóval. A (92) mátrix tehát felírható a

$$\mathcal{A}_{2Dlin} = \begin{pmatrix} -\bar{u}A_{2Dlx} - \bar{v}A_{2Dly} & -\bar{h}A_{2Dlx} & -\bar{h}A_{2Dly} \\ -gA_{2Dlx} & -\bar{u}A_{2Dlx} - \bar{v}A_{2Dly} & -fI \\ -gA_{2Dly} & fI & -\bar{u}A_{2Dlx} - \bar{v}A_{2Dly} \end{pmatrix} \quad (96)$$

alakban, ahol  $I$  a  $J \times J$  nagyságú identitásmátrixot jelöli. A (96) tehát egy  $J^2 \times J^2$  nagyságú konstans mátrix, mely csak a kezdetben megadott  $\bar{h}$ ,  $\bar{u}$  és  $\bar{v}$  átlagos értékektől függ.

A feladatot ekvidisztáns rácshálón ( $\Delta x = \Delta y$ ) vizsgáltuk.

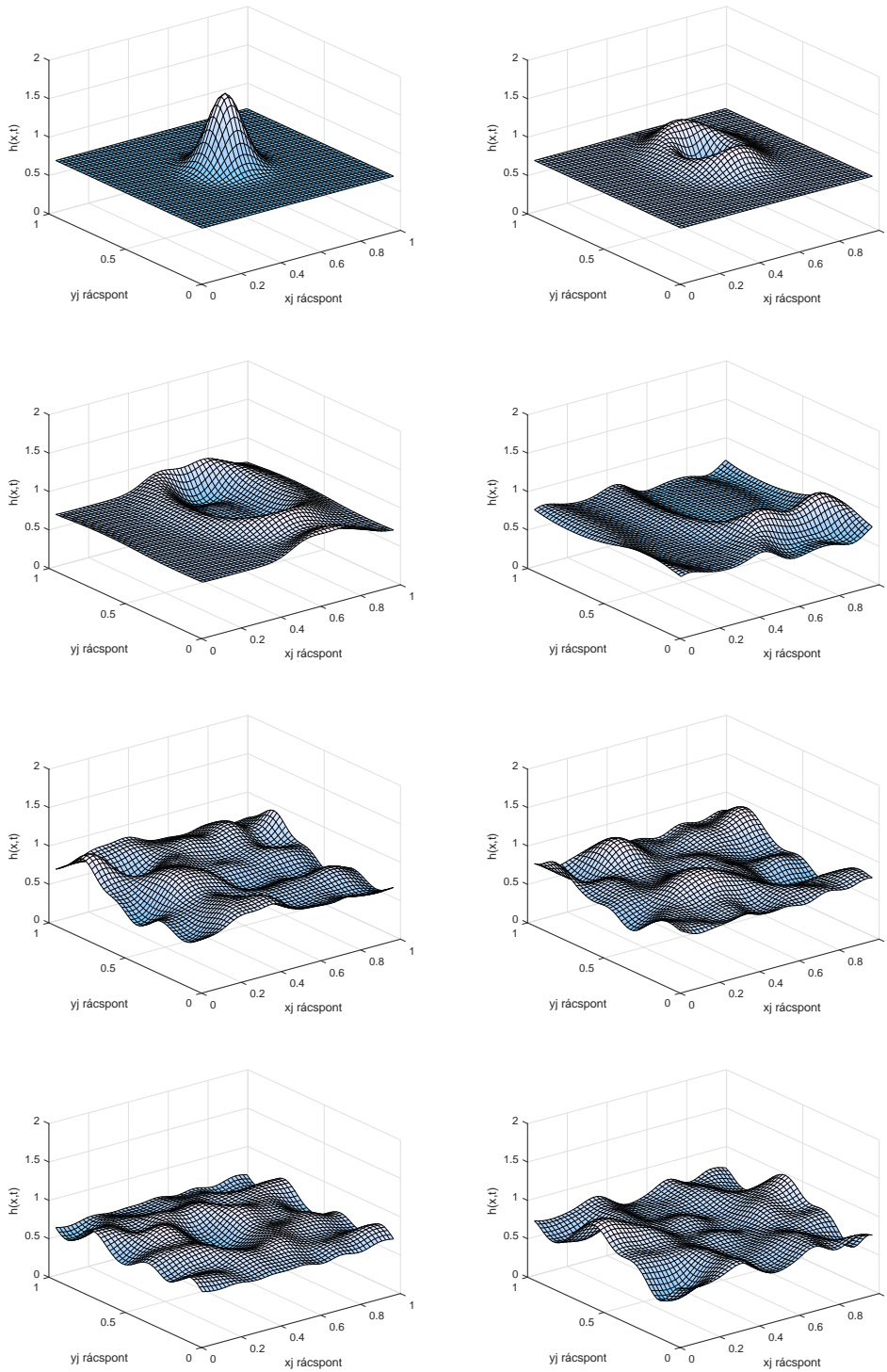
### 7.5.2. Megvalósítás

A  $[0, 1] \times [0, 1]$  téglalapon a tekintett térbeli felosztással,  $J = 50$  értéke mellett, illetve a  $[0, 1]$  időintervallumot  $N = 500$  darabra osztottuk. A

$$\Delta t \leq \min \left( \frac{\Delta x}{\max(u_{pert})}, \frac{\Delta y}{\max(v_{pert})} \right) \quad (97)$$

stabilitási feltétel (ahol  $\Delta y = \Delta x$ ,  $u_{pert}$  és  $v_{pert}$  pedig a perturbáció értékeire vonatkozó vektorok) figyelembe vételével oldottuk meg a 2D lineáris sekélyfolyadék-egyenleteket. A kezdeti feltételben meghatározó  $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$  gravitációs gyorsulás mellett  $\bar{h} = 0,7m$ ,  $\bar{u} = 3 \frac{m}{s}$ ,  $\bar{v} = 3 \frac{m}{s}$  értékeket határoztunk meg.

A 8. ábra mutatja, hogy hogyan viselkedik a megoldás a futtatás elején,  $n = 1$ ,  $n = 10$ ,  $n = 20$ ,  $n = 30$  időpillanatokban, és a futtatás végén,  $n = 470$ ,  $n = 480$ ,  $n = 490$ ,  $n = 500$  időrétegeken. Látható, hogy a definiált hullám magassága a gravitáció hatására csökkenni kezd, majd ez a hullám a térben gyűrűsen kezd el terjedni. A periodikus peremfeltétel miatt a peremet elérő hullám a túloldalon visszajön, mind az  $x_j$ , mind  $y_j$  esetében ( $x_j$  és  $y_j$  a 7. ábrán ismertetett rácson az  $x$  vízszintes és  $y$  függőleges irányú pontok). A találkozó hullámok interferálnak, majd újra szétválnak és folytatják útjukat. Az utolsó időpillanatokban a hullámzást szintén az előző időpillanatok hullámainak helyzete határozza meg.



8. ábra: A 2D lineáris sekélyvízi egyenletrendszer megoldása fix térbeli felosztással, az idő előrehaladtával.

### 7.5.3. Konvergencia

A kétdimenziós, lineáris sekélyfolyadék-egyenletek numerikus megoldása térben középponti, időben Magnus-féle numerikus módszerrel a perturbációk értékét adja meg. A konvergencia vizsgálatához újra szükség lenne a pontos megoldásra, de a hiperbolikus parciális differenciálegyenletrendszernek egzakt megoldása nincs, így a rendvizsgálat csak numerikusan történhet.

A már ismerttetett módon az időbeli konvergenciarendet szeretnénk meghatározni, azonban – ahogyan az egydimenziós esetről is láttuk – a térbeli diszkretizáció sajátosságait megadó mátrix az időbeli lépések során konstans, időben pontosan integrálunk. A módszer rendjének növeléséhez is szükség lenne az  $A_{2Dlin}$  mátrix időfüggésére. A konvergenciát ezek miatt a következőkben, azaz a nemlineáris esetben tárgyaljuk.

## 7.6. 2D nemlineáris sekélyfolyadék-egyenletek

### 7.6.1. Numerikus módszer

Tekintsük a kétdimenziós súrlódásmentes sekélyvízi egyenletrendszer

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} = -u \frac{\partial h}{\partial x} - v \frac{\partial h}{\partial y} - h \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} - g \frac{\partial h}{\partial x} - fv, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = -u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} - g \frac{\partial h}{\partial y} + fu \end{cases} \quad (98)$$

alakját a (88) kezdeti feltételek és a (89) peremfeltételek mellett.

A lineáris egyenletrendszer megoldása után cél a nemlineáris rendszer vizsgálata. Keressük tehát a rendszer operátormátrixát, amelyet a

$$\mathcal{U}_{2Dnmlin} = \begin{pmatrix} h \\ u \\ v \end{pmatrix} \quad (99)$$

megoldásvektorral szorozva az  $n$ -edik időrétegen megkapjuk a numerikus közelítés értékét.

A lineáris esetben elvégzett térdiszkretizáció során a  $\frac{\partial}{\partial x}$  deriváltat közelítő (94) mátrix elemei módosulnak. A mátrix mérete nem változik, függ a  $J$  értékétől,

$J^2 \times J^2$  nagyságú, de a ahogyan láttuk, lineáris esetben a mátrix állandó, azonban most minden időpillanatban az adott blokk értékébe az előző időlépéssel kapott megoldásvektort kell betenni. Az  $(n-1)$ -edik időlépésben kapott  $3J^2$  hosszú vektort három részre szedve megkapjuk az  $(n-1)$ -edik időlépésre vonatkozó  $h$ ,  $u$  és  $v$  értékét. Az  $n$ -edik időlépésbeli megoldás értékéhez őket kell a jelenleg időfüggő

$$\mathcal{A}_{2Dnonlin} \begin{pmatrix} h \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u \frac{\partial}{\partial x} - v \frac{\partial}{\partial y} & -h \frac{\partial}{\partial x} & -h \frac{\partial}{\partial y} \\ -g \frac{\partial}{\partial x} & -u \frac{\partial}{\partial x} - v \frac{\partial}{\partial y} & -f \\ -g \frac{\partial}{\partial y} & f & -u \frac{\partial}{\partial x} - v \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (100)$$

mátrix megfelelő blokkjaiba tenni.

A kérdés az, hogy hogyan. A  $g$  értéke továbbra is állandó, illetve a Coriolis-paramétert tartalmazó tagok is egyetlen identitásmátrix és az  $f$  értékének szorzataként állnak elő. Azaz a  $g$  és  $f$  konstansokat tartalmazó blokkok mátrixai minden időlépésben ugyanazok maradnak. Tekintsük az első sor első elemét, azaz blokkját. Itt a  $-u \frac{\partial}{\partial x} - v \frac{\partial}{\partial y}$  közelítését adjuk meg úgy, hogy tudjuk, hogy  $\frac{\partial}{\partial x}$  a (94) alakban és  $\frac{\partial}{\partial y}$  a (95) alakban áll elő.

A kérdés az, hogy az  $x$  szerinti deriváltat közelítő, középponti módszerrel előállított, a periodikus peremfeltételt tartalmazó blokkmátrixba jelen esetben hogyan tegyük be a  $-u$  vektor koordinátáit. A vektor  $J^2$  hosszú, válasszuk most a  $J = 3$  esetet. A  $-u \frac{\partial}{\partial x}$ -t közelítő mátrix az alábbi alakban írható fel:

$$A_{2Dnlx} = -\frac{1}{2\Delta x} \cdot \begin{pmatrix} 0 & u_2 & -u_3 & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ -u_1 & 0 & u_3 & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ u_1 & -u_2 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 0 & u_5 & -u_6 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & -u_4 & 0 & u_6 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & u_4 & -u_5 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 & u_8 & -u_9 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & -u_7 & 0 & u_9 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & u_7 & -u_8 & 0 \end{pmatrix}. \quad (101)$$

Az alsó indexek adják meg, hogy a példánkban  $J^2 = 9$  hosszú  $u$  vektor melyik koordinátáját hova kell tennünk. Ezt minden időlépésben meg kell ismételnünk,

hogy a következő időréteg megoldását megkapjuk. A mátrix előtt a negatív előjel a  $-u$  szorzó negatív előjele.

Szintén felírható a  $-v \frac{\partial}{\partial y}$  közelítése:

$$A_{2Dnl_y} = -\frac{1}{2\Delta y} \cdot \left( \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & v_4 & 0 & 0 & -v_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v_5 & 0 & 0 & -v_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_6 & 0 & 0 & -v_9 \\ \hline -v_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_7 & 0 & 0 \\ 0 & -v_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_8 & 0 \\ 0 & 0 & -v_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_9 \\ \hline v_1 & 0 & 0 & -v_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_2 & 0 & 0 & -v_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_3 & 0 & 0 & -v_6 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \quad (102)$$

A mátrix negatív előjele most is a  $-v$  szorzóból adódó negatív előjel, az alsó indexek pedig jelzik, hogy a szintén  $J^2$  hosszú  $v$  vektor melyik koordinátáját kell az adott helyre írni. A (101) és (102) összeadása után megkapjuk, hogy a (100) mátrix első sorának első eleme milyen nagy blokkmátrixszal írható le. Azoknál a tagoknál, ahol  $-h$  szorzó szerepel, ez szintén elvégezhető, a  $h$  vektor is  $J^2$  hosszúságú, minden időlépésben az  $x$  vagy az  $y$  szerinti parciális deriváltat közelítő mátrixba írható az  $A_{2Dln_x}$  és  $A_{2Dln_y}$  szerint.

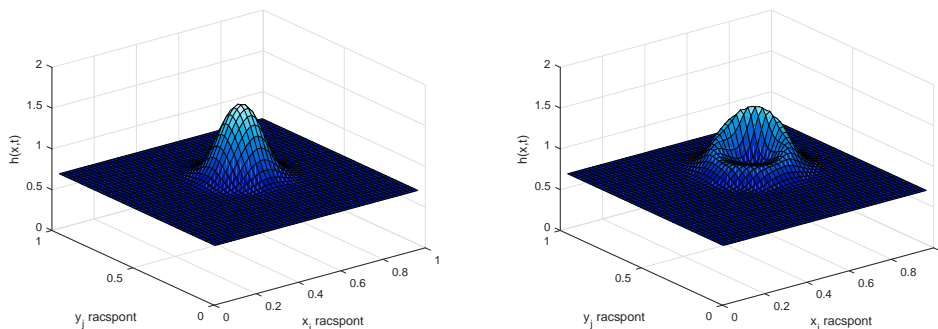
Amennyiben  $J$  értéke nagy, a blokkmátrixok sorai és oszlopai bővülnek. Az  $A_{2Dln_x}$  esetén mindig a főátló blokkjai lesznek nemnulla mátrixok, a peremfeltételekkel együtt, az  $A_{2Dln_y}$  esetén pedig mindig az alsó és felső mellékátló blokkok lesznek nemnulla mátrixok, illetve az első sor utolsó blokkja, és az utolsó sor első blokkja adja majd meg a periodikus peremfeltételt.

Nincs más hátra, mint az ismerttetett módszert alkalmazni, és közelíteni a mátrixexponenciális -vektor szorzatot  $n$  időrétegen, azaz megadni a Magnus-féle megoldást.

## 7.6.2. Megvalósítás

Válasszuk a  $g = 9,18 \frac{m}{s^2}$  gravitációs gyorsulás értéket, az  $f = 10^{-4} \frac{1}{s}$  Coriolis-paramétert, illetve  $\bar{h} = 0m$  az átlagmagasság,  $\bar{u} = 3 \frac{m}{s}$  az  $x$  irányú átlagsebesség, és  $\bar{v} = 3 \frac{m}{s}$  az  $y$  irányú átlagsebesség. Ezek határozzák meg a (88) kezdeti feltételnek megfelelő értékeket, ahonnan a numerikus módszert indítjuk.

Elsőként osszuk fel a  $[0, 1] \times [0, 1]$  téglalapot  $x$  irányban  $J = 50$  és  $y$  irányban is  $J = 50$  részre. Emellett legyen a  $[0, 1]$  időintervallum felosztása  $N = 500$ .



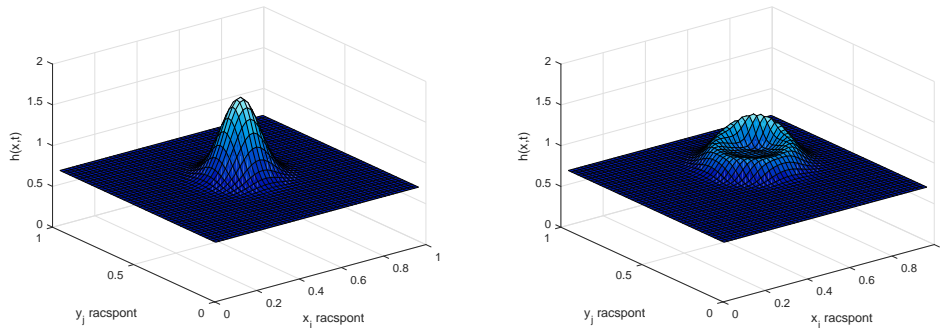
**9. ábra: A 2D nemlineáris sekélyvízi egyenletrendszer megoldása fix térbeli, felosztással, az idő előrehaladtával,  $\Delta t = \frac{1}{500}$  időbeli lépésközzel.**

A 9. ábra mutatja, hogyan viselkedik a megoldás  $n = 1$ , és  $n = 5$  időpillanatokban. A kezdeti hullám a gravitáció hatására elindul, azonban még mielőtt teljes mértékben elindulna a gyűrűs szétterjedés, a hullámon belül a sebességkülönbség alakul ki. A hullám teteje gyorsabban fog mozogni, és a Burgers-egyenlethez és az 1 dimenziós nemlineáris megoldáshoz hasonlóan lökéshullám alakul ki.

Legyen most a  $[0, 1] \times [0, 1]$  téglalap felosztása változatlan, azaz  $x$  és  $y$  irányban is  $J = 50$ . Azonban csökkentsük le a  $\Delta t$  időbeli lépésközt, a  $[0, 1]$  időintervallumot osszuk tehát  $N = 1000$  részre. Azt szeretnénk, hogy a módszer tovább maradjon lökéshullám mentes. A 10. ábra mutatja, hogyan változik a Magnus-féle numerikus megoldás  $n = 1$  és  $n = 10$  időrétegeken. Látható tehát, hogy fele akkora  $\Delta t$  értékre is igen hamar kialakul a lökéshullám.

Ezek alapján válasszuk a  $\Delta t = \frac{1}{4000}$  értéket. Azaz a  $[0, 1]$  időintervallumot  $N = 4000$  részre osztottuk fel. A 11. ábra mutatja, hogy a változatlan  $J = 50$  felosztás mellett, ha  $\Delta t$  elég nagy, hogyan viselkedik a numerikus megoldás,  $n = 1$ ,  $n = 25$ ,  $n = 50$ ,  $n = 75$ ,  $n = 100$ ,  $n = 135$ ,  $n = 165$ ,  $n = 200$  időrétegeken. A kezdeti hullám gyűrűsen terjed szét. Amikor eléri a peremet, a periodikus peremfeltétel értelmében a megfelelő oldalon „jön vissza” a hullám. Látható, hogy kisebb fodrozódások kialakulása után már a 200. időlépésben megjelennek lökéshullámok.





10. ábra: A 2D nemlineáris sekélyvízi egyenletrendszer megoldása fix térbeli, felosztással, az idő előrehaladtával,  $\Delta t = \frac{1}{1000}$  időbeli lépésközzel.

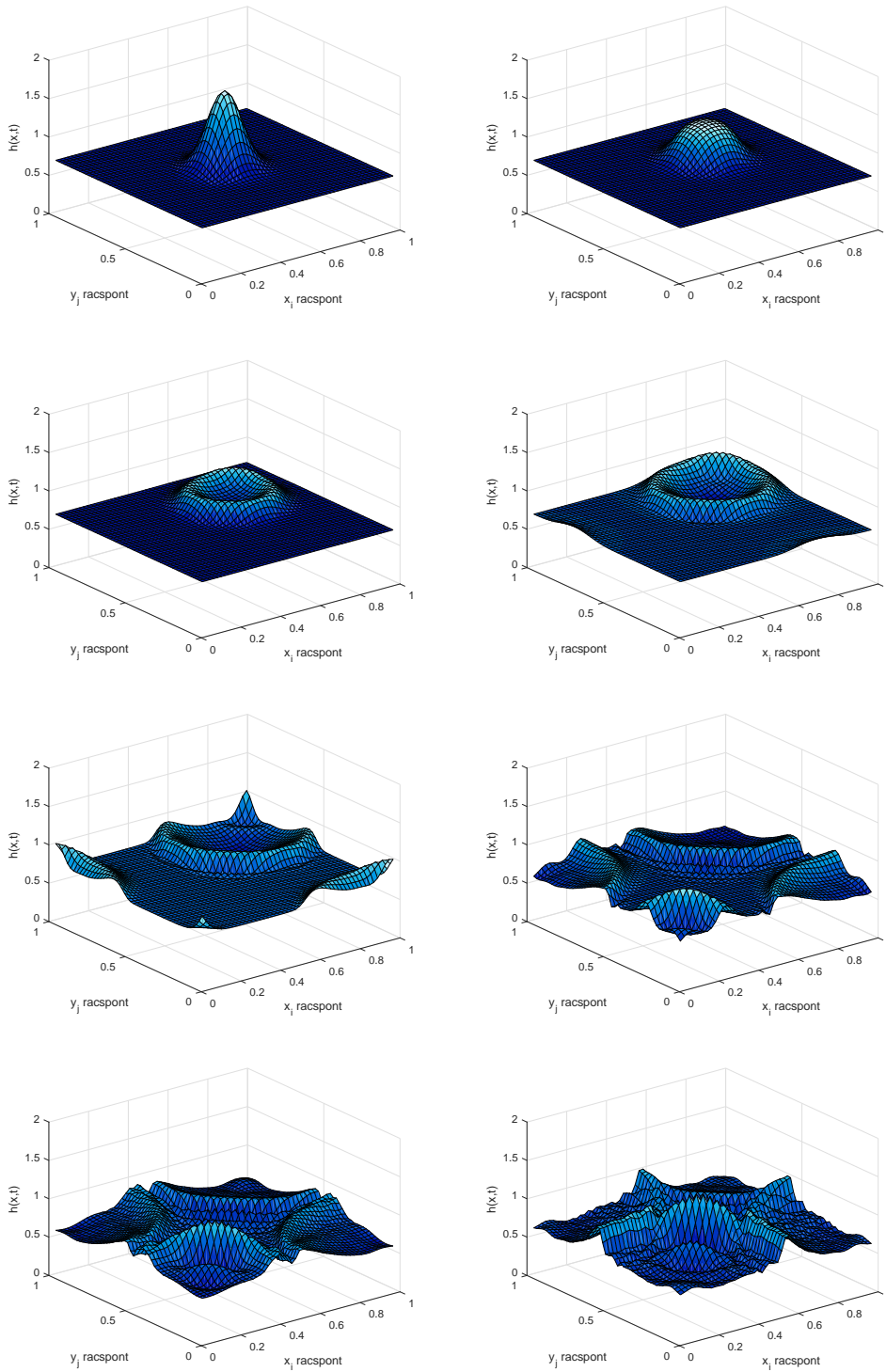
### 7.6.3. Konvergencia

A feladat tehát a (97) stabilitási feltételnek eleget tesz, kérdés a konvergenciája. A nemlineáris kétdimenziós feladatban a mátrix, ahogyan láttuk, időfüggő, tehát minden időpillanatban változik, nem integrálunk időben pontosan.

3. táblázat: A 2D nemlineáris sekélyfolyadék-egyenletek numerikus megoldásának időbeli rendvizsgálata  $N$  időbeli felosztás mellett. (a  $p_t$  megoldás rendje a RE - Richardson-extrapolációval kombinálva)

	$N = 2^{10}$	$N = 2^{12}$	$N = 2^{14}$
$p_t$ RE	4,7264	2,0227	2,007

A 3. táblázat értékei mutatják, hogy a módszer  $J = 50$  részre osztva a síkon értelmezett téglalapot és az időbeli felosztást finomítva a Richardson-extrapolációval kapott konvergenciarend 2, azaz a módszer így másodrendű.



11. ábra: A 2D nemlineáris sekélyvízi egyenletrendszer megoldása fix térbeli, felosztással, az idő előrehaladtával,  $\Delta t = \frac{1}{4000}$  időbeli lépésközzel.

## 8. Összefoglalás

A dolgozatban különböző differenciálegyenletek Magnus-módszerrel történő megoldásával foglalkoztunk. A numerikus közelítéseket a MATLAB programnyelvben valósítottuk meg, eközben vizsgáltuk a Magnus-féle numerikus módszer konvergenciáját is.

Tudatosan haladva a célunk a kétdimenziós sekélyvízi egyenletrendszer Magnus-féle módszerrel történő megoldása felé, először a lineáris advekciós egyenletet oldottuk meg. Ezt követően kitértünk a nemlineáris advekció, azaz a Burgers-egyenlet ismertetésére és megoldására is. Láttuk, hogy ilyen típusú hiperbolikus egyenletek esetén hogyan kell elvégezni a tér- és időbeli diszkretizációt. A megoldásunk során a kialakított numerikus módszerünk stabil és elsőrendben konvergens volt, majd Richardson-extrapolációval másodrendűvé tettük.

Rámutattunk a sekélyfolyadék-egyenletek és a Burgers-egyenlet közötti kapcsolatra, hiszen az utóbbihoz megírt Magnus-féle közelítés szerves része az egyenletrendszer megoldásának. Megállapítottuk, hogy az egydimenziós sekélyfolyadék-egyenletek megoldásához hasonló mátrixokra van szükség, mint a Burgers-egyenlethez megalkotott mátrixok.

Ezen eredmények birtokában tekintettük az egydimenziós a sekélyfolyadék-egyenleteket a megfelelő kezdeti- és peremfeltételekkel. Elsőként a linearizált egyenletrendszer feladatára végeztük el a numerikus közelítést. A középponti módszerrel történő térbeli diszkretizálást követően ismertettük a numerikus megoldást, azaz a magasság és a sebesség időbeli változását egy adott térbeli felosztás mellett. A lineáris változat után az időfüggő, azaz a nemlineáris megoldásba ültettük át a megszerzett tapasztalatainkat, természetesen a megfelelő változtatásokkal. A lineáris esetben láttuk, hogy a Magnus-módszer és az időbeli diszkretizációnk pontos, a nemlineáris esetben pedig tapasztaltuk, hogy a módszer elsőrendű, Richardson-extrapoláció alkalmazásával másodrendű.

Ezt követően elvégeztük a kétdimenziós sekélyvízi egyenletrendszer térbeli diszkretizációját, szintén megfelelő kezdeti és peremfeltételek mellett. Megadtuk a lineáris hiperbolikus egyenletrendszer numerikus közelítését a Magnus-módszerrel. Ezt követően pedig a nemlineáris sekélyfolyadék-egyenletek numerikus megoldását is elvégeztük. A lineáris esetben – hasonlóan az egydimenziós esethez – az időbeli pontosságot tapasztaltuk, a nemlineáris esetben pedig az elsőrendű módszerünket újra Richardson-extrapolációval javítottuk másodrendűvé.

Minden nemlineáris esetben tapasztaltuk azt a jelenséget, hogy az elindított hullámokban sebességkülönbség alakul ki. Az idő előrehaladtával a hullám teteje gyorsabban mozgott, lökeshullám alakult ki rajta, melyet a térbeli diszkretizáció nem tudott kezelni. Ezen tagok közelítéséhez szükséges a már említett Godunov-módszerek alkalmazása. Spektráltérben vett közelítéssel a kialakult hullámfrontokat kezelni tudjuk, így is javítva a numerikus módszeren.

További céljaink között szerepel alkalmas térbeli diszkretizáció keresése a numerikus megoldásban kialakuló front helyes kezelésére.

## Köszönetnyilvánítás

Sok-sok köszönet illeti Csomós Petrát és Havasi Ágnest. Köszönöm a munkám folyamatos irányításáért és figyelemmel kísérését. A sok ötletet, a végtelen lelkesedést, hitet és türelmet és azt, hogy megtanulhattam, hogyan is kell hozzáállni a matematikához.

Köszönöm Breuer Hajnalkának a sok – egyedi – támogatást, amivel végig előre vitt, és segített.

Azt hiszem, bár az egyetemi éveimnek lassan vége, hármójukat sosem fogom elfelejteni, szeretettel és hálával gondolok majd rájuk.

Szeretném megköszönni a temérdek segítséget Molnár Andrásnak, aki nélkül ez a dolgozat biztosan nem jött volna létre, illetve Bertók Fruzsínának, aki erején felül, minden alkalommal támogatott és biztatott. Azt hiszem nem lehetek elég hálás azért, amit tettek értem. Bárki, aki ezt olvassa, mindkettőjük életét kísérje végig. Zseniálisak, és a világ legjobb barátai!

Köszönöm továbbá Bán Beatrixnak, aki hasonló problémákkal küzdött, de bármikor fordulhattam hozzá, illetve Báló Viviennek, aki rámutatott, hogy mennyi minden rejlik bennem.

Special thanks to Mark McMorris for showing me what will and courage is. Hey boi, your the best!

## 9. Irodalomjegyzék

- Al-Mohy, A. H., Higham, N., J., 2011: Computing the action of the matrix exponential, with an application to exponential integrators, *SIAM journal on scientific computing*, 33(2), 488–511.
- Bátkai, A., Sikolya., E., 2012: The norm convergence of a Magnus expansion method, *Central European Journal of Mathematics*, 10, 150–158.
- Banks, J., W., Aslam, T., D., 2013: Richardson extrapolation for Linearly Degenerate Discontinuities, *J. Sci. Comput*, 57(1), 1-18 pp.
- Belousov, S. L., Berkovich, L. V., Sitnikov, I. G., Shnaidman, V. A., 2009: Mathematical Modeling in Meteorology and Weather Forecasting. In: *Mathematical Models of Life Support Systems* (Szerk.: Agoshkov, V. I., Puel, J.-P.) in *Encyclopedia of Life Support Systems (EOLSS)*, Developed under the Auspices of the UNESCO, Eolss Publishers, Paris, France, [<http://www.eolss.net>]. 10 p.
- Blanes, S., Casas, F., Oteo, J. A., Ros, J., 2009: The Magnus expansion and some of its applications, *Physics Reports*, 470(5-6), 151–238.
- Blanes, S., Casas, F., Oteo, J. A., Ros, J., 1998: Magnus and Fer expansions for matrix differential equations: the convergence problem, *J. Phys. A: Math, Gen.*, 22, 259–268.
- Broomans, P., 2003: Numerical Accuracy in Solutions of the Shallow-Water Equations, Master Thesis, TU Delft and WL, 94 p.
- Burg, C., Erwin, T., 2008: Application of Richardson Extrapolation to the Numerical Solution of Partial Differential Equations, Wiley InterScience, DOI 10.1002/num.20375
- Byun, D., W., 1998: Dynamically Consistent Formulations in Meteorological and Air Quality Models for Multiscale Atmospheric Studies, Part II: Mass Conservation Issue, *Journal of the Atmospheric Sciences*, Volume 56, published online, 13 p.
- Casas, F., 2007: Sufficient conditions for the convergence of the Magnus expansion, *J. Phys. A: Math. Theor.*, 40, 15001–15017.
- Chang, D., Light, J. C., 1969: Exponential solution of the Schrödinger equation: potential scattering, *J. Chem. Phys.*, 50, 2517–2525.

- Canuto, C., Hussaini, M., Y., Quarteroni, A., Zang, T., A., 1998: Spectral Methods in Fluid Dynamics, *SIAM Rev.*, 30(4), 666 – 668.
- Czelnay, R., Götz, G., Iványi, Zs., 1991: Bevezetés a meteorológiába II.: A mozgó légkör és óceán, Egyetemi Tankönyv, ELTE, Budapest, 403 p.
- Crowhurst, P., Li, Z., 2013: Numerical Solutions of One-Dimensional Shallow Water Equations. In: Computer Modelling and Simulation (UKSim), 2013 UKSim 15th International Conference on Computer Modelling and Simulation. 10.1109/UKSim.2013.63, pp 55–60.
- Csomós, P., Winckler, J., 2014: On the well-posedness of the linearised shallow water equations, megjelenés alatt.
- Delis, I., Katsaounis, T. 2005: Numerical solution of the two-dimensional shallow water equations by the application of relaxation methods, *Applied Mathematical Modelling*, 29(8), 754–783.
- Delleur, J., W., 2006: The Handbook of Groundwater Engineering, Second Edition, CRC Press, 485 p.
- Faragó, I., Havasi, Á., Horváth, R., 2012: Numerical solution of the Maxwell equations in time-varying media using Magnus expansion, *Central European Journal of Mathematics*, 10(1), 137–149.
- Faragó, I., Horváth, R., 2013: Numerikus módszerek, Egyetemi tankönyv, BME TTK, Budapest, 403 p.
- Garabedian, P., R., 1964: Partial Differential Equations, John Wiley and Sons, Inc., New York, 548 p.
- George, D., L. 2004: Numerical Approximation of the Nonlinear Shallow Water Equations with Topography and Dry Beds : A Godunov-Type Scheme, Thesis, University of Washington, Washington, 54 p.
- González, C., Ostermann, A., Thalhammer, M., 2006: A second-order Magnus-type integrator for nonautonomous parabolic problems, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 189(1-2), 142–156.
- González, C., Thalhammer, M., 2007: A second-order Magnus-type integrator for quasi-linear parabolic problems, *Mathematics of Computation*, 76(257), 205–232.

- Havasi, Á., 2000: A spektrális barotróp modell matematikai vizsgálata és adjungált változata, Diplomamunka, ELTE, Budapest, 80 p.
- Hochbruck, M., Lubich, C., 2003: On Magnus Integrators for Time-Dependent Schrödinger Equations, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 41(3), 945–963.
- Horányi, A., Ihász, I., Radnóti, G., 1998: Az időjárás számszerű előrejelzése, *Természet Világa*, 129, különszám, 39–42.
- Hudson, J., 2009: Numerical Techniques for the Shallow Water Equations, Thesis, University of Reading, Reading, 64 p.
- Iserles, A., Nørsett, S. P., Rasmussen, A. F., 2001: Time symmetry and high-order Magnus methods, *Applied Numerical Mathematics*, 39(3-4), 379–401.
- Jakeman, J., 2006: On Numerical Solutions of the Shallow Water Wave Equations, Bachelor Thesis, 118 p.
- LeVeque, R. J., 2004: Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems, Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press, 580 p.
- Lynch, P., 2008: The origins of computer weather prediction and climate modeling. *Journal of Computational Physics*, 227, 3431–3444.
- Magnus, W., 1954: On the exponential solution of differential equations for a linear operator, *Comm. Pure Appl. Math.*, 7, 649–673.
- Moan, P. C., Oteo, A., Ros, J., 1999: On the existence of the exponential solution of linear differential systems, *J. Phys A: Math Gen* 32, pages 51335139.
- Nagy, K., 1985: Elméleti mechanika, Tankönyv, Tankönyvkiadó, Budapest, 476 p.
- Pechukas, P., Light, J. C., 1966: On the exponential form of time-displacement operators in quantum mechanics, *J. Chem. Phys.*, 44, 3897–3912.
- Práger, T., 1982: Numerikus prognosztika I.: A hidrodinamikai előrejelzés elmélete, Tankönyvkiadó, Budapest, 327 p.
- Richards, S., A., 1997: Competed Richardson extrapolation in space and time, *Communications in Numerical Methods in Engineering Commun. Numer. Meth. Eng.*, 13, 573 – 582 pp.



- Stoyan, G., Takó, G., 2008: Numerikus módszerek III, Tankönyv, ELTE Informatikai Kar, Budapest, 449 p.
- Smith, J., O., 2010: Physical Audio Signal Processing, W3K Publishing, Center for Computer Research in Music and Acoustics (CCRMA), Stanford University, ISBN 978-0-9745607-2-4.
- Wei, J., 1963: Note on global validity of the Baker-Hausdorff and Magnus theorems, J. Math. Phys., 4, 1337–1341.
- Wei, J., Norman, E., 1963: Lie algebraic solution of linear differential equations, J. Math. Phys., 4, 475–581.
- Weidinger, T., Baranka, Gy., Bordás, Á., Gyuró, Gy., Havasi, Á., Leelőssy, Á., Mészáros, R., Szépszó, G., Tasnádi, P., 2013: Klasszikus dinamikus meteorológiai feladatgyűjtemény II, E-Tankönyv, ELTE Természettudományi Kar, Budapest.
- Zlatev, Z., Faragó, I., Havasi, A., 2012: Richardson Extrapolation combined with the sequential splitting procedure and the  $\theta$ -method, Central European Journal of Mathematics, 10(1), 159 – 172.
- Zhou, J. G., Causon, D. M., Ingram, D. M., Mingham, C. G., 2002: Numerical solutions of the shallow water equations with discontinuous bed topography, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 38(8), 769–788.