Vektormező divergenciája

Legyen $\underline{f} : M_2 \to \mathbb{R}^2$ vektormező, amelynek első és második koordinátafüggvényét jelölje $f_1(x,y)$ és $f_2(x,y)$. Ha x és y jelöli a sík pontjainak descartesi koordinátáit, akkor $\underline{f}$ divergenciáján a következő értjük:

$$\mathrm{div}\underline{f}(x,y) := \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y).$$

Ha $\underline{f} : M_3 \to \mathbb{R}^3$, akkor, hasonlóan:

$$\mathrm{div}\underline{f}(x,y,z) := \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(x,y,z).$$

Ezzel a sík/tér minden pontjához egy skalárt rendeltünk, azaz egy vektormező divergenciája skalármező lesz.
Fizikai alkalmazás: ha $\underline{f}$ sebességmező, akkor a sík/tér egy adott pontjában a divergencia megmutatja, hogy ott szétáramlás vagy összeáramlás van-e, valamint hogy milyen erősségű.

Pl. 1. Legyen egy síkbeli áramlás sebességmezeje: $\underline{v}(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$, ahol a $\underline{v}$ vektormező koordinátafüggvényeit hagyományosan u-val ill. v-vel jelöltük. Legyen speciálisan $u(x,y) = -cy$ és $v(x,y) = cx$, ahol $c > 0$ konstans. $\mathrm{div}\underline{v} =?$

$$\mathrm{div}\underline{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(-cy) + \frac{\partial}{\partial y}(cx) = 0$$

Ilyenkor azt mondjuk, hogy az áramlás divergenciamentes.

2. Legyen $\underline{v}(\underline{r}) = \underline{r}$ (azaz $\underline{v}(x,y,z) = (x,y,z)$). Ábrázoljuk a sebességvektort néhány pontban! $\mathrm{div}\underline{v} =?$

$$\mathrm{div}\underline{v} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3.$$

Ebben a sebességmezőben tehát minden pontban szétáramlás van.

HF: Legyen $\underline{f}(x,y,z) = (y\cos(xy), e^{xz}, x+y+z)$. $\mathrm{div}\underline{f} =?$

Vektormező rotációja

Legyen $\underline{f} : M_3 \to \mathbb{R}^3$ a téren értelmezett vektormező. Rotációja:

$$\mathrm{rot}\underline{f}(x,y,z) := \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right)\underline{i} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\right)\underline{j} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\underline{k}$$

Ezzel a tér minden pontjához egy vektort rendeltünk (vektormező).
Fizikai alkalmazás: a folyadékelemek forgómozgásának leírásában használjuk.

A nabla szimbólum

A grad, div, rot egy-egy differenciálási utasítás. Áttekinthetőbbé válnak, ha bevezetjük a következő jelképes vektort:

$$\nabla := \frac{\partial}{\partial x}\underline{i} + \frac{\partial}{\partial y}\underline{j} + \frac{\partial}{\partial z}\underline{k}.$$

Ezt a "vektort" nablának nevezzük. A nabla vektorral
grad$f = \nabla \cdot f$ vagy ∇f (mintha a nabla vektort megszoroznánk az f skalárral),
div$\underline{f} = \nabla \cdot \underline{f}$ vagy $\nabla \underline{f}$ (mintha a nabla vektorral skalárisan szoroznánk $\underline{f}$-et),

rot$\underline{f} = \nabla \times \underline{f} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}$ (mintha a nabla vektorral vektoriálisan szoroznánk $\underline{f}$-et)

Mit jelent: $\nabla(\nabla g)$, ahol g skalármező?
A belső ∇g gradienst jelent. A gradiens vektormező, tehát a külső ∇ a grad g vektormező divergenciáját jelenti. Tehát

$$\nabla(\nabla g) = \text{div grad } g.$$

Írjuk fel részletesen:

$$\nabla g = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z} \right)$$

$$\nabla(\nabla g) = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}$$

Ezt a kifejezést Laplace-g-nek nevezzük. Jelölése: $\nabla^2 g$ vagy Δg.

Vigyázat! A nabla nem mindig viselkedik pontosan úgy, mint egy vektor! Pl. $\nabla \underline{v}$ és $\underline{v}\nabla$ nem ugyanazt jelenti. Az előbbi a $\underline{v}$ vektormező divergenciája, az utóbbi pedig egy olyan kifejezés, amely önmagában nem állhat meg:

$$\underline{v}\nabla = v_1 \frac{\partial}{\partial x} + v_2 \frac{\partial}{\partial y} + v_3 \frac{\partial}{\partial z}.$$

Ha mögötte pl. egy g skalármező áll, akkor

$$(\underline{v}\nabla)g = v_1 \frac{\partial g}{\partial x} + v_2 \frac{\partial g}{\partial y} + v_3 \frac{\partial g}{\partial z}$$

Egyenlő-e ez alapján $\underline{v}(\nabla\underline{v})$ és $(\underline{v}\nabla)\underline{v}$? Az első kifejezés:

$$\begin{aligned}&\underline{v}(\nabla\underline{v}) = (v_1(\nabla\underline{v}), v_2(\nabla\underline{v}), v_3(\nabla\underline{v})) =\\ &= (v_1(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}), v_2(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}), v_3(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}))\end{aligned}$$

A második kifejezésben most $(\underline{v}\nabla)$ a $\underline{v}$ vektormező előtt áll. Ezt úgy kell érteni, hogy a $(\underline{v}\nabla)$-t alkalmazzuk a vektor mindegyik elemére, és ezeket egy vektorba rakjuk:

$$\begin{aligned}&(\underline{v}\nabla)\underline{v} = ((\underline{v}\nabla)v_1, (\underline{v}\nabla)v_2, (\underline{v}\nabla)v_3) =\\ &= (v_1\frac{\partial v_1}{\partial x} + v_2\frac{\partial v_1}{\partial y} + v_3\frac{\partial v_1}{\partial z}, v_1\frac{\partial v_2}{\partial x} + v_2\frac{\partial v_2}{\partial y} + v_3\frac{\partial v_2}{\partial z}, v_1\frac{\partial v_3}{\partial x} + v_2\frac{\partial v_3}{\partial y} + v_3\frac{\partial v_3}{\partial z})\end{aligned}$$

Látható, hogy a két kifejezés nem egyenlő. Az utóbbi a fizikai alkalmazásokban előfordul pl. a mozgásegyenletek tömör alakú felírásánál.

HF: Legyen $\underline{v}(x,y,z) = (x+y, x^2+y^2, \frac{x+y+z}{3})$. Számítsuk ki rot$\underline{v}$-t!

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\underline{v} = \nabla \times \underline{v} &= \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x+y & x^2+y^2 & \frac{x+y+z}{3} \end{vmatrix} =\\ &= \underline{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x+y+z}{3}\right) - \frac{\partial}{\partial z}(x^2+y^2)\right) + \underline{j}\left(\frac{\partial}{\partial z}(x+y) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x+y+z}{3}\right)\right) +\\ &\quad \underline{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(x+y)\right) = \frac{1}{3}\underline{i} - \frac{1}{3}\underline{j} + (2x-1)\underline{k}\end{aligned}$$