Feladatok vektorterekhez

1. Igazold, hogy az $\underline{a}_1 = (1,2,3)$, $\underline{a}_2 = (4,5,6)$ és $\underline{a}_3 = (5,7,9)$ $I\!R^3$-beli vektorok lineárisan összefüggőek!

2. Add meg a $(3,5)$ vektor koordinátáit a $\{(2,1),(1,5)\}$ bázisban!

3. Mutasd meg, hogy az $\underline{a}_1 = (1,0,0), \underline{a}_2 = (1,1,0)$ és $\underline{a}_3 = (1,1,1)$ vektorok lineárisan függetlenek! Add meg a $(2,4,1)$ vektor koordinátáit a $\{\underline{a}_1,\ \underline{a}_2,\ \underline{a}_3\}$ bázis szerint.

4. Legyen $W = \{(a_1,a_2,a_3,a_4) : a_i \in I\!R, i = 1,2,3,4, \quad a_1 + a_2 = a_3 - a_4\}$ (azaz azon számnégyesek halmaza, amelyek első és második elemének összege egyenlő a harmadik és negyedik elem különbségével). Lásd be, hogy W altere $I\!R^4$-nek (a szokásos műveletekkel).

5. Legyen X azon legfeljebb n-edfokú polinomok halmaza (n tetszőleges természetes szám) amelyekre
a.) $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in I\!R$;
b.) $f(0) = 0$, $f(1) = 0$;
c.) $f(0) = 0$, $f(1) = 1$.
Vektorteret alkot-e X az a.), b.) ill. c.) esetben a függvények körében szokásos összeadással és skalárral való szorzással?

6. Tekintsük P_3-ban a következő bázist: $\{b_1(x) = 1,\ b_2(x) = x,\ b_3(x) = x^2,\ b_4(x) = x^3\}$. Adjuk meg ebben a bázisban az $f(x) = 5x^3 + 12x^2 - 1$ P_3-beli elem koordinátáit!

Megoldások

1. Vegyük észre, hogy $\underline{a}_3 = \underline{a}_1 + \underline{a}_2$, azaz $\underline{a}_3$ előállítható $\underline{a}_1$ és $\underline{a}_2$ lineáris kombinációjával.

2. Azon α és β számokat keressük, amelyekkel $(3,5) = \alpha(2,1) + \beta(1,5)$. Elvégezve a jobb oldalon a műveleteket és egyenlővé téve a két oldal megfelelő koordinátáit, kapjuk, hogy $\alpha = \frac{10}{9}$, $\beta = \frac{7}{9}$.

3. Akkor lineárisan függetlenek, ha az

$$\alpha(1,0,0)+\beta(1,1,0)+\gamma(1,1,1)=(0,0,0)$$

egyenlet csak $\alpha = 0,\ \beta = 0,\ \gamma = 0$ esetén teljesül. Az egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha a bal és jobb oldalon szereplő vektorok megfelelő koordinátái egyenlők. A bal oldalon elvégezve a műveleteket, a

$$(\alpha+\beta+\gamma,\ \beta+\gamma,\ \gamma)$$

vektort kapjuk. A megfelelő koordináták egyenlőségéből a következő egyenletrendszert kapjuk: $\alpha+\beta+\gamma = 0$, $\beta+\gamma = 0$, $\gamma = 0$. Ennek egyetlen megoldása valóban $\alpha = 0,\ \beta = 0,\ \gamma = 0$.
A $(2,4,1)$ vektor az $\{\underline{a}_1,\ \underline{a}_2,\ \underline{a}_3\}$ bázisban: (-2, 3, 1). (Megoldás: mint a 2. feladatban.)

4. Legyenek $\underline{a}, \underline{b} \in W$ tetszőlegesek. Ekkor

$$a_1+a_2=a_3-a_4 \text{ és } b_1+b_2=b_3-b_4. \quad (*)$$

Def. szerint $\underline{a}+\underline{b}=(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3, a_4+b_4)$, és (*) miatt $a_1+b_1+a_2+b_2=a_3+b_3-(a_4+b_4)$, azaz $\underline{a}+\underline{b} \in W$. Valamint, $\lambda\underline{a}=(\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3, \lambda a_4)$, és (*) miatt $\lambda a_1+\lambda a_2=\lambda a_2-\lambda a_4$, azaz $\lambda\underline{a} \in W$.

5. a.) Nem (mert pl. $f(x) = x^2 \geq 0$, de $(-1)\cdot f(x) = -x^2 < 0$, ha $x \neq 0$).
b.) Igen. Ugyanis, ha $f \in X$, azaz $f \in P_n$, $f(0) = 0$ és $f(1) = 0$, akkor tetsz. $\lambda \in I\!R$ esetén $\lambda f \in P_n$, $(\lambda f)(0) = \lambda \cdot f(0) = 0$, és $(\lambda f)(1) = \lambda \cdot f(1) = 0$, valamint $f, g \in X$-re $f+g \in P_n$, $(f+g)(0) = f(0)+g(0) = 0+0 = 0$ és $(f+g)(1) = f(1)+g(1) = 0+0 = 0$.
c.) Nem (mert pl. $f, g \in X$-re $(f+g)(1) = 1+1 = 2 \neq 1$).

6. Mivel $f(x) = -1\cdot b_1(x)+0\cdot b_2(x)+12\cdot b_3(x)+5\cdot b_4(x)$, ezért a koordináták:-1, 0, 12, 5. ($f(x)$ tehát a megadott bázisban a $(-1,0,12,5)$ számnégyessel azonosítható.)