Gyakorlófeladatok a numerikus módszerekhez

1. A pontos érték kiszámítása nélkül határozzuk meg, hogy legfeljebb mekkora hibát követhetünk el az $x_0 = 0,5$ pontban, ha az $f(x) = \sin x + \cos x$ függvényt a -1, 0, 1 alappontokra támaszkodó interpolációs polinomjával helyettesítjük.

2. Az $f(x) = x^5 + 2$ függvény integrálját a $[-1, 1]$ intervallumon az összetett trapézformulával, 10^{-5} pontossággal szeretnénk kiszámítani. Hány részre daraboljuk a $[-1, 1]$ intervallumot?

3. Közelítsük az $f(x) = \cos x + (x+1)^2$ függvény $x_0 = 0$ pontbeli deriváltját jobb oldali különbségi hányadossal, ahol $x_1 = 0,1$. Számítsuk ki a pontos értéket. Becsüljük meg a hibát a pontos érték felhasználása nélkül.

4. Tekintsük az
$$\begin{cases} y'(t) = t^2 + y(t), \quad t \in [0, 2] \\ y(t_0) = 1 \end{cases}$$
kezdetiérték-feladatot. Számítsuk ki a közelítő megoldást a $t = 1$ és a $t = 2$ pontban az explicit Euler-módszerrel, ha a lépésköz $\Delta t = 1$.

Megoldások:

1. Az interpoláció hibájáról szóló tétel szerint, ha egy függvény 3-szor folytonosan differenciálható, és p a függvény másodfokú interpolációs polinomja, akkor létezik olyan ξ pont az alappontok és az x által meghatározott legszűkebb intervallumban, amelyre
$$f(x) - p(x) = \frac{1}{3!}\omega_2(x) f'''(\xi).$$
Abszolút értéket véve
$$|f(x) - p(x)| = \frac{1}{6}|\omega_2(x) f'''(\xi)|.$$
Most $f'''(x) = -\cos x + \sin x \Rightarrow |f'''(x)| \le 2 \ \forall x \in \mathbb{R}$. Így a fenti egyenlőtlenség jobb oldalán $|f'''(\xi)| \le 2$. Ebből
$$|f(0,5) - p(0,5)| \le \frac{1}{3}|(0,5+1)0,5(0,5-1)| = 0,125.$$

2. Az összetett trapézformula képlethibája:
$$\left|\int_a^b f - t_n(f)\right| \le \frac{(b-a)^3}{12n^2}|f''(\xi)|.$$

Most $f''(x) = 20x^3 \Rightarrow |f''(x)|$ maximuma a $[-1,1]$ intervallumon 20. Ebből

$$\left|\int_{-1}^{1} f - t_n(f)\right| \leq \frac{2^3}{12n^2} \cdot 20 = \frac{40}{3n^2}.$$

Ha n-t úgy választjuk meg, hogy $40/(3n^2)$ kisebb legyen 10^{-5}-nél, akkor a hiba is kisebb lesz. Az egyenlőtlenség megoldásából azt kapjuk, hogy $n \geq 1154,7$, azaz legalább 1155 részre kell darabolni az intervallumot.

3.

$$f'(0) \approx \frac{f(0,1) - f(0)}{0,1 - 0} = \frac{\cos(0,1) + (1,1)^2 - \cos(0) - 1^2}{0,1 - 0} = 2,0500.$$

A pontos érték 2. A hibabecslésre a következő formulát alkalmazhatjuk:

$$\left|f'(0) - \frac{f(0,1) - f(0)}{0,1 - 0}\right| = \left|-\frac{1}{2} f''(\xi)(0,1 - 0)\right|,$$

ahol $\xi \in (0; 0,1)$ valamely pont. Mivel $f''(x) = -\cos x + 2$, $|f''(x)| \leq 3\ \forall x \in \mathbb{R}$. Finomabb becslést is adhatunk, felhasználva, hogy $\xi \in (0; 0,1)$. Ezen az intervallumon az f'' függvény szigorúan monoton nő, ezért szupremuma a 0,1-ben felvett értéke (és a függvény pozitív, tehát az abszolút érték elhagyható): $|f''(x)| = f''(x) \leq -\cos(0,1) + 2 = 1,0050\ \forall x \in (0; 0,1)$. Ebből

$$\left|-\frac{1}{2} f''(\xi)(0,1 - 0)\right| \leq 0,051.$$

4. Az explicit Euler-módszer képlete:

$$y_{i+1} = f(t_i, y_i) \cdot \Delta t + y_i.$$

$t_0 = 0, y_0 = y(0) = 1.$
$y_1 = f(t_0, y_0)\Delta t + y_0 = (t_0^2 + y_0)\Delta t + y_0 = 2.$
$t_1 = 1$
$y_2 = f(t_1, y_1)\Delta t + y_1 = (t_1^2 + y_1)\Delta t + y_1 = 5.$