1. gyakorló feladatsor
Hibabecslések

1. Az $f(x) = x^3$ függvényt az $x_0 = 1$ pont környezetében az 1 pont körüli
a) elsőfokú
b) másodfokú
Taylor-polinommal közelítjük. Írjuk fel a közelítő függvényt, és adjunk rá abszolút hibakorlátot. Legfeljebb mekkora az $x = 1,2$ és az $x = 0,8$ pontban elkövetett hiba?

2. Az e^4 értékét 3^4 értékével közelítjük. Mekkora az abszolút és a relatív hiba?

3. a) Adjunk lineáris becslést arra, hogy mekkora öröklött hiba léphet fel két szám összeszorzásakor.
b) Egy téglalap oldalai $a = 6 \pm 0,02$, $b = 3 \pm 0,01$. A $\tilde{T} = 6 \cdot 3 = 18$ szorzat mekkora hibával adja meg a téglalap területét?

4. Legyen $a_1 = 2 \pm 0,01$ és $a_2 = 4 \pm 0,02$. Legfeljebb mekkora hibát vétünk a lineáris becslés alapján $2a_1^2 + a_2^3$ közelítő kiszámításánál, ha a_1-et 2-nek, a_2-t pedig 4-nek vesszük?

Megoldások:

1. a.) $T_1(f(x), 1) = 1 + 3(x-1) = 3x - 2$
$|f(x) - T_1(f(x), 1)| = |\frac{f''(\xi)}{2!}(x-1)^2| = |3\xi(x-1)^2|$, ahol ξ valamely pont az x és az $x_0 = 1$ között.
Az f függvény monoton növekedése miatt $x > 1$-re $|3\xi(x-1)^2| \leq 3x(x-1)^2$, $x < 1$-re pedig $|3\xi(x-1)^2| \leq 3(x-1)^2$
A hiba az $x = 1,2$ pontban legfeljebb $3 \cdot 1,2 \cdot (0,2)^2 = 0,144$, az $x = 0,8$ pontban pedig legfeljebb $3 \cdot (-0,2)^2 = 0,12$.
b.) $T_2(f(x), 1) = 1 + 3(x-1) + 3(x-1)^2 = 3x^2 - 3x + 1$.
$|f(x) - T_2(f(x), 1)| = |\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-1)^3| = |\frac{6}{3!}(x-1)^3| = |(x-1)^3|$. Így a hiba az $x = 1,2$ és az $x = 0,8$ pontban is legfeljebb $(0,2)^3 = 0,008$. (Sőt, mivel a hibabecslő formulában szereplő harmadik derivált konstans, ez most kivételesen pontosan egyenlő a hibával! Ellenőrizzük ezt mindkét megadott pontban.)

2. Az $f(x) = x^4$ függvény öröklött hibáját kell megbecsülni $a = e$ és $\tilde{a} = 3$ mellett. A pontos becslést alkalmazva:

$$|f(e) - f(3)| \leq \sup_{[e,3]} |f'| \cdot \Delta_e$$

Δ_e vehető pl. 0,3-nek. Az f függvény deriváltja: $f'(x) = 4x^3$, amely az $[e, 3]$ intervallumon monoton növő, ezért az $[e, 3]$ intervallumon vett szupremuma nem más, mint f-nek az intervallum jobb oldali végpontjában felvett értéke: $4 \cdot 3^3 = 108$. Ebből $\Delta_{e^4} = 32,4$, ill. $\delta_{e^4} = \frac{32,4}{3^4} = 40\%$.

3. a.) Az $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ kétváltozós függvény öröklött hibáját keressük. Tegyük fel, hogy az összeszorzandó számokat csak valamekkora hibával ismerjük: $a_1 = \tilde{a}_1 \pm \Delta_{a1}$, ill. $a_2 = \tilde{a}_2 \pm \Delta_{a2}$. Ekkor $|a_1 a_2 - \tilde{a}_1 \tilde{a}_2| = |f(a_1, a_2) - f(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2)| \leq |\partial_1 f(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2)| \cdot \Delta_{a1} + |\partial_2 f(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2)| \cdot \Delta_{a2} = |\tilde{a}_2| \cdot \Delta_{a1} + |\tilde{a}_1| \cdot \Delta_{a2}$.
b.) Az a.) feladat eredménye alapján $|T - \tilde{T}| = |a \cdot b - \tilde{a} \cdot \tilde{b}| \leq |\tilde{b}| \cdot \Delta_a + |\tilde{a}| \cdot \Delta_b = 3 \cdot 0,02 + 6 \cdot 0,01 = 0,12$.

4. Az $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^3$ függvény parciális deriváltjai: $\partial_1 f(x_1, x_2) = 4x_1$, $\partial_2 f(x_1, x_2) = 3x_2^2$. Ezeket az $(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2)$ helyen véve $\partial_1 f(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2) = 4\tilde{a}_1$ és $\partial_2 f(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2) = 3\tilde{a}_2^2$. Így a lineáris becslés: $|(2a_1^2 + a_2^3) - (2\tilde{a}_1^2 + \tilde{a}_2^3)| \leq |4\tilde{a}_1| \cdot \Delta_{a1} + 3 \cdot \tilde{a}_2^2 \cdot \Delta_{a2} = 4 \cdot 2 \cdot 0,01 + 3 \cdot 16 \cdot 0,02 = 1,04$.