5. gyakorló feladatsor
Megoldások

1. c.), f.)

2. a.) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x_1, x_2) = (2x_1 + 2x_2, 2x_1 + 2x_2)$
b.) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$ (minden számpárt helybenhagy)
c.) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x_1, x_2) = (0, 0)$ (minden számpárhoz a $(0, 0)$-t rendeli)
d.) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ f(x) = (-x, 0, x)$
e.) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_3, x_2)$ (megcseréli minden számhármas második és harmadik elemét)
f.) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ f(x_1, x_2) = (-5x_1 + 3x_2, -x_1 + x_2, 2x_1 + 4x_2)$

3. Igen, hiszen két tetszőleges vektor összegének tükörképe a tükörképeik összege, és egy tetszőleges vektor adott számszorosának tükörképe a tükörkép számszorosa. A leképezésnek az adott (descartesi) bázispárhoz tartozó mátrixa az a 2×2-es mátrix, amelynek első oszlopa a B_1 első elemének, azaz az $\underline{i}$ vektornak a tükörképe a B_2 bázisban, azaz szintén a descartesi koordináta-rendszerben: $(-1, 0)$. A második oszlopba a $\underline{j}$ tükörképének descartesi koordinátáit írjuk: (0,-1). Így a keresett mátrix:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

4. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(Nem meglepő, hogy a helybenhagyás mátrixát kaptuk, hiszen a vektorokkal együtt a koordináta-rendszert is 90^o-kal elforgattuk. Így a vektoroknak nem változnak meg a koordinátái.)

5.
$$a.)\ \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \frac{\sin\phi - \cos\phi}{2} & \frac{\cos\phi + \sin\phi}{2} \end{bmatrix} \quad b.)\ \begin{bmatrix} 2\cos\phi & -2\sin\phi \\ 2(\sin\phi - \cos\phi) & 2(\cos\phi + \sin\phi) \end{bmatrix}$$

6. a.)
$$A_t \cdot A_{60^o} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

b.)
$$A_{60^o} \cdot A_t = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

A két különböző sorrendben elvégzett mátrixszorzás eltérő eredményt ad, azaz nem mindegy, hogy milyen sorrendben végezzük el a tükrözést és a 60^o-os forgatást.

7. Azt az

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

mátrixot keressük, amelyre

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 14 \end{bmatrix}$$

Végezzük el a bal oldali mátrixszorzásokat az egyelőre ismeretlen mátrixszal. Így a következő egyenletrendszerekhez jutunk:

$$\begin{matrix} 1 \cdot a_{11} + 2 \cdot a_{12} = 3 \\ 1 \cdot a_{21} + 2 \cdot a_{22} = 8 \end{matrix} \quad \text{és} \quad \begin{matrix} 3 \cdot a_{11} + 1 \cdot a_{12} = 4 \\ 3 \cdot a_{21} + 1 \cdot a_{22} = 14 \end{matrix}$$

Ezt a négy egyenletet a négy ismeretlen mátrixelemre megoldva kapjuk: $a_{11} = 1, a_{12} = 1, a_{21} = 4, a_{22} = 2$. Így a keresett mátrix:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$