Matematika 4 gyakorlat
Földtudomány és Környezettan BSc II/2

1. gyakorlat

Integrálszámítás $\mathbb{R}^n$-ben: vonalintegrál, primitív függvény, Newton – Leibniz-szabály.

Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ egy tartomány, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvény (vektormező, erőtér). Az f primitív függvényén egy olyan $F : \Omega \to \mathbb{R}$ függvényt értünk, amelyre $F' = f$, vagyis $\partial_i F(x) = f_i(x)$ minden $i = 1, 2, \dots, n$-re. Ezt az F függvényt az f potenciálfüggvényének is nevezik.

Ha $r : [a, b] \to \Omega$ egy folytonosan differenciálható görbe, akkor az ívhossza

$$\ell(r) = \int_a^b |r'(t)|\ \mathrm{d}t.$$

Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ egy tartomány, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvény. Legyen $r : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ egy folytonosan differenciálható görbe, amelyre $r([a, b]) \subset \Omega$. Ekkor az f függvény r görbe mentén vett vonalintegrálján az

$$\int_r f := \int_a^b \langle f(r(t)), r'(t)\rangle\ \mathrm{d}t$$

valós integrált értjük. Ha f-nek létezik Ω-ban primitív függvénye, akkor

$$\int_r f = F\big(r(b)\big) - F\big(r(a)\big).$$

Ezt az F függvényt az f potenciálfüggvényének is nevezik. Ebből következik, hogy ha f-nek van potenciálja, akkor az integrál értéke csak a görbe végpontjaitól függ, illetve zárt görbe (azaz $r(a) = r(b)$) esetén f vonalintegrálja r mentén nulla. Ha egy erőtérben van potenciálfüggvény, akkor konzervatív erőtérről beszélünk.

1. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (y, x)$.
   (a) Tekintsük az $r : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, $r(t) = (t, t)$ utat. Számítsuk ki $\int_r f$ értékét definíció szerint.
   (b) Legyen r az a zárt görbe, amely a $K = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 = 1\big\}$ kört az óramutató járásával ellentétes irányban egyszer körbejárja. Számítsuk ki $\int_r f$ értékét. Számítsuk ki a vonalintegrált akkor is, ha r a másik irányban járja be K-t.
   (c) Van-e f-nek primitív függvénye? Ha igen, akkor határozzuk meg.

2. Legyen $f(x, y) = (y, -x)$, r az a zárt görbe, amely a $K = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 = 1\big\}$ kört az óramutató járásával ellentétes irányban egyszer körbejárja.
   (a) Számítsuk ki $\int_r f$ értékét.
   (b) Van-e f-nek primitív függvénye?
   (c) Mi a helyzet, ha az út irányítását megfordítjuk?
   (d) Meg tudnánk-e adni egy nemtriviális zárt görbét, amin a vonalintegrál nulla?

3. Legyen
$$f(x, y) = \Big(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}\Big),$$
   r az a zárt görbe, amely a $K = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 = 1\big\}$ kört az óramutató járásával ellentétes irányban egyszer körbejárja. Számítsuk ki $\int_r f$ értékét.

Feladatok:

1. Legyen $f(x, y) = (x + y, x - y)$. Határozzuk meg f primitív függvényét!

2. Legyen $f(x,y)=(x,y)$, r pedig legyen a következő út: a $(0,0)$-ból indulva egyenes szakaszokon a $(1,0)$ és $(0,1)$ pontokon áthaladva visszatérünk az origóba. $\int_r f=?$

3. Legyen $f(x,y)=(x^2+y,y^2+x)$, r az $y=x^{2012}$ $(x\in[0,1])$ függvény grafikonja. Számítsuk ki $\int_r f$ értékét.

4. Határozzuk meg az alábbi $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ függvények primitív függvényét.
   (a) $f(x,y,z)=(yz,xz,xy)$;
   (b) $f(x,y,z)=(x^2-2yz,y^2-2xz,z^2-2xy)$;
   (c) $f(x,y,z)=\left(1-\frac{1}{y}+\frac{y}{z},\frac{x}{z}+\frac{x}{y^2},-\frac{xy}{z^2}\right)$.

5. Legyen $f(x,y)=(x^2-2xy,y^2-2xy)$, $r:\ y=x^2$ $(x\in[-1,1])$. $\int_r f=?$

6. Legyen $f(x,y)=(x^2+y^2,x^2-y^2)$, $r:\ y=1-|1-x|$, $(x\in[0,2])$. $\int_r f=?$

7. $(*)$ Legyen $f(x,y)=\left(\frac{y}{3x^2-2xy+3y^2},\frac{-x}{3x^2-2xy+3y^2}\right)$. Határozzuk meg f primitív függvényét!

2. gyakorlat

Integrálszámítás $\mathbb{R}^n$-ben: vonalintegrál, primitív függvény, Newton – Leibniz-szabály.

1. Határozzuk meg $f(x,y)=(x,y)$ primitív függvényét.

2. Legyen $f(x,y)=(x^2+2xy-y^2,x^2-2xy-y^2)$. Határozzuk meg f primitív függvényét!

3. Legyen $f(x,y)=(x^2+y,y^2-x)$, az r út pedig annak a téglalapnak a határa, melynek csúcsai a bejárás szerinti sorrendben $(1,2)$, $(3,2)$, $(3,4)$, $(1,4)$. $\int_r f=$

4. Legyen $f(x,y,z)=(y,z,x)$, $r(t)=(a\cos t,a\sin t,bt)$, ahol $t\in[0,2\pi]$. $\int_r f=?$

További feladatok:

1. Legyen $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ differenciálható függvény. Bizonyítsuk be, hogy f' pontosan akkor szimmetrikus, ha $\operatorname{rot} f=0$.

2. Legyen $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tetszőleges differenciálható függvény. Mutassuk meg, hogy az $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=\big(x\cdot g(x^2+y^2),y\cdot g(x^2+y^2)\big)$ függvény minden szakaszonként sima zárt útra vett vonalintegrálja nulla.

3. Legyen $f(x,y)=\left(\mathrm{e}^{x^2+y^2}x,\mathrm{e}^{x^2+y^2}y\right)$ egy fizikai erőtér. Határozzuk meg a végzett munkát, ha az origóból az $(1,1)$ pontba jutunk el. (Ötlet: használjuk az előző feladatot.)

4. Legyen $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ folytonos függvény, $r:[a,b]\to\mathbb{R}^2$. Bizonyítsuk be, hogy $\left|\int_r f\right|\le\ell(r)\cdot M$, ahol $\ell(r)$ az r szakaszonként sima út hossza és $M=\max\{|f(r(t))|:\ t\in[a,b]\}$.

5. $(*)$ Legyen $f(x,y)=\left(\frac{y}{(x^2+xy+y^2)^2},\frac{-x}{(x^2+xy+y^2)^2}\right)$. Bevezetve az $I_R:=\oint_{\{x^2+y^2=R^2\}}f$ jelölést, mutassuk meg, hogy $\lim\limits_{R\to\infty}I_R=0$. (Használjuk az előző feladatot.)

6. $(*)$ Ha az origóba egy m tömegű testet helyezünk, akkor az $x\neq0$ pontba helyezett egységnyi tömegű testre x-szel ellentétes, $Gm/|x|^2$ nagyságú erő hat, ahol G a gravitációs állandó. A gravitációs erőtér esetén tehát $\Omega=\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$, $f(x)=-Gm\cdot\frac{x}{|x|^3}$. Mutassuk meg, hogy a gravitációs erőtér konzervatív!

3. gyakorlat

Többszörös integrálok: Kettős integrál, polártranszformáció.

Kétváltozós $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény integráljának kiszámításához az alábbi lebontási tételt használhatjuk, amennyiben egy téglalapon integrálunk:

1. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, és $T = [a, b] \times [c, d]$. Ekkor*

$$\int_T f = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\ \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\ \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

Hasonló állítás fogalmazható meg az $n = 3$ esetre is. Gyakran olyan síkidomon kell integrálni, amelyet alulról és felülről folytonos függvények grafikonjai határolnak. Ha $\varphi,\ \psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, akkor az

$$N_x = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in [a, b],\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\right\}$$

halmazt (az x-tengelyre nézve) normáltartománynak nevezzük. Ekkor

$$\int_{N_x} f = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\ \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

Hasonló állítás fogalmazható meg olyan N_y tartományra, amely az y-tengelyre nézve normáltartomány.

1. Számítsuk ki az alábbi integrálokat!
   (a) Határozzuk meg az $f(x, y) = x^2 + 4y$ függvény integrálját az egységnégyzeten.
   (b) Határozzuk meg C értékét úgy, hogy az $f(x, y) = C \cdot (x^2 + 3y^2)$ függvény egységnégyzetre vett integrálja 1 legyen!
   (c) $T := [0, \ln 2] \times [0, \ln 3]$, $\int_T \mathrm{e}^{3x+4y}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y =?$
   (d) $T := [0, \infty) \times [0, \infty)$, $\int_T \mathrm{e}^{-x-y}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y =?$

2. Határozzuk meg az integrációs határokat az alábbi normáltartományoknál és számítsuk ki az integrálokat!
   (a) $H := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le x \le 1, x^2 \le y \le x\right\}$. $\int_H xy^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y =?$
   (b) Határozzuk meg a $xy = a^2$ és $x + y = \frac{5}{2}a$ görbék által közrefogott síkidom területét!
   (c) Határozzuk meg az egységsugarú körlap területét, polártranszformáció nélkül.

   Gyakran egy általánosabb $Q \subset \mathbb{R}^2$ halmazon (például egy körön) kell integrálni. Ha van olyan $T \subset \mathbb{R}^2$ halmaz és egy $g(x, y) : T \to Q$ bijektív leképezés, amely folytonosan differenciálható, akkor

   $$\int_Q f = \int_T f\big(g_1(u, v), g_2(u, v)\big) \left|\det\left(g'(u, v)\right)\right|\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v,$$

   ahol tehát a g leképezés Jacobi-mátrixa determinánsának abszolút értékével szorzunk. Nyilván a T halmaznak olyannak kell lenni, amin már „könnyű” integrálni, ilyen például egy téglalap. Tipikus példa, ha például egy origó középpontú, R sugarú körön kell integrálni. Ekkor $Q = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \le R^2\right\}$, $T = [0, R] \times [0, 2\pi]$ és $g(r, \varphi) = (r \cos\varphi,\ r \sin\varphi)$ az úgynevezett polártranszformáció. Ekkor

   $$\det(g'(r, \varphi)) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

   és így

   $$\int_Q f = \int_{[0,R]\times[0,2\pi]} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \cdot r\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\varphi.$$

3. Integráltranszformációval számoljuk ki az alábbi integrálokat!
   (a) Határozzuk meg az egységsugarú körlap területét polártranszformációval is.
   (b) $Q := \left\{(x, y) :\ x^2 + y^2 \le 1, 0 \le x, 0 \le y\right\}$, $\displaystyle\int_Q \frac{2xy}{x^2 + y^2}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y =?$

(c) $Q := \{(x, y) : 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$, $\int_Q \ln(x^2 + y^2)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = ?$

4. Vegyes feladatok:

   (a) Cseréljük fel az integrálás sorrendjét az alábbi integrálokban.

   i. $\int_0^2 \int_x^{2x} f(x, y)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x$;

   ii. $\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} f(x, y)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x$;

   iii. $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 f(x, y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$.

   (b) (∗) Mutassuk meg, hogy
$$\int_{\{x^2+y^2 \le a^2\}} x^m y^n\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = 0,$$
   ha az m, n pozitív egészek közül valamelyik páratlan!

   (c) (∗) $\int_{\{x^2+y^2 \le 4\}} \mathrm{sgn}(x^2 + y^2 - 2)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = ?$

4. gyakorlat

Többszörös integrálok: hármas integrál, henger és gömbi koordinátákra való áttérés.

1. Számítsuk ki az alábbi hármasintegrálokat!

   (a) Határozzuk meg az $f(x, y, z) = x^2 + 4yz$ függvény integrálját az egységkockán.

   (b) $T := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 - x,\ 0 \le z \le 1 - x - y\}$, $\int_T 2xy\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z = ?$

   (c) $T := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le \sqrt{1 - x^2},\ 0 \le z \le 1 - x^2 - y^2\}$, $\int_T 2y\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z = ?$

   (d) Határozzuk meg a $z = 1 - x^2 - y^2$ felület xy-sík feletti részének térfogatát!

   A kétváltozós esethez hasonlóan itt is előfordulhat, hogy nem téglatesten, hanem egy $Q \subset \mathbb{R}^3$ gömbön, vagy hengeren (vagy ezek egy részhalmazán) kell integrálni. Ha $Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \le R^2\}$ az origó középpontú R sugarú gömb, akkor legyen $T = [0, R] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ és $g(r, \varphi, \theta) = (r \cos\varphi \sin\theta,\ r \sin\varphi \sin\theta,\ r \cos\theta)$. Ekkor
$$\det(g'(r, \varphi, \theta)) = r^2 \sin\theta$$
   és így
$$\int_Q f = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(r \cos\varphi \sin\theta, r \sin\varphi \sin\theta, r \cos\theta) \cdot r^2 \sin\theta\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\varphi\ \mathrm{d}\theta.$$
   A gömbi koordináták mellett hengerkoordinátákat is érdemes lehet bevezetni, ha egy R sugarú, m magasságú hengeren integrálunk: $x = r\cos\varphi$, $y = r \sin\varphi$, $z = z$ ($0 \le r \le R$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le z \le m$), itt a Jacobi-determináns r lesz.

2. Számítsuk ki az alábbi hármasintegrálokat alkalmas koordináta-transzformációval!

   (a) $Q := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 1, 0 \le z \le 1\}$, $\displaystyle\int_Q \frac{z}{1 + x^2 + y^2}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z = ?$ (Hengerkoordináták alkalmazásával.)

   (b) Számítsuk ki az R sugarú, m magasságú henger térfogatát.

   (c) Számítsuk ki az $f(x, y, z) = \dfrac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$ függvény integrálját az egységgömb első térnyolcadba eső részén! (Gömbi koordináták alkalmazásával.)

   (d) Számítsuk ki az R sugarú gömb térfogatát.

   (e) (∗) Határozzuk meg a $x^2 + y^2 = R^2$, $x + y + z = a$ ($a \ge R\sqrt{2}$), $x = 0$, $y = 0$ és $z = 0$ felületek által közrefogott test térfogatát!

5. gyakorlat

Komplex számok, komplex változós függvények folytonossága, differenciálhatósága.

1. *komplex számok*

   (a) Végezzük el a műveleteket és hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket!

   $$\text{(a)}\quad (1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i}),\qquad \text{(b)}\quad (1+\mathrm{i})^2,\qquad \text{(c)}\quad \frac{1}{\mathrm{i}^3},\qquad \text{(d)}\quad \frac{1+\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}.$$

   (b) Írjuk fel a következő komplex számokat algebrai, trigonometrikus és exponenciális alakban is!

   $$\text{(a)}\quad 1-\mathrm{i},\qquad \text{(b)}\quad \sqrt{3}+\mathrm{i},\qquad \text{(c)}\quad 2\mathrm{i},\qquad \text{(d)}\quad 1,\qquad \text{(e)}\quad \cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3},$$
   $$\text{(f)}\quad \cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3},\qquad \text{(g)}\quad \sin\alpha-\mathrm{i}\cos\alpha.$$

   (c) Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket!

   $$\text{(a)}\quad (1-\mathrm{i})^{2011},\qquad \text{(b)}\quad \frac{(1+\mathrm{i})^9}{(1-\mathrm{i})^7},\qquad \text{(c)}\quad \sqrt{-1},\qquad \text{(d)}\quad \sqrt{\mathrm{i}},\qquad \text{(e)}\quad \sqrt[3]{1},\qquad \text{(f)}\quad \sqrt[5]{1-\mathrm{i}}.$$

   (d) Fejezzük ki $\sin 3\alpha$-t és $\cos 3\alpha$-t $\sin\alpha$-val és $\cos\alpha$-val.

   (e) Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a komplex számok körében!

   $$\text{(a)}\quad z^2+1=0,\qquad \text{(b)}\quad z^2-2z+2=0,\qquad \text{(c)}\quad z^2=\mathrm{i}\,|z|\,,$$
   $$\text{(d)}\quad z^2-2\mathrm{i}z-1=0,\qquad \text{(e)}\quad z^3-21z+20=0.$$

   (f) Igazoljuk a következő azonosságokat!

   $$\text{(a)}\quad \overline{\overline{z}}=z,\qquad \text{(b)}\quad |\overline{z}|=|z|\,,\qquad \text{(c)}\quad \overline{z}z=z\overline{z}=|z|\,,$$
   $$\text{(d)}\quad |z_1z_2|=|z_1|\,|z_2|\,,\qquad \text{(e)}\quad \overline{z_1z_2}=\overline{z}_1\overline{z}_2.$$

   (g) Mutassuk meg, hogy a komplex számtesten nem adható meg olyan rendezés, amely összhangban áll a műveletekkel, azaz $\mathbb{C}$ mint test nem rendezhető.

2. *komplex értelemben vett differenciálhatóság*

   (a) Mutassuk meg, hogy az $f(z)=z^2$ függvény folytonos.

   (b) Definíciót használva számítsuk ki $f'(z)$-t, ha

   $$\text{(a)}\quad f(z)=z^3\qquad \text{(b)}\quad f(z)=\frac{1+z}{1-z}.$$

   (c) Mutassuk meg, hogy az alábbi függvények nem differenciálhatóak!

   $$\text{(a)}\quad f(z)=\operatorname{Re} z,\qquad \text{(b)}\quad f(z)=\overline{z},\qquad \text{(c)}\quad f(z)=|z|\,.$$

   (d) $(*)$ Mutassuk meg, hogy az

   $$f(z)=\begin{cases}\dfrac{\overline{z}^2}{z}, & \text{ha}\quad z\neq 0\\ 0, & \text{ha}\quad z=0\end{cases}$$

   függvény folytonos, illetve állapítsuk meg, hogy létezik-e $f'(0)$!

6. gyakorlat

Cauchy – Riemann-féle differenciálegyenletek, Laplace-féle differenciálegyenlet, komplex hatványsorok.

1. *Cauchy – Riemann-féle differenciálegyenletek, Laplace-féle differenciálegyenlet*

   (a) Differenciálható-e az $f(z) = f(x + \mathrm{i}y) = x^3 - \mathrm{i}(1 - y)^3$ függvény?

   (b) Döntsük el, hogy a komplex számsík mely pontjaiban teljesülnek a Cauchy – Riemann egyenletek az alábbi függvények esetén:

   $$\text{(a)}\quad f(z) = \overline{z}^2, \qquad \text{(b)}\quad f(z) = z\,|z|\,, \qquad \text{(c)}\quad f(z) = \frac{1}{z}, \qquad \text{(d)}\quad f(x + \mathrm{i}y) = xy.$$

   (c) Mutassuk meg, hogy a következő függvények harmonikusak, vagyis kielégítik a Laplace-féle differenciálegyenletet!

   $$\text{(a)}\quad f(x, y) = x^2 - y^2, \qquad \text{(b)}\quad f(x, y) = \mathrm{e}^x \cos y, \qquad \text{(c)}\quad f(x, y) = \ln(x^2 + y^2).$$

   (d) Legyen D egyszeresen összefüggő tartomány, $f : D \to \mathbb{C}$ differenciálható és $\operatorname{Re} f(z)$ állandó D-n. Mutassuk meg, hogy $f(z)$ is állandó D-n.

2. *komplex hatványsorok*

   (a) Határozzuk meg a következő hatványsorok konvergenciasugarát!

   $$\text{(a)}\quad \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \qquad \text{(b)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} nz^n, \qquad \text{(c)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \qquad \text{(d)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n, \qquad \text{(e)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^n}.$$

   (b) Határozzuk meg az e^z, $\sin z$, $\cos z$ függvények hatványsorainak konvergenciasugarát!

   (c) Határozzuk meg az e^z, $\sin z$, $\cos z$ függvények deriváltját!

   (d) Igazoljuk a következő azonosságokat!

   $$\text{(a)}\quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i}\sin z, \qquad \text{(b)}\quad \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z} = \cos z - \mathrm{i}\sin z, \qquad \text{(c)}\quad \cos z = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}),$$

   $$\text{(d)}\quad \sin z = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}), \qquad \text{(e)}\quad \operatorname{ch} \mathrm{i}z = \cos z, \qquad \text{(f)}\quad \operatorname{sh} \mathrm{i}z = \mathrm{i}\sin z,$$

   $$\text{(g)}\quad \mathrm{e}^{z+w} = \mathrm{e}^z \mathrm{e}^w, \qquad \text{(h)}\quad \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y), \qquad \text{(i)}\quad |\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^x.$$

   (e) (∗) Igazoljuk, hogy az $f(z) = \mathrm{e}^z$ függvény periodikus! Hová képezi a $H = \{(x, y) : -\pi < y \leq \pi\}$ halmazt az e^z függvény? Vezessük be a $\log z$ függvényt!

7. gyakorlat

1. ZH

8. gyakorlat

Komplex vonalintegrál: primitív függvény, Newton – Leibniz-formula, Cauchy-féle integráltétel, Cauchy-féle integrálformula.

1. *komplex vonalintegrál kiszámítása, primitív függvény, Newton-Leibniz formula*

   (a) Számítsuk ki $f(z)$ vonalintegrálját az a és a b pontokat összekötő különböző utakon! Legyen

      i. $f(z) = z$, $a = i$ és $b = -i$, az utak pedig az őket összekötő egyenes, illetve az óramutató járásával ellentétes bejárású félkör,

      ii. $f(z) = \overline{z}$, $a = 0$ és $b = 1 + i$, az utak az őket összekötő egyenes, illetve parabola,

      iii. $f(z) = |z|$, $a = -i$ és $b = i$, az utak az őket összekötő egyenes, illetve az óramutató járásával azonos bejárású félkör.

(b) Számítsuk ki $f(z)$ vonalintegrálját az a és a b pontokat összekötő utakon a Newton – Leibniz-formula segítségével! Legyen

   i. $f(z) = e^z$, $a = 0$ és $b = i$, az út az óramutató járásával ellentétes bejárású félkör,

   ii. $f(z) = \sin z$, $a = -i$ és $b = i$.

2. Tétel (Cauchy integráltétele). *Ha D konvex tartomány, $f : D \to \mathbb{C}$ reguláris függvény, γ egy D-ben haladó szakaszonként sima zárt görbe, akkor $\int_\gamma f = 0$.*

Akkor is nulla lesz az integrál, ha vannak olyan pontok, ahol f – látszólag – szinguláris.

3. Lemma. *Ha f reguláris a D tartományon, $z_0 \in D$, és van olyan $r > 0$, hogy $\overline{B}(z_0, r) \setminus \{z_0\} \subset D$, valamint $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)(z - z_0) = 0$, akkor $\int_{\{|z - z_0| = r\}} f = 0$.*

Ebből vezethető le az alábbi

4. Tétel (Cauchy-féle integrálformula). *Ha f reguláris a D tartományon, $\overline{B}(z_0, r) \subset D$, akkor $s \in B(z_0, r)$ esetén*

$$f(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\{|z - z_0| = r\}} \frac{f(z)}{z - s} \, \mathrm{d}z,$$

ahol a z_0 középpontú r sugarú körvonalon pozitív irányban haladunk.

A tétel nem csak körvonalra, hanem minden olyan egyszerű zárt görbére érvényes, amely pozitív irányban egyszer megkerüli a belsejében fekvő s pontot.

2. *Cauchy-féle integráltétel, Cauchy-féle integrálformula*

   (a) Legyen $f(z) = \frac{1}{z^n}$, $n \in \mathbb{N}$, a γ út pedig az origó középpontú egységsugarú kör az óramutató járásával ellentétes irányban bejárva. Számítsuk ki a Cauchy-féle integrálformula nélkül az $\int_\gamma f$ vonalintegrál értékét, ha $n > 1$, illetve ha $n = 1$.

   (b) Legyen $f(z) = \frac{\sin z}{z}$, a γ út pedig az origó középpontú egységsugarú kör az óramutató járásával ellentétes irányban bejárva. Számítsuk ki a Cauchy-féle integrálformula nélkül $\int_\gamma f$ értékét.

   (c) Oldjuk meg az előző két feladatot a Cauchy-féle integrálformula felhasználásával!

9. gyakorlat

Komplex vonalintegrál: Cauchy-féle integrálformula és következményei, komplex vonalintegrál alkalmazása.

1. *Cauchy-féle integrálformula és következményei*

   (a) Legyen a γ zárt görbe a z_0 középpontú R sugarú, az óramutató járásával ellentétes bejárású kör. Számítsuk ki $\oint_\gamma g$ értékét, ha

      i. $g(z) = \dfrac{1}{z - z_0}$, $R = 1$;

      ii. $g(z) = \dfrac{z}{z - z_0}$, $R = 1$;

      iii. $g(z) = \dfrac{\sin^8 z}{z - \frac{\pi}{2}}$, $z_0 = 2$, $R = 2$;

      iv. $g(z) = \dfrac{e^z}{z - 2}$, $z_0 = \frac{5}{2}$, $R = 1$.

   (b) Legyen a γ zárt görbe a z_0 középpontú R sugarú, az óramutató járásával ellentétes bejárású kör. Számítsuk ki $\oint_\gamma g$ értékét, ha

      i. $g(z) = \dfrac{e^{z^2}}{z^2 - 1}$, $z_0 = \frac{1}{2}$, $R = 1$;

ii. $g(z) = \dfrac{z^4 e^{\pi z}}{z^2+1}$, $z_0 = i$, $R = 1$;

iii. $g(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$,

$$\text{(a)}\quad z_0 = 5,\ R = 1, \quad \text{(b)}\quad z_0 = i,\ R = 1, \quad \text{(c)}\quad z_0 = -i,\ R = 1, \quad \text{(d)}\quad z_0 = 0,\ R = 3;$$

iv. $g(z) = \dfrac{e^z}{z^2+2z-3}$,

$$\text{(a)}\quad z_0 = 1,\ R = 1, \quad \text{(b)}\quad z_0 = -3,\ R = 1, \quad \text{(c)}\quad z_0 = 6,\ R = 1.$$

(c) Legyen a γ zárt görbe a z_0 középpontú R sugarú, az óramutató járásával ellentétes bejárású kör. Számítsuk ki $\oint_\gamma g$ értékét, ha

i. $g(z) = \dfrac{z}{(z-z_0)^2}$;

ii. $g(z) = \dfrac{z}{(z-z_0)^6}$.

2. *komplex vonalintegrál alkalmazása valós integrálok kiszámítására*

(a) (∗) Határozzuk meg az alábbi improprius integrálokat!

$$\text{(a)}\quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = ? \qquad \text{(b)}\quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x = ?.$$

10. gyakorlat

Függvénysorozatok és egyenletes konvergencia.

1. *egyenletes konvergencia*

(a) Vizsgáljuk meg, hogy egyenletesen konvergensek-e az alábbi függvénysorozatok a megadott intervallumon!

i. $f_n(x) = x^n$ a $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, illetve a $[0,1)$ intervallumon;

ii. $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$ a $[0,1]$ intervallumon;

iii. $f_n(x) = \dfrac{1}{x+n}$ a $(0,\infty)$ intervallumon;

iv. $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n}$ a $(-\infty,\infty)$ intervallumon;

v. $f_n(x) = \sin \dfrac{x}{n}$ a $(-\infty,\infty)$ intervallumon;

vi. $f_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ tetszőleges véges intervallumon, illetve a $(-\infty,\infty)$ intervallumon;

vii.

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } 0 \le x \le n, \\ 1, & \text{ha } n < x \le n+1, \\ 0, & \text{ha } n+1 < x \end{cases}$$

a $[0,\infty)$ intervallumon;

viii.

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & \text{ha } 0 \le x \le \frac{1}{n}, \\ n^2\left(\dfrac{2}{n} - x\right), & \text{ha } \frac{1}{n} < x < \frac{2}{n}, \\ 0, & \text{ha } \frac{2}{n} \le x \end{cases}$$

a $[0,1]$ intervallumon.

(b) Lehetséges-e, hogy szakadásos függvények egyenletesen konvergens sorozata folytonos függvényt állítson elő?

2. *függvénysorozatok integrálása és deriválása*

   (a) Mutassuk meg, hogy az $f_n(x) = \dfrac{1}{n} \operatorname{arc\,tg} x^n$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $(-\infty, \infty)$ intervallumon, de $\lim\limits_{n\to\infty} f_n' \neq \left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n\right)'$.

   (b) Mutassuk meg, hogy az $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ függvénysorozat konvergens a $[0,1]$ intervallumon, de

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \neq \int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

   (c) Felcserélhető-e a limeszképzés és az integrálás az 1(a)vii. és 1(a)viii. példákban?

   (d) Mutassuk meg, hogy az $f_n(x) = nx(1-x)^n$ függvénysorozat *nem* egyenletesen konvergens a $[0,1]$ intervallumon, de mégis igaz, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

11. gyakorlat

Függvénysorok és egyenletes konvergencia.

1. *egyenletes konvergencia*

   (a) Bizonyítsuk be, hogy az alábbi függvénysorok egyenletesen konvergensek a megadott intervallumokon!

      i. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$ a $(-\infty, \infty)$ intervallumon;

      ii. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+2^n}$ a $(-2, \infty)$ intervallumon;

      iii. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$ a $[0, \infty)$ intervallumon.

   (b) Tegyük fel, hogy az $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ sor abszolút és egyenletesen konvergens az I intervallumon. Mutassuk meg, hogy ebből nem következik a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ sor egyenletes konvergenciája! Használjuk ehhez a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n(1-x)x^n$ függvénysort a $[0,1]$ intervallumon!

   (c) Tegyük fel, hogy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens. Igazoljuk, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx}$ függvénysor egyenletesen konvergens a

      i. $[a, \infty)$ intervallumon, ahol $a > 0$!

      ii. $(*)$ $[0, \infty)$ intervallumon!

2. *függvénysorok integrálása és deriválása*

   (a) Mutassuk meg, hogy az $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ függvény folytonosan differenciálható az egész számegyenesen!

   (b) Határozzuk meg a $\displaystyle\lim_{x\to 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} \left(x^n - x^{n+1}\right)$ határértéket.

   (c) Szabad-e tagonként differenciálni a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{n^2}$ függvénysort?

(d) $(*)$ Szabad-e tagonként integrálni a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}}\right)$ függvénysort a $[0,1]$ intervallumon?

12. gyakorlat

Fourier-sorok

1. *Fourier-sorok.*

   (a) Fejtsük Fourier-sorba a következő függvényeket a megadott intervallumokon!

   i.
   $$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi-x}{2}, & \text{ha} \quad x \in (0, 2\pi), \\ 0, & \text{ha} \quad x = 0 \text{ vagy } x = 2\pi. \end{cases}$$
   Helyettesítsünk az eredménybe $x = \frac{\pi}{2}$-t. Milyen összefüggést kapunk?

   ii.
   $$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{ha} \quad x \in (-\pi, 0), \\ 0, & \text{ha} \quad x = 0 \text{ vagy } x = \pm\pi, \\ 1, & \text{ha} \quad x \in (0, \pi). \end{cases}$$
   Helyettesítsünk $x = \frac{\pi}{2}$-t. Milyen összefüggést kapunk?

   iii. $f(x) = x^2$, ha $x \in [-\pi, \pi]$. Helyettesítsünk az eredménybe $x = \pi$-t. Milyen összefüggést kapunk?

2. *alkalmazások*

   (a) Oldjuk meg a következő differenciálegyenleteket hatványsoros módszerrel!

   $$\text{(i)} \quad \begin{cases} y'(t) &= y(t) \\ y(0) &= 1 \end{cases} \qquad \text{(ii)} \quad \begin{cases} y'(t) &= ky(t) \\ y(0) &= a \end{cases} \qquad \text{(iii)} \quad \begin{cases} y''(x) + xy(x) &= 0 \\ y(0) = 0,\ y'(0) &= 1 \end{cases}$$

   (b) Oldjuk meg a következő (úgynevezett hővezetési) egyenletet Fourier-soros módszerrel!

   $$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ x \in (0, \pi) \\ u(0,t) = u(\pi, t) = 0 \\ u(x, 0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx \end{cases}$$

13. gyakorlat

2. ZH