Differenciálegyenletek gyakorlat
Földtudomány szak III/1
Mincsovics Miklós Emil

Kurics Tamás, Simon Péter, Csomós Petra, Havasi Ági, Izsák Feri, Karátson János feladatsorainak felhasználásával készült.

Nem kell minden feladatot megoldani az órán, mert az nem is férne bele. A fennmaradó feladatokat fel lehet használni gyakorló/zh-feladatnak. Ahol többféle megoldási módszer van, ott emeljünk ki egyet és azt használjuk, a többit csak említésszinten tárgyaljuk, egy példával illusztrálva. Az előadáson $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$, helyett $y' = f(x, y(x))$ a terminológia!

Bevezető mese: pillanatnyi sebesség, mozgásegyenlet, radioaktív bomlás, populációdinamika.
Differenciálegyenlet, iránymező, kezdetiérték-feladat, közvetlenül integrálható egyenletek, szeparábilis egyenletek, szeparábilis egyenletre vezető szöveges feladatok.

A sebesség fogalmának szemléltetése az

$$\dot{x}(t) = \lim_{h\to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}$$

képlet alapján, ahol t jelöli az időt, x pedig az elmozdulást. Ennek alapján lehet felírni a legegyszerűbb differenciálegyenleteket. Például a Newton törvény: $m\ddot{x}(t) = F$, vagy a radioaktív bomlást leíró törvény: $\dot{x}(t) = ax(t)$ (ez egyébként a lehűlési törvény is, sőt ez a legegyszerűbb populációdinamikai törvény is, ekkor x a populáció méretét (egyedszám, tömeg) jelöli).

0. Alapvető fogalmak
   - Milyen rendű? $\dot{x}(t) = t^3 + x(t)$; $\dot{x}(t) = (\ddot{x}(t))^3 - 1$; $(\dot{x}(t))^3 = t^2$.
   - Explicit/implicit? $\dot{x}(t) = t^3 + x(t)$; $2x(t)\dot{x}(t) = t((\dot{x}(t))^2 - 1)$.
   - Lineáris/nem lineáris? $\ddot{x}(t) = \dot{x}(t)\sin t - \cos t$; $t\dot{x}(t) = \sin x(t)$; $(\dot{x}(t))^3 = t^2$; $(\ddot{x}(t))^2 - 3x(t)\dot{x}(t) + tx(t) = 0$.
   - Homogén/inhomogén? $\ddot{x}(t) = \dot{x}(t)\sin t - \cos t$; $(\dot{x}(t))^2 x(t) - \sin t = 0$; $(\ddot{x}(t))^3 + (\dot{x}(t))^2 + 3x(t) = 0$; $\dddot{x}(t) + 2(\dot{x}(t))^2 + \dot{x}(t) = e^t$.

1. Keressük meg az $\dot{x}(t) = 2\sin t$ differenciálegyenletnek azt az integrálgörbéjét, amely áthalad az origón!

2. Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenleteket! Rajzoljuk fel az iránymezőt, illetve a megoldásokat, szemléltessük a kezdeti feltételt.
   (a) $\dot{x}(t) = 1$
   (b) $\dot{x}(t) = x(t)$ [A megoldás „ránézésre” látszik. Van-e az exponenciális függvényen kívül más megoldás? Szorozzuk be az egyenletet e^{-t}-vel, ekkor azt kapjuk, hogy $(e^{-t}x(t))' = 0$, vagyis $e^{-t}x(t) = C$.]

1. Definíció. *Legyen $D \subset \mathbb{R}^2$ összefüggő nyílt halmaz (tartomány), $f : D \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Az elsőrendű közönséges differenciálegyenlet (KDE) általános alakja:*

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \tag{1}$$

Az egyenlet megoldásai általánosan nem adhatók meg. Megoldható típusok több helyen össze vannak gyűjtve, pl. Kamke könyvében, Mathematica, ill. Maple programcsomagokban.

3. Bizonyítsuk be, hogy az $\dot{x}(t) = kx(t)$ $\quad(k \in \mathbb{R})$ egyenlet minden megoldása $x(t) = Ce^{kt}$ alakú! [Az előző feladat ötlete működik, de most e^{-kt}-vel szorozzunk.]

4. $(t+1)\dot{x}(t) = tx(t)$ [Szorozzunk be ismét e^{-t}-vel.]

5. $\dot{x}(t) = tx(t)$ [A beszorzásos trükk most is megy, de $-t$ helyett valami más kell az exponenciális függvény kitevőjében.]

   Példák $\dot{x}(t) = f(x(t))$ alakúra:

6. $x^2(t) - \dot{x}(t) + 1 = 0$

7. $\dot{x}(t) = \dfrac{1}{x^2(t)}$

   A továbbiakban néhány egyszerűen megoldható típussal fogunk foglalkozni, elsőként az

$$\dot{x}(t) = g(t)h(x(t)) \qquad \text{(Szeparábilis KDE)}$$

alakú, úgynevezett szeparábilis (szétválasztható) egyenletekkel. A bevezető példák egy része ilyen típusú volt.

Megoldási módszer: Külön oldalra rendezve a csak t-től, illetve x-től függő tényezőket

$$\dot{x}(t) = g(t)h(x(t)) \iff \frac{\dot{x}(t)}{h(x(t))} = g(t) \iff H(x(t)) = G(t) + C,$$

ahol $\dot{G} = g$ és $\dot{H} = 1/h$.

8. $\dot{x}(t) = -\dfrac{t^3}{(1+x^2(t))^2}$

9. $\dot{x}(t) = \dfrac{1}{x(t)\,(9+4t^2)}$

10. Motorcsónak álló vízben 5 m/s sebességgel halad. Kikapcsolják a motort, ezután 40 s-el a sebessége már csak 2 m/s. Mekkora a sebessége a kikapcsolás után 2 s-cel? (Feltesszük, hogy a súrlódási erő arányos a sebességgel.)

11. A vízcsepp a felszínével arányos sebességgel párolog el. Határozzuk meg a gömb alakú vízcsepp sugarát az idő függvényében!

12. Egy tartályban 100 liter 10 kg sót tartalmazó oldat van. A tartályba 5 l/min sebességgel víz ömlik be, amely elkeveredik a benne levő oldattal. A keverék a tartály alján ugyanekkora sebességgel folyik ki. Mennyi só marad a tartályban 1 óra múlva?

HF $\dot{x}(t) = \left(1+x^2(t)\right)\left(1+t^2\right)$

HF $\dot{x}(t) = 2x(t)\operatorname{ctg} t$

HF A 100 ℃ meleg lekvárt kirakjuk hűlni a levegőre, amely 20 ℃-os. A lekvár hőmérséklete 10 órakor 30 ℃, 11 órakor 25 ℃. Mikor raktuk ki a lekvárt hűlni? (Tudjuk, hogy a lehűlés sebessége arányos a test és környezete hőmérsékletének különbségével.)

Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek, megoldóképlet, állandók variálásának módszere.

A szeparábilis egyenletek után egy újabb típusra térünk át, az elsőrendű lineáris KDE-re:

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t), \qquad \text{(Elsőrendű lineáris KDE)}$$

ahol $a,\ b : I \to \mathbb{R}$ adott folytonos függvények az I intervallumon.

Kétféle megoldási módszer:

(a) A korábbi beszorzásos trükk általánosítása. Szorozzuk be az egyenletet $e^{-A(t)}$-vel, ahol $A' = a$. Vezessük le így az általános megoldóképletet!

(b) Ha ismernénk egy megoldást (jelöljük ezt x_0-lal), akkor egy tetszőleges x megoldást $x = x_0 + y$ alakba írva, az y-ra az $\dot{y} = ay$ szétválasztható változójú egyenlet kapjuk. Ennek megoldása $y(t) = Ce^{A(t)}$. Lényeges észrevétel, hogy az x_0 megoldás megadható $x_0(t) = C(t)e^{A(t)}$ alakban, és a C függvényre mindig egy integrálással megoldható differenciálegyenletet kapunk. Vezessük le így is az általános megoldóképletet! (Másképp fogalmazva: először megoldjuk a homogén egyenletet, $y(t) = Ce^{A(t)}$. Majd megkeressünk egy (partikuláris) megoldását az inhomogén egyenletnek $x_0(t) = C(t)e^{A(t)}$ alakban. Ha az egyenlet állandó együtthatós, akkor a partikuláris megoldást kereshetjük próbafüggvény módszerrel is.)

A megoldóképletet nem érdemes „bemagolni”, inkább valamelyik megoldási módszert kell alkalmazni a konkrét példán.

1. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket!

   (a) $t\dot{x}(t) = t + 2x(t)$

   (b) $\dot{x}(t) = \dfrac{x(t)}{t} + t^2 + 3t - 2$

   (c) $\dot{x}(t) = 3t^2 x(t) + t^2$

2. Legyen $x : [0,\infty) \to (0,\infty)$ egy differenciálható függvény, amelyről tudjuk, hogy minden $\tau > 0$ esetén a $(\tau, x(\tau))$ pontba húzott érintő, a $t = \tau$ egyenes és a koordinátatengelyek által meghatározott trapéz területe állandó. $x(t) = ?$

3. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket próbafüggvény módszerrel!

   (a) $\dot{x}(t) - x(t) = t$

   (b) $2\dot{x}(t) - x(t) = \sin 2t$

   (c) $\dot{x}(t) - 2x(t) = 3e^{2t}$ („rezonancia”$\to \cdot t$)

   (d) $\dot{x}(t) - 3x(t) = e^{3t} - t^2 + \sin t$ (itt is)

HF $t\dot{x}(t) - 2x(t) = 2t^4$

HF $\dot{x}(t) = \dfrac{\sin t}{\cos t + 1}\left(e^{x(t)} + 1\right)$

HF A kis hangya egy 10 cm hosszú gumiszalag jobb végpontjából 1 cm/s sebességgel indul el a szalag rögzített bal végpontja felé. A gonosz manó ezzel egyidejűleg a szalag jobb végpontját 100 cm/s sebességgel húzza hátra. Eljut-e valamikor a hangya a szalag másik végére (és ha igen, mikor)?

Homogén egyenletek, Bernoulli-egyenlet, helyettesítéssel szeparábilis, illetve lineáris egyenletre visszavezethető feladatok. Egzakt differenciálegyenletek.

Az f függvényt homogénnek (pontosabban 0-ad fokú homogénnek) nevezik, ha $f(\alpha t, \alpha p) = f(t,p)$ minden $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén (az r-ed fokú homogénre $f(\alpha t, \alpha p) = \alpha^r f(t,p)$). Az

$$\dot{x}(t) = g\left(\frac{x(t)}{t}\right) \qquad \text{(Homogén KDE)}$$

egyenletet homogén (0-ad fokszámú) egyenletnek nevezzük.

Megoldási módszer: Az $y(t) = x(t)/t$ új ismeretlen függvény bevezetésével szétválaszthatóra vezethető vissza.

Az

$$\dot{x}(t) = g(at + bx(t) + c)$$

egyenlet megoldásához az $y(t) = at + bx(t) + c$ helyettesítést érdemes elvégezni.

Az alábbi típust Bernoulli-féle egyenletnek nevezzük:

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t)x^{\alpha}(t) \qquad \text{(Bernoulli-féle KDE)}$$

$a, b : I \to \mathbb{R}$ adott folytonos függvények az I intervallumon, $\alpha \in \mathbb{R}$ adott szám.

Megoldási módszer: Az $y(t) = x^{1-\alpha}(t)$ helyettesítéssel y-ra lineáris egyenletet kapunk.

Végül az úgynevezett egzakt egyenletekkel foglalkozunk:

$$M(t, x(t)) + N(t, x(t))\dot{x}(t) = 0, \quad (\text{ahol } \partial_2 M = \partial_1 N) \qquad \text{(Egzakt KDE)}$$

$M, N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ adott differenciálható függvények.

Megoldási módszer: Határozzuk meg azt az $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenciálható függvényt, melyre $\partial_1 F = M$ és $\partial_2 F = N$. Ekkor a megoldás implicit alakja $F(t, x(t)) = c$, ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans. Konkrét feladatoknál az x megoldást nem mindig lehet explicit alakban megadni. Ha nem egzakt az egyenlet, egy ügyesen választott $\mu(t, x)$ függvénnyel beszorozva esetleg egzakttá tehető. Egy ilyen μ függvényt integráló tényezőnek nevezünk.

1. $\dot{x}(t) = \dfrac{x(t) + t}{t}$
2. $t\dot{x}(t) = \sqrt{t^2 - x^2(t)} + x(t)$
3. $t\dot{x}(t) = \sqrt{x^2(t) - t^2} + x(t)$
4. $\left(t^3 + x^3(t)\right) - 3tx^2(t)\dot{x}(t) = 0$
5. $\dot{x}(t) = \sqrt{x(t) - 2t}$
6. $\dot{x}(t) = 2x(t) + t + 1$
7. $\dot{x}(t) + 2x(t) = x^2(t)e^t$
8. $t + \sin x(t) + \left(x^2(t) + t\cos x(t)\right)\dot{x}(t) = 0$
9. $t + \dfrac{2t}{x^3(t)} + \dfrac{x^2(t) - 3t^2}{x^4(t)} \cdot \dot{x}(t) = 0$

HF $t^2 - x(t) - t\dot{x}(t) = 0$

HF $\dot{x}(t) = \dfrac{2tx(t)}{t^2 + x^2(t)}$

HF $t\dot{x}(t) - 2t^2\sqrt{x(t)} = 4x(t)$

Elsőrendű közönséges differenciálegyenletek, megoldhatóság, egyértelműség

2. Tétel. *Ha az f függvény a második változójában lokálisan Lipschitz tulajdonságú (azaz létezik olyan $L \in \mathbb{R}^+$ hogy $|f(t, p_1) - f(t, p_2)| \leq L\,|p_1 - p_2|$), akkor minden $(t_0, p_0) \in D$ esetén létezik olyan lokális (azaz t_0 egy környezetében értelmezett) megoldása (1)-nek, melyre $x(t_0) = p_0$.*

A fenti feltételek mellett a lokális megoldás létezésén kívül annak egyértelműsége is következik (ez a Picard-Lindelöf tétel, lásd előadáson egy (globális) változatát). (A megoldás létezését már akkor is garantálni tudjuk, ha a jobb oldali f függvényről csak folytonosságot teszünk fel (ez a Peano-féle egzisztencia tétel)).

Néhány feladat a Lipschitz tulajdonsághoz:

1. Lássuk be, hogy ha f-nek létezik a második változó szerinti deriváltja és az korlátos egy környezetben, akkor ott az f függvény a második változójában lokálisan Lipschitz tulajdonságú.
2. Mutassunk olyan f-et, mely Lipschitzes a második változójában, de nem deriválható a második változó szerint.
3. Mutassunk olyan f-et, mely Lipschitzes a második változójában, de nem folytonos.

4. Mutassunk olyan f-et, mely folytonos, de nem Lipschitzes a második változójában.

Oldjuk meg az alábbi egyenleteket és rajzoljuk fel a megoldásokat is! Egyértelmű-e a megoldás?

1. $\dot{x}(t) = \sqrt{|x(t)|}$ [Az $x = 0$ egyenes pontjaiban a megoldás lokálisan nem egyértelmű.]

2. $\dot{x}(t) = x(t) \cdot \ln |x(t)|$ [A jobb oldali függvény mindenhol folytonos és a megoldás lokálisan egyértelmű annak ellenére, hogy a nullában a lokális Lipschitz-folytonosság nem teljesül.]

Eddig tart kb. az 1-4 gyakorlat anyaga.

Másodrendű lineáris egyenletek, magasabbrendű egyenletek

$$\ddot{x}(t) + p(t)\dot{x}(t) + q(t)x(t) = f(t) \tag{2}$$

$p,\ q,\ f : I \to \mathbb{R}$ adott folytonos függvények az I intervallumon. Az egyenletet homogénnek nevezzük, ha $f \equiv 0$, különben inhomogénnek hívjuk.

3. Tétel. *A fenti differenciálegyenlet minden megoldása előáll $x(t) = x_0(t) + c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$ alakban, ahol x_0 az inhomogén egyenlet megoldása, x_1 és x_2 pedig a homogén egyenlet lineárisan független megoldásai, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges számok.*

Az egyenlet megoldásainak előállítása tehát két lépésből áll: egyrészt a homogén egyenlet két lineárisan független megoldásának (alaprendszerének) meghatározása, másrészt az inhomogén egyenlet egy ún. partikuláris megoldásának (ez az $x_0(t)$) megkeresése.

Homogén egyenlet: A megoldások előállítására nincs általános módszer, két speciális esetet tárgyalunk.

(a) Ha az egyenlet állandó együtthatós, azaz $\ddot{x}(t) + p\dot{x}(t) + qx(t) = 0$, ahol $p,\ q \in \mathbb{R}$, akkor a megoldást kereshetjük $x(t) = e^{\lambda t}$ alakban. Ekkor λ-ra a

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \tag{3}$$

egyenletet kapjuk. Ha ennek gyökei valósak és különbözők (λ_1, λ_2), akkor a két lineárisan független megoldás : $x_1(t) = e^{\lambda_1 t}$, $x_2(t) = e^{\lambda_2 t}$. Ha az egyenletnek kétszeres valós gyöke van (λ), akkor a két lineárisan független megoldás : $x_1(t) = e^{\lambda t}$, $x_2(t) = te^{\lambda t}$. Ha a gyökök nem valósak, azaz $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ és $\lambda_2 = \alpha - \beta i$, akkor a két lineárisan független megoldás : $x_1(t) = e^{\alpha t}\cos\beta t$, $x_2(t) = e^{\alpha t}\sin\beta t$.

Hasonlóan lehet eljárni magasabb rendű egyenlet esetében is, akkor természetesen (3) is magasabb fokú lesz.

(b) Ha ismerünk egy $x_1(t)$ megoldást, akkor egy másikat lehet $x_2(t) = x_1(t)z(t)$ alakban keresni, és ekkor $\dot{z}(t)$-re egy elsőrendű egyenletet kapunk. Az $x_1(t)$ megtalálására nincs általános módszer, gyakran érdemes speciális alakban (pl. polinom, vagy hatványsor) keresni.

Inhomogén egyenlet:

(a) Ha a (2) egyenlet állandó együtthatós és az inhomogén tag speciális alakú, akkor viszonylag egyszerűen meg lehet határozni egy $x_0(t)$ partikuláris megoldást:

4. Tétel. *Legyen* (2)*-ben p és q konstans függvény, valamint*

$$f(t) = e^{\alpha t}(P_1(t)\cos\beta t + P_2(t)\sin\beta t)$$

ahol $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ és P_1, P_2 polinomok. Jelölje k az $\alpha + \beta i$ multiplicitását (3)*-ban (k lehet 0 is). Ekkor* (2) *egy partikuláris megoldása előáll*

$$x_0(t) = t^k e^{\alpha t}(Q_1(t)\cos\beta t + Q_2(t)\sin\beta t)$$

alakban, ahol Q_1 és Q_2 polinomok, melyeknek foka legfeljebb P_1 és P_2 fokának maximuma.

(b) A partikuláris megoldás előállítható a homogén egyenlet alaprendszeréből az állandók variálásának módszerével is. Ez a módszer - az előzőtől eltérően - minden esetben működik, de nagyon sok számolást igényel. A (2) inhomogén egyenlet partikuláris megoldását keressük $x_0(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t)$ alakban, ahol $x_1,\ x_2$ a homogén egyenlet két lineárisan független megoldása. Legyen

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t) \end{vmatrix},$$

az ún. Wronski-determináns, ami az alapmegoldások lineáris függetlensége miatt sehol sem nulla. Ekkor a keresett $c_1,\ c_2$ függvények a következő képlettel számolhatók:

$$c_1(t) = \int \frac{\begin{vmatrix} 0 & x_2(t) \\ f(t) & \dot{x}_2(t) \end{vmatrix}}{W(t)}, \qquad c_2(t) = \int \frac{\begin{vmatrix} x_1(t) & 0 \\ \dot{x}_1(t) & f(t) \end{vmatrix}}{W(t)}$$

* Ezek a képletek onnan jönnek, ha a $x_0(t) = c_1(t)x_1(t)+c_2(t)x_2(t)$ alakban keresett partikuláris megoldást a $0 = \dot{c}_1(t)x_1(t) + \dot{c}_2(t)x_2(t)$ mellékfeltétellel helyettesítjük vissza.

1. Oldjuk meg az alábbi másodrendű, állandó együtthatós homogén egyenleteket!

   (a) $\ddot{x}(t) - \dot{x}(t) - 6x(t) = 0$

   (b) $\ddot{x}(t) - 8\dot{x}(t) + 16x(t) = 0$

   (c) $4\ddot{x}(t) + 4\dot{x}(t) + 37x(t) = 0$

   [alaprendszerek: (a): $e^{3t},\ e^{-2t}$; (b): $e^{4t},\ te^{4t}$; (c): $e^{-(1/2)t}\cos 3t,\ e^{-(1/2)t}\sin 3t$.]

2. Oldjuk meg az alábbi másodrendű, állandó együtthatós inhomogén egyenleteket, próbafüggvénnyel vagy az állandók variálásának módszerével.

   (a) $\ddot{x}(t) + 6\dot{x}(t) + 9x(t) = 2e^{-3t}$

   (b) $\ddot{x}(t) - 4\dot{x}(t) + 3x(t) = e^{2t}$

   (c) $\ddot{x}(t) + 5\dot{x}(t) + 4x(t) = 3 - 2t - t^2$

   (d) $\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) - 3x(t) = t^2e^t$

   HF $\ddot{x}(t) + 4x(t) = \cos 2t$

   [megoldások: (c): $C_1e^{-4t} + C_2e^{-t} - t^2/4 + t/8 + 23/32$; (d): $C_1e^t + C_2e^{-3t} + (t^3/12 - t^2/16 + t/32)e^t$; HF: $C_1\cos 2t + C_2\sin 2t + (t/4)\sin 2t$.]

3. Az alábbi másodrendű, függvény együtthatós egyenleteknél sejtsünk meg egy $x_1(t)$ megoldást és keressük meg a másik megoldást $x_2(t) = x_1(t)z(t)$ alakban!

   (a) $\left(t^2 + 1\right)\ddot{x}(t) - 2t\dot{x}(t) + 2x(t) = 0$

   (b) $(2t + 1)\ddot{x}(t) + 4t\dot{x}(t) - 4x(t) = 0$

   HF $t\ddot{x}(t) - (2t + 1)\dot{x}(t) + (t + 1)x(t) = 0$

   [alaprendszerek: (a): $t,\ t^2 - 1$; (b): $t,\ e^{-2t}$; HF: $e^t,\ t^2e^t$.]

4. Oldjuk meg az alábbi magasabbrendű, állandó együtthatós homogén egyenleteket!

   (a) $\dddot{x}(t) - 2\ddot{x}(t) - 3\dot{x}(t) = 0$

   HF $\ddddot{x}(t) - 2\dddot{x}(t) + 2\ddot{x}(t) - 2\dot{x}(t) + x(t) = 0$

   [alaprendszerek: (a): $1,\ e^{3t},\ e^{-t}$; HF: $e^t,\ te^t,\ \cos t,\ \sin t$.]

Lineáris differenciálegyenlet-rendszer

Írjuk át elsőrendű rendszerré a következő magasabbrendű differenciálegyenleteket!

1. $\ddot{x}(t) + 6\dot{x}(t) + 9x(t) = 2e^{-3t}$

2. $\ddddot{x}(t) - 2\dddot{x}(t) + 2\ddot{x}(t) - 2\dot{x}(t) + x(t) = 0$

3. $\dddot{x}(t) - 3\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t)x(t) = 0,\ x(1) = 2, \dot{x}(1) = -1, \ddot{x}(1) = 4.$

Oldjuk meg az alábbi lineáris differenciálegyenlet-rendszereket! (Ismeretlen kiküszöbölésével másodrendűre visszavezetni.)

1. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases}$ $[x_1(t) = C_1 e^t,\ x_2(t) = C_2 e^{-t}]$

2. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases}$ $[x_1(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t,\ x_2(t) = -C_1 \sin t + C_2 \cos t]$

3. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 = -4x_1 + x_2 \end{cases}$ $[x_1(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t},\ x_2(t) = -2C_1 e^{3t} + 2C_2 e^{-t}]$

4. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = 3x_2 - 2x_1 \end{cases}$ $[x_1(t) = e^{2t}(C_1 \cos t + (C_2 - C_1)\sin t),\ x_2(t) = e^{2t}((-2C_1 + C_2)\sin t + C_2 \cos t)]$

5. $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 4x_2 \end{cases}$ $[x_1(t) = e^{3t}(C_1(1-t) + C_2 t),\ x_2(t) = e^{3t}(-C_1 t + C_2(1+t))]$

6. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 \end{cases}$ $[x_1(t) = C_1 e^t,\ x_2(t) = (C_1 t + C_2)e^t]$

HF $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 \end{cases}$ $[x_1(t) = C_1 e^{2t} + C_2,\ x_2(t) = C_1 e^{2t} - C_2]$

HF $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 8x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 \end{cases}$ $[x_1(t) = 2C_1 e^{3t} - 4C_2 e^{-3t},\ x_2(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-3t}]$

7. $\begin{cases} t\dot{x}_1 = -x_1 + tx_2 \\ t^2\dot{x}_2 = -2x_1 + tx_2 \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2t(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = 4tx_1x_2 \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{x_1 - x_2}{x_3 - t} \\ \dot{x}_2 = \frac{x_1 - x_2}{x_3 - t} \\ \dot{x}_3 = x_1 - x_2 + 1 \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dot{x}_1 + 2x_1 + 4x_2 = 1 + 4t \\ \dot{x}_2 + x_1 - x_2 = \frac{3}{2}t^2 \end{cases}$ (állandók variálásával)

11. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 2x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - 5\sin t \end{cases}$ (próbafüggvénnyel)

---

7. gyak anyaga

0. (Sturm-Liouville)
   Adjuk meg mely λ és u-ra teljesül az alábbi sajátérték feladat.

$$\begin{cases} u'' = \lambda u \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Itt volt egy kis stabilitáselmélet, de ezt lecseréltem, mert túl elvontnak bizonyult. Helyette:

Legyen $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a (t_0, x_0) pont egy környezetében értelmezett folytonos függvény. Keressük az

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \qquad x(t_0) = p \tag{4}$$

egyenlet közelítő megoldását. Néhány egyszerű módszert ismertetünk itt.

Hatványsoros módszer. Ha az f függvény a (t_0, p) pont egy környezetében analitikus, akkor keressük a (4) egyenlet - t_0 egy környezetében értelmezett lokális - megoldását hatványsor alakban. Helyettesítsük az egyenletbe a

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - t_0)^n$$

hatványsort. A kezdeti feltételt felhasználva a sor együtthatói egymás után kiszámíthatók.

Euler töröttvonal. Válasszunk egy h lépéstávolságot, majd gyártsuk le a $t_0, t_1, t_2, t_3 \ldots$ időpontok és az $x_0, x_1, x_2, x_3 \ldots$ közelítő értéket sorozatát, ahol $t_k = t_0 + kh$ és $x_k \approx x(t_k)$. A kezdeti feltételből kiindulva t_0, és $x_0 = p$ már adottak és legyen $x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n)$.

1. Oldjuk meg az $\dot{x}(t) = x(t)$ differenciálegyenletet sorfejtéssel az $x(0) = 1$ kezdeti feltétel mellett.

   $[x(t) = e^t]$

2. Számoljuk ki az

$$\left.\begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & t + x(t) \\ x(0) & = & 0 \end{array}\right\}$$

   egyenlet közelítő megoldását hatványsoros módszerrel.

   $[x(t) = e^t - t - 1]$

3. Tekintsük az

$$\left.\begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & \dfrac{2x(t)}{t} \\ x(1) & = & 1 \end{array}\right\}$$

   kezdetiérték-feladatot. Számítsuk ki a megoldás közelítő értékét a $t = 2$ pontban Euler-módszerrel, ha a $h = 1$, $h = 1/2$, illetve a $h = 1/3$ lépéstávolságot választottuk.

   [$h = 1$ esetén $x(2) \approx x_1 = 3$; $h = 1/2$ esetén $x(2) \approx x_2 = 3.\dot{3}$; $h = 1/3$ esetén $x(2) \approx x_3 = 3.5$]

HF Határozzuk meg az $(1 - t^2)\ddot{x}(t) - 4t\dot{x}(t) - 2x(t) = 0$ differenciálegyenlet $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$ kezdeti feltételt, illetve az $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$ kezdeti feltételt kielégítő megoldásait.

[$x(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$, illetve $x(t) = \dfrac{t}{1+t^2}$]

PDE

---

8. gyak anyaga, Izsák Feri feladatsorának felhasználásával készült.

PDE fogalma, rendje. Klasszikus megoldás. Speciális típusú egyenletek: kvázilineáris, lineáris, főrészében lineáris, állandó együtthatós, homogén inhomogén. Mellékfeltételek: kezdetiérték feladat, peremérték feladat, vegyes feladat. Korrekt kitűzésű feladat.

Elemi úton megoldható egyenletek. $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, klasszikus megoldást keresünk.

1. a, $\partial_{12}u = 0$; b, $\partial_{12}u + 2x\partial_2 u = 0$; c, $\partial_1 u = \partial_2 u$; d, $(\partial_1 u)^2 + (\partial_2 u)^2 = 0$.
2. a, $\partial_1 u = f(x, y)$; b, $\partial_{12}u = f(x, y)$; c, $\partial_{12}u - \partial_1 u = f(x, y)$; d, $\partial_{11}u - a^2\partial_{22}u = 0$.
3. a, $\partial_{12}u = f(x, y)$, $u(x, x) = x$, $\partial_1 u(x, x) = 0$; b, $\partial_{11}u = \partial_{22}u$, $u(0, y) = 1$, $\partial_1 u(0, y) = 1$.

4. Keressünk adott speciális típusú megoldásokat!
a, $\partial_{11}u - \partial_2 u = 0, \quad u(x,y) = X(x)Y(y)$; b, $\partial_{11}u + \partial_{22}u = 0, \quad u(x,y) = X(x)Y(y)$.

---

9. gyak anyaga, Karátson János feladatsorának felhasználásával készült.

Parabolikus Cauchy-feladatok

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u &= f(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) &= \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Két részre bontjuk a feladatot:

$$(\mathrm{P1}) \begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u &= 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) &= \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Erre van megoldóképlet:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2} \varphi(x - 2\sqrt{t}\eta) \,\mathrm{d}\eta$$

$$(\mathrm{P2}) \begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u &= f(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) &= 0, \quad x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Ezt az úgynevezett Duhamel-elvvel visszavezetjük egy (P1) alakú segédfeladat(család)ra:
Legyen $\tau \geq 0$ paraméter,

$$\begin{cases} \partial_t v - \partial_x^2 v &= 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ v(x,0,\tau) &= f(x,\tau), \quad x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Ennek $v(x,t,\tau)$ megoldásából $u(x,t)$-t a következőképpen kapjuk meg:

$$u(x,t) = \int_0^t v(x, t-\tau, \tau) \,\mathrm{d}\tau$$

Végül, az eredeti egyenlet megoldását (P1) és (P2) megoldásának összegeként kapjuk.

Megjegyezzük, hogy magasabb dimenzióban csak annyi változik, hogy (P1)-re a megoldóképlet egy kicsit módosul:

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{\sum_{k=1}^{n} -\eta_k^2} \varphi(x_1 - 2\sqrt{t}\eta_1, \ldots x_n - 2\sqrt{t}\eta_n) \,\mathrm{d}\eta$$

A feladatok megoldásánál használjuk fel, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\eta^2} \cos b\eta \,\mathrm{d}\eta = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-b^2/4a} \ ,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\eta^2} \sin b\eta \,\mathrm{d}\eta = 0 \ .$$

Feladatok:

1. $\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u &= 0 \\ u(x,0) &= e^x \end{cases}$ (mo:e^{x+t})

2. $\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u &= 0 \\ u(x,0) &= \sin(x+1) \end{cases}$ (mo:$\sin(x+1)e^{-t}$)

3. $\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u &= \sin(x+t) \\ u(x,0) &= 0 \end{cases}$ (mo:$1/2(\sin(x+t) - \cos(x+t) - e^{-t}(\sin x - \cos x))$)

4. $\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u &= 1 \\ u(x,0) &= 1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u &= 0 \\ u(x,0) &= x \end{cases}$

6. $\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u &= 0 \\ u(x,0) &= \cos x \end{cases}$

7. $\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u &= t \\ u(x,0) &= x \end{cases}$

8. $\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u &= e^{x+t} \\ u(x,0) &= \cos x \end{cases}$

9. $\begin{cases} \partial_t u - \Delta u &= 0, & (x,t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) &= \sin x_1 \sin x_2, & x \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$

---

10. gyak anyaga, Karátson János feladatsorának felhasználásával készült.

A parabolikushoz még:

1. $\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u &= 0, & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) &= \varphi(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$

   feladatban legyen $|\varphi(x)| < K$ valamely K korláttal. Lássuk be, hogy ekkor $|u(x,t)| < K$!

Hiperbolikus Cauchy-feladatok

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u &= f(x,t), & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) &= \varphi(x), & x \in \mathbb{R} \\ \partial_t u(x,0) &= \psi(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Három részre bontjuk a feladatot:

$$\text{(H1)} \begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u &= 0, & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) &= 0, & x \in \mathbb{R} \\ \partial_t u(x,0) &= \psi(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Erre van megoldóképlet (lásd az első parcdiff-es órát is, ahol új változókat vezettünk be....):

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \psi(s) \, \mathrm{d}s$$

$$\text{(H2)} \begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u &= 0, & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) &= \varphi(x), & x \in \mathbb{R} \\ \partial_t u(x,0) &= 0, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Ennek megoldásához bevezetünk egy (H1) alakú segédfeladatot:

$$\begin{cases} \partial_t^2 v - \partial_x^2 v &= 0, & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ v(x,0) &= 0, & x \in \mathbb{R} \\ \partial_t v(x,0) &= \varphi(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Ekkor

$$u = \partial_t v.$$

$$\text{(H3)} \begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u &= f(x,t), & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) &= 0, & x \in \mathbb{R} \\ \partial_t u(x,0) &= 0, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Ezt az úgynevezett Duhamel-elvvel visszavezetjük egy (H1) alakú segédfeladat(család)ra:
Legyen $\tau \geq 0$ paraméter,

$$\begin{cases} \partial_t^2 v - \partial_x^2 v &= 0, & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ v(x,0) &= 0, & x \in \mathbb{R} \\ \partial_t v(x,0,\tau) &= f(x,\tau), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Ennek $v(x,t,\tau)$ megoldásából $u(x,t)$-t a következőképpen kapjuk meg:

$$u(x,t) = \int_0^t v(x, t-\tau, \tau) \, \mathrm{d}\tau$$

Végül, az eredeti egyenlet megoldását (H1)–(H3) megoldásainak összegeként kapjuk.

Feladatok:

1. $\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u &= 0 \\ u(x,0) &= 0 \\ \partial_t u(x,0) &= x \end{cases}$

2. $\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u &= 0 \\ u(x,0) &= x \\ \partial_t u(x,0) &= x \end{cases}$

3. $\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u &= x+t \\ u(x,0) &= x \\ \partial_t u(x,0) &= 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u &= 1 \\ u(x,0) &= 1 \\ \partial_t u(x,0) &= 1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u &= x+t \\ u(x,0) &= e^x \\ \partial_t u(x,0) &= e^x \end{cases}$

---

11. gyak anyaga, Karátson János feladatsorának felhasználásával készült.

Elliptikus peremértékfeladatok

- Elemi megoldási módszerek:

  Jelölje $K_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ az origó középpontú egységkörlapot, ∂K a peremét. Legyen $p(x,y) = \sum_{0 \leq i+j \leq n} a_{ij} x^i y^j$ egy n-ed fokú polinom. Ekkor

  $$\begin{cases} \Delta u &= p(x,y) & (x,y) \in K_1(0) \\ u &= 0 & (x,y) \in \partial K \end{cases}$$

  megoldását érdemes $u(x,y) = (x^2+y^2-1)q(x,y)$ alakban keresni, ahol $q(x,y)$ n-ed fokú polinom. Ekkor behelyettesítés után az együtthatók egyeztetésével kaphatjuk meg a megoldást (a peremfeltételt automatikusan tudja!).

  Ha a peremfeltétel nem homogén:

  $$\begin{cases} \Delta u &= p(x,y) & (x,y) \in K_1(0) \\ u &= \varphi & (x,y) \in \partial K \end{cases}$$

  akkor a megoldást $u = u_0 + v$ alakban keressük, ahol u_0 "tudja" a peremfeltételt és v pedig megoldása az alábbi problémának:

  $$\begin{cases} \Delta v &= p(x,y) - \Delta u_0 & (x,y) \in K_1(0) \\ v &= 0 & (x,y) \in \partial K \end{cases}$$

1. $\begin{cases} \Delta u &= 8x+8y & (x,y)\in K_1(0) \\ u &= 0 & (x,y)\in \partial K \end{cases}$

2. $\begin{cases} \Delta u &= x^2+y^2 & (x,y)\in K_1(0) \\ u &= 0 & (x,y)\in \partial K \end{cases}$

3. $\begin{cases} \Delta u &= 4 & (x,y)\in K_1(0) \\ u &= x^2+y^2 & (x,y)\in \partial K \end{cases}$

- Megoldás sorfejtéssél: (Mese)

  $\begin{cases} -\Delta u &= f & (x,y)\in \Omega\subset\mathbb{R}^2 \\ u &= 0 & (x,y)\in \partial\Omega \end{cases}$

  megoldását a következőképpen állítjuk elő. Ha $-\Delta$ sajátértékei λ_{kl} $(k,l\in\mathbb{N}^+)$ és normált sajátfüggvényei $u_{kl}(x,y)$, melyek teljes ortonormált rendszert alkotnak, akkor először előállítjuk f-et

  $$f=\sum_{k,l=1}^{\infty} c_{kl}u_{kl}$$

  alakban, ahol

  $$c_{kl}=\langle f,u_{kl}\rangle=\int_\Omega f u_{kl}.$$

  Innen (formálisan: bederiválva a szummába és együttható egyeztetéssel) adódik, hogy

  $$u=\sum_{k,l=1}^{\infty}\frac{\lambda_{kl}}{c_{kl}}u_{kl}.$$

  Használjuk fel a következőkben, hogy ha $\Omega=[0,a]\times[0,b]$, akkor

  $$\lambda_{kl}=\pi^2\left(\frac{k^2}{a^2}+\frac{l^2}{b^2}\right),\quad u(x,y)=\frac{2}{\sqrt{ab}}\sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{l\pi}{b}y\right).$$

  Az inhomogén peremfeltétellel hasonlóképpen bánhatunk el mint az előző pontban.

4. $\begin{cases} -\Delta u &= -(x+y) & (x,y)\in \Omega=[0,\pi]^2 \\ u &= 0 & (x,y)\in \partial\Omega \end{cases}$

5. $\begin{cases} -\Delta u &= \sin x\sin y-2\sin 2x\sin 4y & (x,y)\in \Omega=[0,\pi]^2 \\ u &= 0 & (x,y)\in \partial\Omega \end{cases}$

6. $\begin{cases} -\Delta u &= e^{x+y} & (x,y)\in \Omega=[0,\pi]^2 \\ u &= 0 & (x,y)\in \partial\Omega \end{cases}$

7. $\begin{cases} -\Delta u &= xy & (x,y)\in \Omega=[0,1]^2 \\ u &= y & (x,y)\in \partial\Omega \end{cases}$