# Matematika 3 gy

## Földtudomány és Környezettan BSc II/1

Mincsovics Miklós Emil és Havasi Ágnes

Köszönet Csomós Petrának, amiért rendelkezésemre bocsátotta az ezt megelőző verzióját a gyakorlatfeladatsoroknak és Titkos Tamásnak, amiért néhány hibára felhívta a figyelmem.

---

## 1.Gyakorlat: Metrikus tér

---

A, *metrika, MT*

1. Döntsük el, hogy a következő $\rho$ függvények metrikát definiálnak-e $\mathbb{R}$-en! $\dashrightarrow$
   - a, $\rho(x,y) = |x| + |y|$ ;
   - b, $\rho(x,y) = |x - 2y|$ ;
   - c, $\rho(x,y) = |xy|$ ;
   - d, $\rho(x,y) = \sqrt{|x-y|}$ .
2. Lássuk be, hogy MT!
   - a, $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ; $(\mathbb{R}^n, d_k)$, $k = 1, 2, \infty$ ; $\twoheadrightarrow$
   - b, $(C\,[a,b]\,, d_\infty)$ ; $(C\,[a,b]\,, d_\int)$, ahol $d_\int(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\ \mathrm{d}x)$, $(a < b)$ ; $\twoheadrightarrow$
   - c, $\mathbb{R}$ ellátva a diszkrét metrikával.

B, *környezet (gömb)*

1. Ábrázoljuk $(\mathbb{R}^2, d_k)$, $k = 1, 2, \infty$ MT-ekben a 0 középpontú 1 sugarú gömböket, vagyis $K_1(0)$-t.
2. Szemléltessük ábrával, hogy milyen függvények tartoznak bele az azonosan 0, illetve az $f(x) = x$ függvények 1 sugarú környezetébe – tehát $K_1(0)$, illetve $K_1(x)$ szemléltetése – a $(C\,[a,b]\,, d_\infty)$, illetve a $(C\,[a,b]\,, d_\int)$ MT-ben.
3. Adjunk példát olyan MT-re és környezetekre, amelyekre $\dashrightarrow$
   - a, $K_r(x) = K_R(x)$ és $R > r$ ;
   - b, $K_r(x) \supsetneq K_R(y)$ és $R > r$ !

C, *topológiai alapfogalmak*

1. Döntsük el, hogy a $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ MT-ben a következő halmazok zártak/nyíltak-e, illetve adjuk meg a torlódási, belső, külső és határ pontjaik halmazát. $\circlearrowright \rightarrow$
   - a, $\mathbb{R}$ ; $\emptyset$ ;
   - b, $\{1, 2, \ldots, n\}$ ; $\mathbb{N}$ ; $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^+\}$ ;
   - c, $[a,b]$ ; $[a,b)$ ; $(a,b)$ ; $[a,\infty)$ .
2. Adjuk meg, az alábbi halmaz belső, külső, illetve határpontjait és ezek alapján döntsük el, hogy a halmaz nyílt vagy zárt-e! $H_M = \{f \in C[a,b] : d(f,0) \le M\}$ a $(C[a,b], d_\infty)$ MT-ben.

D, Az összes eddigi fogalmat vizsgáljuk meg diszkrét metrikus térben!

---

**Megoldások** $\twoheadrightarrow$

A/2/a, $d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$.

- $d_1(x,y) \geq 0 \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^n$, mivel $|x_i - y_i| \geq 0 \quad \forall i \in \{1,2,\ldots,n\}$.
  Továbbá $d_1(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, ugyanis nemnegatív számok összege csak úgy lehet nulla, ha mindegyik összeadandó nulla, azaz $x_i - y_i = 0 \quad \forall i \in \{1,2,\ldots,n\}$, vagyis $x = y$.
- $d_1(x,y) = d_1(y,x)$, mivel $|x_i - y_i| = |y_i - x_i| \quad \forall i \in \{1,2,\ldots,n\}$.
- $d_1(x,y) \leq d_1(x,z) + d_1(z,y) \quad \forall x,y,z \in \mathbb{R}^n$, mivel
  $\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i + z_i - y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} (|x_i - z_i| + |z_i - y_i|) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i| + \sum_{i=1}^{n} |z_i - y_i|$.
  A második lépésben az összeg minden tagjára külön alkalmaztuk az $(\mathbb{R}, |\cdot|)$-beli háromszög-egyenlőtlenséget (felhasználva, hogy $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ MT).

A $d_2$ metrika esetén itt csak a harmadik tulajdonságot (háromszög-egyenlőtlenség) mutatjuk meg.

**Állítás 1** *$\forall x,y,z \in \mathbb{R}^n$ esetén*

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (z_i - y_i)^2}\,.$$

Bizonyítás: Legyen $x_i - z_i =: a_i$ és $z_i - y_i =: b_i$. Ekkor $x_i - y_i = a_i + b_i$, és a belátandó egyenlőtlenség:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}\,.$$

Elég tehát megmutatni, hogy az utóbbi egyenlőtlenség igaz $\forall a_i, b_i,\ i = 1,\ldots,n$ számok esetén. Emeljünk négyzetre (mindkét oldal nemnegatív):

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + 2\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)}\,.$$

A bal oldalon elvégezve a négyzetre emelést, egyszerűsítés és 2-vel való osztás után:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\,\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}\,.$$

Ez pedig éppen a jól ismert CBS-egyenlőtlenség (amiről tudjuk, hogy teljesül $\forall a_i, b_i,\ i = 1,\ldots,n$ esetén).

A/2/b, Megmutatjuk, hogy $(C\,[a,b]\,, d_\int)$ MT.

- $d_\int(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, \mathrm{d}x \geq 0\ \forall f,g \in C[a,b]$, mert nemnegatív függvény integrálja nemnegatív. Továbbá $d_\int(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, \mathrm{d}x = 0 \Rightarrow f = g$. Tegyük fel ugyanis indirekte, hogy $f \neq g$. Ekkor $\exists x_0 \in [a,b]$, amelyben $f(x_0) \neq g(x_0)$. Ezen $x_0$ pontban $|f(x_0) - g(x_0)| > 0$, és mivel $f$ és $g$ folytonos, és így az $|f - g|$ függvény is az, tehát az $|f - g|$ függvény az $x_0$ valamely $K_r(x_0)$ környezetében is pozitív $\Rightarrow \int_a^b |f(x) - g(x)|\, \mathrm{d}x > 0$, ami ellentmondás.
- $d_\int(f,g) = d_\int(g,f)\ \forall f,g \in C[a,b]$, ugyanis $|f(x) - g(x)| = |g(x) - f(x)|\ \forall x \in [a,b]$.
- $d_\int(f,g) \leq d_\int(f,h) + d_\int(h,g)\ \forall f,g,h \in C[a,b]$, az $(\mathbb{R}, |\cdot|)$-beli háromszög-egyenlőtlenséget felhasználva $|f(x_0) - g(x_0)| = |f(x_0) - h(x_0) + h(x_0) - g(x_0)| \leq |f(x_0) - h(x_0)| + |h(x_0) - g(x_0)|$ teljesül $\forall x_0 \in [a,b]$, amiből következik, hogy $|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|$. Kiintegrálva az egyenlőtlenséget és felhasználva az integrál monotonitását és additivitását, kapjuk, hogy $\int_a^b |f(x) - g(x)|\, \mathrm{d}x \leq \int_a^b (|f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|)\, \mathrm{d}x = \int_a^b |f(x) - h(x)|\, \mathrm{d}x + \int_a^b |h(x) - g(x)|\, \mathrm{d}x\,.$

**Eredmények** $\rightarrow$

C/1/a, $\mathbb{R}$ zárt és nyílt, $\mathbb{R}' = \operatorname{int}\mathbb{R} = \mathbb{R}, \partial\mathbb{R} = \operatorname{ext}\mathbb{R} = \emptyset$;

$\emptyset$ zárt és nyílt, $\emptyset' = \operatorname{int}\emptyset = \partial\emptyset = \emptyset$, $\operatorname{ext}\emptyset = \mathbb{R}$.

C/1/b, A $H = \{1, 2, \ldots, n\}$ halmazra $H' = \emptyset,\ \operatorname{int} H = \emptyset,\ \operatorname{ext} H = \mathbb{R} \setminus H,\ \partial H = H$. $H' \subset H \Rightarrow H$ zárt;

$\mathbb{N}' = \emptyset,\ \operatorname{int}\mathbb{N} = \emptyset,\ \operatorname{ext}\mathbb{N} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{N},\ \partial\mathbb{N} = \mathbb{N}$. $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{N}$ zárt;

A $G = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^+\}$ halmazra $G' = \{0\},\ \operatorname{int} G = \emptyset,\ \operatorname{ext} G = \mathbb{R} \setminus (H \cup \{0\}),\ \partial H = H \cup \{0\}$. $G$ nem nyílt és nem zárt.

C/1/c, $[a, b]' = [a, b],\ \operatorname{int}[a, b] = (a, b),\ \operatorname{ext}[a, b] = \mathbb{R} \setminus [a, b],\ \partial[a, b] = \{a, b\}$, zárt;

$[a, b)' = [a, b],\ \operatorname{int}[a, b) = (a, b),\ \operatorname{ext}[a, b) = \mathbb{R} \setminus [a, b],\ \partial[a, b) = \{a, b\}$, nem zárt, nem nyílt;

$(a, b)' = [a, b],\ \operatorname{int}(a, b) = (a, b),\ \operatorname{ext}(a, b) = \mathbb{R} \setminus [a, b],\ \partial(a, b) = \{a, b\}$, nyílt;

$[a, +\infty)' = [a, +\infty),\ \operatorname{int}[a, +\infty) = (a, +\infty),\ \operatorname{ext}[a, +\infty) = (-\infty, a),\ \partial[a, +\infty) = \{a\}$, zárt.

**Útmutatások** $\dashrightarrow$

A/1 a–c, nem, mert sérül az első metrikatulajdonság; d, igen.

B/3/a, Diszkrétben;

B/3/b, $(\{3 \text{ jól megválasztott pont a síkban}\}, d_2)$.

2.Gyakorlat: MT

A, *konvergencia, Cauchy-sorozat, teljes MT*

1. Vizsgáljuk meg a következő (függvény)sorozatokat Cauchy-ság illetve konvergencia szempontjából!

   a, $(\frac{sinx}{n})$ a $(C[0,\pi], d_\int)$, illetve a $(C[0,\pi], d_\infty)$ MT-ben; $\twoheadrightarrow$

   b,
   $$f_n(x) = \begin{cases} 0, \text{ ha } \ x \in (-\infty, n-1] \cup [n+1, \infty) \\ x-(n-1), \text{ ha } x \in (n-1, n] \\ n+1-x, \text{ ha } x \in (n, n+1) \end{cases}$$
   a $(C_b(\mathbb{R}), d_\infty)$ MT-ben;

   c, $(x^n)$ a $(C[0,1], d_\int)$ illetve a $(C[0,1], d_\infty)$ MT-ben. $\twoheadrightarrow$ $\dashrightarrow$

2. TMT-e?

   a, $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ . $\circlearrowleft$

   b, $(\mathbb{R}\backslash\{0\}, |\cdot|)$ ; $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ ; $([a,b], |\cdot|)$ ; $([a,b), |\cdot|)$ ; $([a,\infty), |\cdot|)$ . $\twoheadrightarrow$ $\dashrightarrow$

   c, $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{arctg}})$, ahol $d_{\mathrm{arctg}}(x,y) = |\mathrm{arctg}\, x - \mathrm{arctg}\, y|$ . $\dashrightarrow$

   d, $\mathbb{R}$ ellátva a diszkrét metrikával.

   e, $(C[a,b], d_\infty)$ (Ezt csak kimondani!); $(C[a,b], d_\int)$ . $\twoheadrightarrow$

B, *Banach-féle fixpont tétel*

1. Ellenpéldákkal igazoljuk, hogy a fixponttétel feltételei – a teljesség és a $q < 1$ feltétel – lényegesek! $\dashrightarrow$
2. Az $f : [1,\infty) \to [1,\infty)$, $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$ függvény kontrakció-e, és (ha igen, akkor) mi a fixpontja? Határozzuk meg a fixpont értékét $10^{-3}$-os pontossággal! $\twoheadrightarrow$
3. Lássuk be, hogy ha $f : [a,b] \to [a,b]$, $f \in C^1\,[a,b]$, $|f'| < 1$, akkor $f$ kontrakció! $\twoheadrightarrow$
4. Lássuk be, hogy az adott $f$ függvény kontrakció a megadott intervallumon. Szeretnénk meghatározni az $f(x) = x$ egyenlet megoldását. Adjunk meg egy iterációs lépésszámot, amivel már garantálni tudjuk, hogy az iterációt az adott $x_0$ pontból indítva, a közelítés hibája $10^{-3}$-nál már kisebb.

   a, $f(x) = 0.9\cos x$ , $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ és $x_0 = 0$ ;

   b, $f(x) = \sqrt{x+2}$ , $x \in [0,2]$ és $x_0 = 0$ .

**Megoldások** $\twoheadrightarrow$

A/1/a,
- A $d_\int$ metrikában: a $(\frac{\sin x}{n})$függvénysorozat tart az azonosan nulla függvényhez, mivel

$$d_\int\left(\frac{\sin x}{n},0\right)=\int_0^\pi\left|\frac{\sin x}{n}-0\right|\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int_0^\pi\sin x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{n}\to 0\,.$$

Tehát a függvénysorozat konvergens, és így Cauchy-sorozat is.

- A $d_\infty$ metrikában: a $(\frac{\sin x}{n})$ függvénysorozat tart az azonosan nulla függvényhez, mivel

$$d_\infty\left(\frac{\sin x}{n},0\right)=\sup_{[0,\pi]}\left|\frac{\sin x}{n}-0\right|\,\mathrm{d}x=\frac{\sin(\pi/2)}{n}=\frac{1}{n}\to 0\,.$$

Tehát a függvénysorozat konvergens, és így Cauchy-sorozat is. (Megjegyezzük, hogy ha egy sorozat konvergens a $(C[0,\pi],d_\infty))$ MT-ben, akkor konvergens a $(C[0,\pi],d_\int)$ MT-ben is.)

A/1/c, A $d_\int$ metrikában: az $(x^n)$ függvénysorozat tart az azonosan nulla függvényhez, mivel

$$d_\int(x^n,0)=\int_0^1|x^n-0|\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{n+1}\to 0\,.$$

Tehát a függvénysorozat konvergens, és így Cauchy-sorozat is.

A/2/b, $([a,b],|\cdot|)$: TMT. A bizonyítás indirekt: tegyük fel, hogy nem TMT, azaz $\exists(x_n)\subset[a,b]$ Cauchy-sorozat, amely nem konvergens. Viszont vegyük észre, hogy $(x_n)$ Cauchy-sorozat a $(\mathbb{R},|\cdot|)$ MT-ben is. Ez a tér teljes, így $\exists A\in\mathbb{R}=\lim(x_n)$. Tehát $A\notin[a,b]$, vagyis $A$ külső pontja az $[a,b]$ halmaznak, így létezik olyan $K_r(A)$ környezet, amelyre $K_r(A)\cap[a,b]=\emptyset$. A határérték definícióját használva: az előbbi $r$-hez $\exists N\in\mathbb{N}$: $\forall n\geq N$-re $x_n\in K_r(A)$, vagyis bizonyos indextől kezdve a sorozat minden eleme $K_r(A)$-beli, és így nem $[a,b]$-beli. Ez ellentmondás.

A/2/e, Belátjuk, hogy $(C[a,b],d_\int)$ nem TMT. Ehhez tekintsük az alábbi függvénysorozatot:

$$f_n(x)=\begin{cases}0,\text{ ha }\ x\in[0,1]\\ nx-n,\text{ ha } x\in(1,1+\frac{1}{n})\\ 1,\text{ ha } x\in[1+\frac{1}{n},2]\end{cases}$$

Ez Cauchy-sorozat, mivel $n,m\in\mathbb{N},n<m$ (ezt az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük) esetén

$$d_\int(f_n,f_m)=\int_0^2(f_n(x)-f_m(x))\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2n}-\frac{1}{2m}\leq\frac{1}{2n}\to 0\,.$$

Megmutatjuk, hogy ez a Cauchy-sorozat nem konvergens $(C[0,2],d_\int)$-ben. A bizonyítás indirekt: tegyük fel, hogy konvergens, azaz tart valamely $f\in C[0,2]$ függvényhez. Ez a függvény a $[0,1]$-en mindenhol nullát kell felvegyen, ugyanis felhasználva a háromszög-egyenlőtlenséget fennáll, hogy

$$d_\int(f,0)\leq d_\int(f,f_n)+d_\int(f_n,0)\,.$$

Itt a jobb oldal mindkét tagja nullához tart, tehát a bal oldal csak nulla lehet. Végül felhasználva $f$ folytonosságát, adódik a részállítás. Hasonlóan: a határfüggvénynek az $(1,2]$-n mindenhol 1-et kell felvennie, mert

$$d_\int(f,1)\leq d_\int(f,f_n)+d_\int(f_n,1)\,,$$

ahol a jobb oldal mindkét tagja nullához tart, tehát a bal oldal 0. Végül felhasználva $f$ folytonosságát, adódik ez a részállítás is. Így $f$ nem lehet folytonos, ami ellentmondás.

B/2 Két megoldást adunk.

I.mo. Belátjuk, hogy $f$ kontrakció.

$$|f(x)-f(y)| = \frac{1}{2}\left|x+\frac{x}{2}-y-\frac{y}{2}\right| = \frac{1}{2}|x-y|\left|1-\frac{2}{xy}\right| \le \frac{1}{2}|x-y|\ ,$$

ahol felhasználtuk, hogy $\left|1-\frac{2}{xy}\right| \le 1$ teljesül az $[1,\infty)$ intervallumon. Tehát $q=\frac{1}{2}$ szereposztással teljesül a kívánt kontrakciós egyenlőtlenség. Ha a fixponttétel szerinti iterációhoz az $x_0 := 1$ kezdőpontot választjuk, akkor $x_1 = f(1) = \frac{3}{2}$. Az elégséges lépésszám kiszámítása:

$$\frac{q^n}{1-q}\,d(x_0,x_1) = \frac{1}{2^n} \le 10^{-3} \ \Rightarrow\ n \ge 10\,.$$

II.mo. (Felhasználva a B/3 feladatot.) Az $f'(x) = \frac{1}{2}-\frac{1}{x^2}$ deriváltfüggvény zérushelye $x=\sqrt{2}$, $f'$ az $[1,\sqrt{2})$ intervallumon $<0$, és monoton nő $\frac{1}{2}$-től 0-ig, a $(\sqrt{2},+\infty)$ intervallumon $>0$, és szigorúan monoton nő, határértéke a $+\infty$-ben $\frac{1}{2}$. $\Rightarrow |f'| \le \frac{1}{2} =: q$. Innen lásd az első megoldást.

B/3 $f \in C^1[a,b] \Rightarrow$ a Lagrange-középértéktétel szerint $\forall x,y \in [a,b]$ esetén $\exists \xi \in (x,y) : f(x)-f(y) = f'(\xi)\cdot(x-y) \Rightarrow |f(x)-f(y)| = |f'(\xi)|\cdot|x-y| \le \sup_{[a,b]}|f'|\cdot|x-y|$.
Mivel $f'$ folytonos az $[a,b]$-n, ezért $|f'|$ is az, amiből $\sup_{[a,b]}|f'| = \max_{[a,b]}|f'|$ következik. Ez a maximum csak 1-nél kisebb lehet, mivel $|f'|<1$. Így $f$ kontrakció $q=\max_{[a,b]}|f'|$ mellett.

**Útmutatások** $\dashrightarrow$

A/1/c, $d_\infty(x^n, x^{2n}) = \frac{1}{4}$.

A/2/b, $([a,b), |\cdot|)$: Nem TMT. Konstruálható ugyanis olyan $[a,b)$-beli Cauchy-sorozat, amely $b$-hez tart, pl. az $x_n = \frac{a+nb}{n+1}$ sorozat.

A/2/c, Vizsgáljuk a következő sorozatot: $(x_n) = (n)$.

B/1 $(\mathbb{R}\setminus\{0\}, |\cdot|)$, $\frac{x}{2}$ és $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $x+1$.

## 3.Gyakorlat: Vektortér, Lineáris leképezések

A Vektorszámítás című tárgy (Havasi Ági) párhuzamosan fut a Mat3 kurzussal és ott is tanulnak VT-ről és lineáris leképezésekről!

A, *VT alapfogalmai* ⟳

1. Lássuk be, hogy $\mathbb{R}^n$; $\mathbb{R}[x]$; $C[a,b]$ ($\mathbb{R}$ felett) VT! Hány dimenziós $\mathbb{R}^n$ ? (Adjunk meg egy bázist.)
2. Lineárisan függetlenek-e az alábbi függvények a $C[0,\pi]$ VT-ben?
   - a, $f_1(x) = \sin x,\ f_2(x) = \cos x$
   - b, $f_1(x) = \sin^2 x,\ f_2(x) = \cos^2 x,\ f_3(x) = 1$
   - c, $f_1(x) = e^x,\ f_2(x) = e^{2x}$ ↠
   - d, $f_1(x) = 1,\ f_2(x) = x$
   - e, $f_1(x) = 1,\ f_2(x) = x,\ \ldots,\ f_n(x) = x^{n-1}$
   - f, $f_1(x) = 3\sin(\frac{\pi}{2} + x),\ f_2(x) = \cos x$
3. Alteret alkotnak-e $\mathbb{K}[x]$-ben a ↠
   - a, tizedfokú polinomok,
   - b, legalább tizedfokú polinomok,
   - c, legfeljebb tizedfokú polinomok?

   Ha igen, határozzuk meg, hogy hány dimenziós az altér (egy bázis megadásával).

B, *VT: lineáris leképezések*

1. Tekintsük az alábbi $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ operátorokat (leképezéseket): ⟳ ↠

   i, identitás  ii, tükrözés az origóra  iii, tükrözés az $x = 0$ egyenesre
   iv, tükrözés az $x = 1$ egyenesre  v, origó körüli forgatás $\alpha$ szöggel
   vi, $x$-tengelyre vetítés  vii, origóból kétszeres nagyítás
   viii, eltolás az $(1,0)$ vektorral  ix, $(x,y) \mapsto (x+y, y)$

   - a, Melyek lineárisak? Ha lineáris, mi a mátrixa a szokásos bázisban?
   - b, Mik a sajátértékeik és sajátvektoraik?
2. Vizsgáljuk meg a következő $X \to Y$ operátorokat, ahol $X, Y$ VT-ek, hogy lineárisak-e?
   - a, $X = C^1[0,2\pi]$, $Y = C[0,2\pi]$, $Df = f'$ ; ↠
   - b, $X = C[a,b]$, $Y = \mathbb{R}$, $Rf = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ ;

**Megoldások** $\twoheadrightarrow$

A/2/c, Az $f_1(x) = e^x$ és $f_2(x) = e^{2x}$ függvények lineárisan függetlenek. Ehhez meg kell mutatnunk, hogy az $\alpha\, e^x + \beta\, e^{2x} = 0$ egyenlőség minden $x \in [0, \pi]$ pontban csak akkor áll fenn, ha $\alpha = \beta = 0$.
1. Az $x = 0$ pontban csak akkor áll fenn, ha $\alpha\, e^0 + \beta\, e^0 = 0$, azaz $\alpha + \beta = 0$.
2. Az $x = 1$ pontban csak akkor áll fenn, ha $\alpha\, e + \beta\, e^2 = 0$.
$\Rightarrow$ már a fenti két pontban egyszerre is csak úgy állhat fenn az egyenlőtlenség, ha $\alpha$ és $\beta$ megoldása az $\alpha + \beta = 0\,;\ \alpha\, e + \beta\, e^2 = 0$ egyenletrendszernek. Ennek a rendszernek pedig egyetlen megoldása: $\alpha = 0$, $\beta = 0$.

A/3/ab, Nem, $x^{10} - x^{10} = 0$, ami nem tizedfokú.

A/3/c, Igen, mert zárt a műveletekre. 11 dimenziós, mert $\left\{1, x, x^2, \ldots, x^{10}\right\}$ egy bázis benne.

B/1/a, iii, Az $x = 0$ egyenesre való tükrözés az $f(x, y) = (-x, y)$ leképezést jelenti. Ez lineáris, mivel

1. $f((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (-(x_1 + x_2), y_1 + y_2) = (-x_1, y_1) + (-x_2, y_2) = f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2)$ teljesül $\forall\ (x_1, y_1),\ (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ esetén, illetve
2. $f(\lambda(x, y)) = f(\lambda x, \lambda y) = (-\lambda x, \lambda y) = \lambda(-x, y) = \lambda f(x, y)$ teljesül $\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén.

Mátrixa: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

iv, Nem lineáris, mivel a $(0, 0)$ vektort nem a $(0, 0)$-ba, hanem a $(2, 0)$-ba viszi át.

vi, Az $x$ tengelyre való vetítés az $f(x, y) = (x, 0)$ leképezést jelenti. Ez lineáris, mivel

1. $f((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_1 + x_2, 0) = (x_1, 0) + (x_2, 0) = f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2)$ teljesül $\forall\ (x_1, y_1),\ (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ esetén, illetve
2. $f(\lambda(x, y)) = f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x, 0) = \lambda(x, 0) = \lambda f(x, y)$ teljesül $\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén.

Mátrixa: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

viii, Az $(1, 0)$ vektorral való eltolás az $f(x, y) = (x, y) + (1, 0) = (x + 1, y)$ leképezés. Ez nem lineáris, mivel $f((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = (x_1 + x_2 + 1, y_1 + y_2) \neq f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2) = (x_1 + 1, y_1) + (x_2 + 1, y_2) = (x_1 + x_2 + 2, y_1 + y_2)$. Másképp: $f((0, 0)) = (1, 0) \neq (0, 0)$.

## 4.Gyakorlat: Normált tér

A, *norma, NT*

1. Tekintsük $\mathbb{R}^2$-et, mint $\mathbb{R}$ feletti vektorteret. Normát definiálnak-e a következő hozzárendelések?

   a, $(x_1, x_2) \mapsto \frac{1}{2}|x_1| + 2|x_2|$;
   
   b, $(x_1, x_2) \mapsto |x_2|$.

2. Mutassuk meg, hogy NT!

   a, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_k)$, $k = 1, 2, \infty$;
   
   b, $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$; $(C[a,b], \|\cdot\|_\int)$, ahol $\|f\|_\int = \int_a^b |f(x)|\ \mathrm{d}x$, $(a < b)$.

B, *norma, ekvivalens normák*

1. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges NT minden $x, y$ elemére teljesül, hogy $\|x - y\| \geq |\|x\| - \|y\||$!

2. Bizonyítsuk be, hogy minden $x \in \mathbb{R}^n$-re teljesül, hogy

   a, $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$;
   
   b, $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$;
   
   c, $\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2$!

3. Lássuk be, hogy a $C[a,b]$ VT-en $\|\cdot\|_\infty$ és $\|\cdot\|_\int$ nem ekvivalens normák!

C, *konvergencia, véges dimenzió, Banach-tér*

1. Konvergensek-e a $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ NT-ben a következő sorozatok?

   a, $((\frac{2}{n}, \frac{3}{n}))$;
   
   b, $((\frac{1}{n}, n))$;
   
   c, $((\frac{\sin n}{n}, \frac{n^2-1}{n^2+1}))$.

2. BT-e?

   a, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_k)$, $k = 1, 2, \infty$;
   
   b, $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$;
   
   c, $(C[a,b], \|\cdot\|_\int)$.

**Megoldások** $\twoheadrightarrow$

A/2/a, A $k=\infty$ eset:

- $\max_{i\in\{1,\ldots,n\}} |x_i| \geq 0\ \forall x\in\mathbb{R}^n$, és $=0 \Leftrightarrow x_i=0\ \forall i\in\{1,2,\ldots,n\}$.
- $\max_{i\in\{1,\ldots,n\}} |\lambda\, x_i| = \max_{i\in\{1,\ldots,n\}}(|\lambda|\,|x_i|) = |\lambda|\, \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} |x_i|\ \forall x\in\mathbb{R}^n,\ \forall\lambda\in\mathbb{R}$.
- $\max_{i\in\{1,\ldots,n\}} |(x+y)_i| = \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} |x_i+y_i| \leq \max_{i\in\{1,\ldots,n\}}(|x_i|+|y_i|) \leq \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} |x_i| + \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} |y_i|\ \forall x,y\in\mathbb{R}^n$, ahol a második lépésben felhasználtuk az $(\mathbb{R},|\cdot|)$ NT-beli háromszög-egyenlőtlenséget.

A/2/b, $(C[a,b]), \|\cdot\|_\infty)$-re mutatjuk meg.

- $\max_{[a,b]} |f| \geq 0\ \forall f\in C[a,b]$ és $=0 \Leftrightarrow f=0$. (Ha $f$ nem lenne minden pontban nulla, akkor $|f|$ maximuma pozitív lenne.)
- $\max_{[a,b]} |\lambda\, f| = \max_{[a,b]}(|\lambda|\,|f|) = |\lambda|\, \max_{[a,b]} |f| \quad \forall f\in C[a,b], \forall\lambda\in\mathbb{R}$.
- $\max_{[a,b]} |f+g| \leq \max_{[a,b]}(|f|+|g|) \leq \max_{[a,b]} |f| + \max_{[a,b]} |g| \quad \forall f,g\in C[a,b]$. Az első lépésben azt használtuk ki, hogy ha minden $x\in[a,b]$ helyen igaz $|f(x)+g(x)|\leq|f(x)|+|g(x)|$ ( ami persze igaz, $(\mathbb{R},|\cdot|)$ NT-beli háromszög-egyenlőtlenség), akkor a maximumukra is igaz az egyenlőtlenség.

B/2/a, $\max_{i\in\{1,\ldots,n\}} |x_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \leq n\cdot \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} |x_i|$, hiszen egyetlen koordináta abszolút értéke nem lehet nagyobb, mint az összes koordináta abszolút értékének az összege, és az utóbbi nem lehet nagyobb, mint a legnagyobb tag szorozva a tagok számával.

C/1/a, Három megoldást mutatunk.

- Tart a $(0,0)$-hoz, ugyanis $\left\|(\frac{2}{n},\frac{3}{n})-(0,0)\right\|_2 = \left\|(\frac{2}{n},\frac{3}{n})\right\|_2 = \sqrt{\left(\frac{2}{n}\right)^2+\left(\frac{3}{n}\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{n} \to 0$.
- Mivel $\mathbb{R}^2$ véges dimenziós, így rajta minden norma ekvivalens. A konvergenciát vizsgálhatjuk tetszőleges (az eredetivel ekvivalens) norma szerint. Válasszuk a $\|\cdot\|_\infty$ normát! Ekkor $\left\|(\frac{2}{n},\frac{3}{n})-(0,0)\right\|_\infty = \sup\left\{\frac{2}{n},\frac{3}{n}\right\} = \frac{3}{n} \to 0$.
- A véges dimenziót kihasználva, elegendő a koordináta-sorozatok konvergenciáját vizsgálni. Tehát konvergens, mivel koordinátánként konvergens: $(\frac{2}{n})\to 0$, $(\frac{3}{n})\to 0 \Rightarrow ((\frac{2}{n},\frac{3}{n}))\to(0,0)$.

C/1/b, Nem konvergens, mert a második koordinátasorozata nem az: $(n)\to+\infty$.

C/1/c, Konvergens, mivel koordinátánként konvergens: $(\frac{\sin n}{n})\to 0$ ($(\sin n)$ korlátos, $(\frac{1}{n})\to 0$), $(\frac{n^2-1}{n^2+1})\to 1$ (osszuk a számlálót és a nevezőt is $n^2$-tel) $\Rightarrow ((\frac{\sin n}{n},\frac{n^2-1}{n^2+1}))\to(0,1)$

**Útmutatások** $\dashrightarrow$

A/1/a, Igen.

A/1/b, Nem, mert sérül az első normatulajdonság.

B/1 Tudjuk, hogy $\|a+b\|\geq\|a\|+\|b\|$. Először $a:=x-y$, $b:=y$, majd $a:=y-x$, $b:=x$.

## 5.Gyakorlat: NT: Folytonos lineáris leképezések

A, *linearitás, folytonosság, korlátosság*

1. Lássuk el $\mathbb{R}^2$-t a $\|\cdot\|_\infty$ normával. A 3.Gy/B/1 feladat operátorai közül melyek korlátosak illetve melyek folytonosak?
2. Vizsgáljuk meg a következő $X \to Y$ operátorokat, ahol $X, Y$ NT-ek, hogy lineárisak, korlátosak illetve folytonosak-e?

   a, $X, Y$ tetszőleges NT, $b \in Y$ , $Ax = b$ ; $\twoheadrightarrow$

   b, $X = Y = (\mathbb{R}, |\cdot|), Ix = x$ ; $\twoheadrightarrow$

   c, $X = Y = (C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$, $Af = af$, ahol $a \in C[a,b]$ rögzített;

   d, $X = (C^1[0,2\pi], \|\cdot\|_\infty)$, $Y = (C[0,2\pi], \|\cdot\|_\infty)$, $Df = f'$ ; $\twoheadrightarrow$

   e, $X = (C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$, $Y = (\mathbb{R}, |\cdot|)$, $Rf = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ;

   f, $X = (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$, $Y = (\mathbb{R}, |\cdot|)$, $Sf = sup_{x\in[0,1]} f(x)$ ; $\twoheadrightarrow$

   g, $X = (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$, $Y = (\mathbb{R}, |\cdot|)$, $Nf = f(0)$ . $\twoheadrightarrow$

B, *operátornorma*

1. Amelyik az A/ rész példái közül folytonos lineáris, ott határozzuk meg a leképezés normáját. $\twoheadrightarrow$

C, *mátrixnorma*

1. Az alábbi esetekben hogyan határozhatjuk meg egy lineáris leképezés normáját, ha adott a mátrixa?

   a, $A : (\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_1) \to (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ ;

   b, $A : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ ;

   c, $A : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1) \to (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ ;

**Megoldások** $\twoheadrightarrow$

A/2/a,
- $A$ akkor és csak akkor lineáris, ha $b = 0$. Ugyanis
  1. $b = A(x_1+x_2) = A(x_1)+A(x_2) = b+b \Leftrightarrow b = 0$; illetve 2. $b = A(\lambda x) = \lambda A(x) = \lambda b \Leftrightarrow b = 0$.
- $A$ korlátos, ugyanis minden korlátos halmaz (sőt, minden halmaz) képe az egyelemű $\{b\}$ halmaz, ami korlátos (mert minden elemére teljesül, hogy a normája $\leq K := \|b\|$).
- $A$ folytonos. Ehhez azt kell megmutatnunk, hogy bármely $x_0 \in X$ és $\forall\varepsilon > 0$ esetén $\exists\delta > 0$: $\|Ax - Ax_0\|_Y < \varepsilon$, ha $\|x - x_0\|_X < \delta$. $\delta := 1$ választás jó lesz, hiszen $\|Ax - Ax_0\|_Y = \|b - b\|_Y = 0$.

Ha $b = 0$, akkor az $A$ (azonosan 0) leképezés normája:

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_X=1} \|Ax\|_Y = \sup_{\|x\|_X=1} \|0\|_Y = 0\,.$$

A/2/b, Vegyük észre, hogy ez a megszokott $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ függvény!

- $I$ lineáris, ugyanis
  1. $I(x_1 + x_2) = x_1 + x_2 = I(x_1) + I(x_2)$; illetve 2. $I(\lambda x) = \lambda x = \lambda I(x)$.
- $I$ folytonos, hiszen a NT-ek beli folytonosság definíciójának speciális eseteként kapjuk az elsőben tanult folytonossági definíciót, akkor pedig beláttuk, hogy az identitás folytonos leképezés ($\delta := \epsilon$).
- $I$ korlátos, mert lineáris és folytonos. Figyelem, az két különböző fogalom, hogy *korlátos* egy leképezés, illetve hogy *korlátos értékkészletű*!

Az $I$ leképezés normája:

$$\|I\| = \sup_{\|x\|_X=1} \|Ix\|_Y = \sup_{|x|=1} |x| = 1\,.$$

A/2/d,
- $D$ lineáris leképezés, mivel $\forall f, g \in C^1[0, 2\pi]$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén
  1. $D(f + g) = (f + g)' = f' + g' = Df + Dg$ illetve 2. $D(\lambda f) = (\lambda f)' = \lambda f' = \lambda Df$.
- $D$ nem korlátos, mert van olyan halmaz, ami korlátos, de a képe nem az. Tekintsük ugyanis az $f_n(x) = \sin nx\,, n \in \mathbb{N}^+$ függvények halmazát. Ez a halmaz korlátos, mivel $\|f_n\|_\infty = \max_{[0,2\pi]} |\sin nx| = 1$. Viszont $\|Df_n\|_\infty = \|f_n'\|_\infty = \|n \cos nx\|_\infty = \max_{[0,2\pi]}(|n \cos nx|) = n \to \infty$. $D$ tehát ezt a korlátos halmazt nem korlátosba viszi át $\Rightarrow$ $D$ nem korlátos.
- $D$ nem folytonos, mert lineáris és nem korlátos.

A/2/f,
- $S$ nem lineáris, ugyanis legyen pl. $f(x) = x$ és $g(x) = -x$. Ekkor $S(f + g) = S(x - x) = S(0) = \sup_{[0,1]}(0) = 0 \neq Sf + Sg = \sup_{[0,1]} x + \sup_{[0,1]}(-x) = 1 + 0 = 1$.
- $S$ korlátos, ugyanis minden korlátos halmaz képe korlátos. Ennek igazolásához tekintsünk egy $H \subset C[0, 1]$ tetszőleges korlátos halmazt. Ez azt jelenti, hogy $\exists K \in \mathbb{R}^+ : \forall f \in H$-ra $\|f\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f| \leq K$ teljesül. Következésképpen $K \geq \sup_{[0,1]} |f| \geq |\sup_{[0,1]} f| = \|Sf\|$ is teljesül, viszont ez pont a halmaz képének korlátosságát jelenti.
- $S$ folytonos. Ehhez azt kell megmutatnunk, hogy bármely $f_0 \in C[0, 1]$ és $\forall\varepsilon > 0$ esetén $\exists\delta > 0$: $\|Sf - Sf_0\| = |\sup_{[0,1]} f - \sup_{[0,1]} f_0| < \varepsilon$, ha $\|f - f_0\|_X = \sup_{[0,1]} |f - f_0| < \delta$ ($f \in C[0, 1]$). $\delta := \varepsilon$ választás jó lesz, hiszen $|\sup_{[0,1]} f - \sup_{[0,1]} f_0| \leq \sup_{[0,1]} |f - f_0|$.

A/2/g,
- $N$ lineáris, ugyanis $\forall f, g \in C[0, 1]$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén
  1. $N(f + g) = (f + g)(0) = f(0) + g(0) = Nf + Ng$, illetve 2. $N(\lambda f) = (\lambda f)(0) = \lambda f(0) = \lambda Nf$.
- $N$ korlátos, ugyanis ha $H \subset C[0, 1]$ korlátos halmaz, akkor $\exists K \in \mathbb{R}^+ : \sup_{[0,1]} |f| \leq K$. Ekkor $|f(0)| \leq K \Rightarrow H$ képe is korlátos.
- Mivel $N$ lineáris és korlátos, így folytonos is.

$N$ normája:

$$\|N\| = \sup_{f\in X, f\neq 0} \frac{\|Nf\|_Y}{\|f\|_X} = \sup_{f\in C[0,1], f\neq 0} \frac{|Nf|}{\sup_{[0,1]} |f|} = \sup_{f\in C[0,1], f\neq 0} \frac{|f(0)|}{\sup_{[0,1]} |f|} = 1\,,$$

ugyanis a hányados minden $f \in C[0, 1]$ függvényre nyilván kisebb, mint 1 és egy olyan $f$ függvényre a legnagyobb, amelyre $|f|$ a szupremumát a 0-ban veszi fel (pl. az azonosan 1 függvény a $[0, 1]$ intervallumon), ebben az esetben pedig a hányados 1 és így a szuprénum is.

6.Gyakorlat: 1.ZH

A, *NT: függvények határértéke*

1. Lássuk el $\mathbb{R}^2$-et az euklideszi normával és $\mathbb{R}$-t pedig az $|\cdot|$ normával. Van-e határértéke az alábbi $f : \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ függvényeknek a $(0,0)$ pontban? $\dashrightarrow$
   a, $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$ ;
   b, $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$ ;
   c, $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ .

B, *NT: folytonosság (linearitás nélkül)*

1. Lássuk el $\mathbb{R}^2$-et az euklideszi normával és $\mathbb{R}$-t pedig az $|\cdot|$ normával. Folytonosak-e az alábbi $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvények a $(0,0)$ pontban? $\dashrightarrow$
   a,
   $$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{, ha } (x,y) = (0,0), \\ \frac{xy^2}{x^3+y^3} & \text{, egyébként;} \end{cases}$$
   b,
   $$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{, ha } (x,y) = (0,0), \\ \frac{2xy^2}{x^2+y^4} & \text{, egyébként;} \end{cases}$$
2. Lássuk el $\mathbb{R}^2$-et az euklideszi normával és $\mathbb{R}$-t pedig az $|\cdot|$ normával. Folytonos-e az alábbi $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény az $(1,1)$ pontban? $\dashrightarrow$
   $$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{, ha } (x,y) = (1,1), \\ \frac{2(x-1)(y-1)}{(x-1)^2+(y-1)^2} & \text{, egyébként.} \end{cases}$$

C, *NT: parciális deriváltak*

1. Határozzuk meg az alábbi $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, illetve $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ függvények parciális deriváltjait!
   a, $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ ;
   b, $g(x,y) = x^y$ , $(x \in \mathbb{R}^+)$ ;
   c, $h(x,y,z) = x^{y^z}$ , $(x, y \in \mathbb{R}^+)$ ;
   d, $k(x,y) = \arcsin \frac{x}{y}$ .
2. Mutassuk meg, hogy az alábbi függvénynek léteznek a parciális deriváltjai a $(0,0)$ pontban, pedig láttuk, hogy nem folytonos ott (lásd A/1/a,)!
   $$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{, ha } (x,y) = (0,0), \\ \frac{2xy}{x^2+y^2} & \text{, egyébként.} \end{cases}$$
3. Mutassuk meg, hogy az alábbi függvény vegyes parciális deriváltjai megegyeznek! $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \ln(x + e^y)$ , $(x \in \mathbb{R}^+)$ .
4. Számítsuk ki a következő parciális deriváltakat!
   a, $\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y}(x \ln xy)$ ;
   b, $\frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z}(e^{xyz})$ .
5. Tekintsük a $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $v(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$ függvényt! Igazoljuk, hogy $\Delta v = 0$!

**Útmutatások** $\dashrightarrow$

A/1/a, Nincs, közeledjünk $mx$ egyenesek mentén, vagy térjünk át polárkoordinátákra.

A/1/b, Van, térjünk át polárkoordinátákra.

A/1/c, Nincs, közeledjünk $mx$ egyenesek mentén, vagy térjünk át polárkoordinátákra.

B/1/a, Nem, térjünk át polárkoordinátákra.

B/1/b, Nem, közeledjünk $\sqrt{x}$ mentén, vagy térjünk át polárkoordinátákra.

B/2 Alkalmazzuk a következő helyettesítést: $z := x - 1$, $w := y - 1$ és utánna lásd A/1/a, .

## 8.Gyakorlat: Differenciálszámítás NT-ekben ($\mathbb{R}^n$-ben): Differenciálhatóság, Érintősík

A, *NT: differenciálhatóság*

1. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y$ és $x_0 = (1, 2)$. Mutassuk meg a definíciót használva, hogy $f'(x_0) = (2, 1)$. $\twoheadrightarrow$
2. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (xy, x - y)$ és $x_0 = (2, 4)$. Számítsuk ki a Jacobi-mátrixot az $x_0$ helyen és mutassuk meg a definíciót használva, hogy ez egyenlő $f'(x_0)$-lal! $\twoheadrightarrow$
3. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x^2 + y^2, xy)$ és $x_0 = (1, 1)$. Számítsuk ki a Jacobi-mátrixot az $x_0$ helyen és mutassuk meg a definíciót használva, hogy ez egyenlő $f'(x_0)$-lal!
4. A definíció összhangban van az 1D-beli definícióval: Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a következő:
   a, $f(x) = x^2$, $x_0 = 2$. Mutassuk meg a definíciót használva, hogy $f'(x_0) = 4$. $\twoheadrightarrow$
   b, $f(x) = x^3$, $x_0 = 2$. Mutassuk meg a definíciót használva, hogy $f'(x_0) = 12$.
5. Határozzuk meg az $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (x^2 y, y + z)$ függvény deriváltját a $(0, 1, 2)$ helyen! $\twoheadrightarrow$
6. Adjunk példát olyan függvényre, mely minden irányból folytonos a $(0, 0)$ pontban, sőt ott minden irányban differenciálható, de (totálisan) nem differenciálható! $\dashrightarrow$
7. Mutassuk meg, hogy az alábbi függvény folytonos a $(0, 0)$ pontban, ott minden irányban differenciálható, de (totálisan) nem differenciálható! $\twoheadrightarrow$

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{, ha } (x, y) = (0, 0), \\ \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{, egyébként.} \end{cases}$$

B, *érintősík*

1. Tekintsük a $z = 2x^2 - 3y^2$ egyenlet által meghatározott felületet! Mi ezen felület $P(-2, 1, 5)$ pontbeli érintősíkjának egyenlete? $\twoheadrightarrow$
2. Számítsuk ki közelítőleg a megadott kifejezések értékét a megadott függvények adott pontjában vett érintősík segítségével! $\twoheadrightarrow$
   a, $e^{0,05} \sin(\frac{\pi}{2} - 0,1) \approx ?\,;\ f(x, y) = e^x \sin y\,;\ (0, \frac{\pi}{2})\,;$
   b, $\sin(\frac{\pi}{2} - 0,1) \cos(\frac{\pi}{2} - 0,2) \approx ?\,;\ f(x, y) = \sin x \cos y\,;\ (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\,.$

**Megoldások** $\twoheadrightarrow$

A/1, $f'(x_0, y_0)$-ra egyetlen lehetséges jelölt van, mégpedig $(\partial_x f(x_0, y_0), \partial_y f(x_0, y_0))$, $f$ $(x_0, y_0)$ pontbeli Jacobi-mátrixa. Ebben az esetben $(\partial_x f, \partial_y f) = (2x, 1)$, vagyis $(\partial_x f(x_0, y_0), \partial_y f(x_0, y_0)) = (2, 1)$.
A differenciálhatósághoz még ellenőriznünk kell, hogy az $r(x, y) = f(x, y) - f(x_0, y_0) - f'(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0)^T$ függvény kisrendű-e $(x_0, y_0)$-ban.
Vagyis

- $r(x_0, y_0) = (0, 0)$; illetve
- $\lim_{(x_0,y_0)} \frac{r(x,y)}{\|(x-x_0,y-y_0)\|} = 0$ teljesül-e.

$$r(x, y) = x^2 + y - 3 - (2, 1) \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} = x^2 - 2x + 1 .$$

- $r(1, 2) = (0, 0)$ (hiszen $r$ így lett megkonstruálva)
- A véges dimenziót $(\dim \mathbb{R}^2 = 2, \dim \mathbb{R} = 1)$ kihasználva tetszőleges normákat választhatunk. Válasszuk most a következőket: $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$, illetve $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

$$\lim_{(1,2)} \frac{r(x, y)}{\|(x - x_0, y - y_0)\|_2} = \lim_{(1,2)} \frac{|x^2 - 2x + 1|}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}} = \lim_{(1,2)} \frac{(x-1)^2}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}}$$

A $z := x - 1$, $w := y - 2$ helyettesítéssel

$$\lim_{(1,2)} \frac{(x-1)^2}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}} = \lim_{(0,0)} \frac{z^2}{\sqrt{z^2 + w^2}} .$$

Polárkoordinátákra áttérve a hányados $r \cos^2 \varphi$, ami tart a 0-hoz.

Tehát az $r$ függvény valóban kisrendű.

A/2, $f$ Jacobi-mátrixa $J_f(x, y) = \begin{pmatrix} y & x \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow J_f(2, 4) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
Ellenőrizzük, hogy az

$$r(x, y) = f(x, y) - f(2, 4) - J_f(2, 4) \cdot (x - 2, y - 4)^T =$$

$$\begin{pmatrix} xy \\ x-y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-2 \\ y-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy - 4x - 2y + 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

függvény kisrendű-e $(2, 4)$-ben, azaz

- $r(x_0, y_0) = (0, 0)$; illetve
- Euklídeszi normát választva és a koordinátafüggvények konvergenciáját vizsgálva:

$$\lim_{(2,4)} \left| \frac{xy - 4x - 2y + 8}{\sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2}} \right| = \lim_{(2,4)} \left| \frac{(x-2)(y-4)}{\sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2}} \right| ,$$

$z := x - 2$, $w := y - 4$ helyettesítéssel adódik, hogy a határérték 0 (lásd 7.Gy/A/1/a,). A másik koordinátafüggvény 0, így ott automatikusan adódik a 0-hoz tartás.

Tehát $r$ kisrendű, így a fenti Jacobi-mátrix valóban $f$ deriváltja a megadott pontban.

A/4/a, Az $r(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = x^2 - 4(x-2) - 4 = (x-2)^2$ függvény kisrendű az $x_0 = 2$-ben, ugyanis 2-ben 0-t vesz fel, illetve $\frac{(x-2)^2}{|x-2|} = |x - 2| \to 0$, ha $x \to 2$.

A/5, $J_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow J_f(0, 1, 2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. A Jacobi-mátrix koordinátafüggvényei pedig folytonosak a $(0, 1, 2)$ pontban (persze nem csak ott), ami biztosítja az ebben a pontban való differenciálhatóságot. Tehát $f'(0, 1, 2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

A/7,
- $f$ folytonos a $(0,0)$-ban, mivel határértéke a $(0,0)$-ban 0, azaz éppen a $(0,0)$-beli helyettesítési érték (lásd 7.Gy/A/1/b,).
- Differenciálható minden irányban: az $\alpha$ irányszögű – vagyis az $l(t) = (t\cos\alpha, t\sin\alpha)$ egyenletű – egyenes mentén az iránymenti derivált $(f \circ l)'(0) = \cos\alpha \sin^2\alpha$.
- Ebből $\alpha = 0$-ra kapjuk az $x$ szerinti parciális deriváltat: $\partial_x f(0,0) = 0$, és $\alpha = \frac{\pi}{2}$-re az $y$ szerintit: $\partial_y f(0,0) = 0$. Ha tehát $f$ differenciálható, akkor $f'(0,0) = (0,0)$ lehet csak. Az $r(x,y) = f(x,y) - f(0,0) - f'(0,0) \cdot (x,y)^T = f(x,y)$ függvény azonban nem kisrendű a nullában, ugyanis az $r(x,y) = \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ függvény nem tart 0-hoz (polárkordinátákra való áttéréssel adódik) $\Rightarrow$ $f$ nem differenciálható a $(0,0)$-ban.

B/1, Az $f(x,y) = 2x^2 - 3y^2$ függvény $P(-2,1)$-beli érintősíkját kell meghatározni. $f$ differenciálható, hiszen az elsőrendű parciális deriváltjai folytonosak. $f'(x,y) = (4x, -6y) \Rightarrow f'(-2,1) = (-8,-6)$. Az érintősík egyenlete $s(x,y) = f(x_0,y_0) + f'(x_0,y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0)^T$, vagyis $s(x,y) = 5 + (-8,-6) \cdot (x+2, y-1)^T = -8x - 6y - 5$.

B/2/a, $f$ differenciálható, mert az elsőrendű parciális deriváltjai folytonosak.
$f'(x,y) = (e^x \sin y, e^x \cos y) \Rightarrow f'(0, \frac{\pi}{2}) = (1,0)$.
Az érintősík egyenlete: $s(x,y) = f(0,\frac{\pi}{2}) + f'(0,\frac{\pi}{2}) \cdot (x-0, y-\frac{\pi}{2})^T = x+1$.
$e^{0,05} \sin(\frac{\pi}{2} - 0,1) = f(0,05; \frac{\pi}{2} - 0,1) \approx s(0,05; \frac{\pi}{2} - 0,1) \approx 0,05 + 1 = 1,05$.

B/2/b, $f$ differenciálható, mert az elsőrendű parciális deriváltjai folytonosak.
$f'(x,y) = (\cos x \cos y, -\sin x \sin y) \Rightarrow f'(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = (0,-1)$
$s(x,y) = f'(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \cdot (x - \frac{\pi}{2}, y - \frac{\pi}{2})^T + f(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) = -y + \frac{\pi}{2}$.
$\sin(\frac{\pi}{2} - 0,1)\cos(\frac{\pi}{2} - 0,2) \approx -(\frac{\pi}{2} - 0,2) + \frac{\pi}{2} = 0,2$.

**Útmutatások** $\dashrightarrow$

A/6, Legyen $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{azon } (x,y) \text{ pontokban, amelyekre } x > 0 \text{ és } y = x^2, \\ 0 & \text{egyébként}. \end{cases}$

9.Gyakorlat: Differenciálszámítás NT-ekben ($\mathbb{R}^n$-ben): Kompozíció differenciálása, Iránymenti derivált, Implicit alakban megadott függvény differenciálása

---

A, *kompozíció differenciálása*

1. Legyenek $X, Y$ normált terek, illetve $\lambda \in \mathbb{R}$. Mutassuk meg a definíciót használva, hogy ha $f : X \to Y$ differenciálható az $x_0 \in X$ helyen, akkor $\lambda f$ is differenciálható az $x_0$ helyen és $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$.
2. Számítsuk ki $(f \circ g)'(t)$-t kétféleképpen!
   a, Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 - y^2 - 6x$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $g(t) = (3 \operatorname{ch} t, 5 \operatorname{sh} t)$. ↠
   b, Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2 - 3xy$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $g(t) = (-\sin t, 3 \cos t)$. →

B, *iránymenti derivált*

1. Számítsa ki az $f(x, y) = xy$ függvény alábbi irányok szerinti deriváltjait az $(1, 1)$ pontban. ↠
   a, $e_1 = (1, 0)$; $e_2 = (0, 1)$;
   b, $e_3 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$; $e_4 = (1, 1)$.
   Melyik irányban lesz az $f$ függvény deriváltja maximális illetve minimális?
2. Tekintsük a $z = 8 - 4x^2 - 2y^2$ egyenlet által meghatározott domborzatot! Melyik irányban fog elindulni ezen domborzat $P(1, 1, 2)$ pontjából az odahullott csapadék? ↠

C, *parciális deriváltat tartalmazó egyenletek, implicit alakban megadott függvény differenciálása*

1. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható függvényre és $u(x, y) = yf(x^2 - y^2)$ függvényre $y^2 \frac{\partial u}{\partial x} + xy \frac{\partial u}{\partial y} = xu$. ↠
2. Mutassuk meg, hogy az $u(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ függvényre $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Keressünk további megoldásokat. ↠
3. Oldjuk meg a következő egyenleteket!
   a, $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}$; ↠
   b, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.
4. Határozzuk meg $y'(0)$-t az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ implicit alakban megadott függvényre. ↠

---

**Megoldások** $\twoheadrightarrow$

A/2/a, 1. $(f\circ g)(t) = f(3\operatorname{ch} t, 5\operatorname{sh} t) = 9 - 16\operatorname{sh}^2 t - 18\operatorname{ch} t \Rightarrow (f\circ g)'(t) = -32\operatorname{sh} t\operatorname{ch} t - 18\operatorname{sh} t$.

2. $f'(x,y) = (2x-6, -2y)$, $f'(g(t)) = (6\operatorname{ch} t - 6, -10\operatorname{sh} t)$, $g'(t) = (3\operatorname{sh} t, 5\operatorname{ch} t)$.

$$(f\circ g)'(t) = f'(g(t))\cdot g'(t) = (6\operatorname{ch} t - 6, -10\operatorname{sh} t)\cdot \begin{pmatrix} 3\operatorname{sh} t \\ 5\operatorname{ch} t \end{pmatrix} = -32\operatorname{sh} t\operatorname{ch} t - 18\operatorname{sh} t\,.$$

B/1/a, $f$ differenciálható, mert az elsőrendű parciális deriváltjai folytonosak. $f'(x,y) = (y,x) \Rightarrow f'(1,1) = (1,1)$.

$$\partial_{e_1} f(1,1) = f'(1,1)\cdot e_1 = (1,1)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 1\,;\quad \partial_{e_2} f(1,1) = f'(1,1)\cdot e_2 = (1,1)\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 1\,.$$

B/1/b, $\partial_{e_3} f(1,1) = (1,1)\cdot(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})^T = \frac{2}{\sqrt{2}} = \partial_{e_4} f(1,1)$ (ugyanis $e_4$ normálva $e_3$).
Az iránymenti derivált maximális az $(1,1)$ irányban (a gradiensvektor iránya), minimális a vele éppen ellentétes $(-1,-1)$ irányban, ugyanis két adott hosszúságú vektor szorzata akkor maximális, ha a közbezárt szögük 0, illetve minimális, ha a közbezárt szög $\pi$.

B/2, A kérdés átfogalmazható a következőképpen: az $f(x,y) = 8 - 4x^2 - 2y^2$ függvény $(x_0,y_0) = (1,1)$ pontjában melyik irányban a legkisebb az iránymenti derivált? $f'(x,y) = (-8x, -4y) \Rightarrow f'(1,1) = (-8,-4)$. Így, felhasználva a B/1/b, feladat megoldásánál használt indoklást, adódik, hogy a $(8,4)$ vektor (normálva: a $(\frac{8}{\sqrt{80}}, \frac{4}{\sqrt{80}})$) vektor irányában indul el a csapadék.

C/1, $\frac{\partial u}{\partial x} = yf'(x^2-y^2)\cdot 2x\,;\ \frac{\partial u}{\partial y} = f(x^2-y^2) + yf'(x^2-y^2)\cdot(-2y)$. Innen pedig behelyettesítéssel adódik.

C/2, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2x = \frac{x}{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{x^2+y^2-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$. Hasonlóképpen adódik, hogy $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$. Majd behelyettesítve adódik az állítás.
További példák: $u(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2} + ax + by + c$, $a,b,c\in\mathbb{R}$ tetszőleges konstansok, $u(x,y) = xy$, $u(x,y) = e^x\cos y$ stb. (Az ilyen függvényeket *harmonikus függvényeknek* nevezzük.)

C/3/a, Jelölje $v(\xi,\eta)$ azt az $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ függvényt, amelyre $u(x,t) = v(x-t, x+t)$ minden $(x,t)\in\mathbb{R}^2$ pontban.
Azaz, ha bevezetjük a $g(x,t) = (x-t, x+t)$ segédfüggvényt, akkor $u(x,t) = (v\circ g)(x,t)$.
Ekkor, a parciális deriváltakat kétféleképpen kiszámítva:

$$u'(x,t) = (\partial_x u(x,t), \partial_t u(x,t))\,.$$

Másrészről

$$u'(x,t) = (v\circ g)'(x,t) = v'(g(x,t))\cdot g'(x,t)\,.$$

A jobb oldalon az első tényező: $v'(\xi,\eta) = (\partial_\xi v(\xi,\eta), \partial_\eta(\xi,\eta))$, vagyis $v'(g(x,t)) = (\partial_{x-t} v(x-t, x+t), \partial_{x+t}(x-t, x+t))$.
A második tényező: $g'(x,t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}$
A mátrixszorzást elvégezve

$$u'(x,t) = (\partial_{x-t} v(x-t,x+t) + \partial_{x+t} v(x-t,x+t), -\partial_{x-t} v(x-t,x+t) + \partial_{x+t} v(x-t,x+t))\,.$$

Az $u'(x,t)$-re kapott két kifejezés összehasonlításából
$\partial_x u(x,t) = \partial_{x-t} v(x-t,x+t) + \partial_{x+t} v(x-t,x+t)$, $\partial_t u(x,t) = -\partial_{x-t} v(x-t,x+t) + \partial_{x+t} v(x-t,x+t)$.
Ezzel a $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}$ differenciálegyenlet $v$-vel kifejezve az alábbi alakban írható fel:
$\partial_{x-t} v(x-t,x+t) = -\partial_{x-t} v(x-t,x+t)$, vagyis

$$\partial_{x-t} v(x-t,x+t) = 0\,.$$

Ez azt jelenti, hogy $v$ olyan függvény, amely csak a második változójától függ. Tehát az egyenlet megoldása $v(x-t,x+t) = k(x+t)$, ahol $k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tetszőleges differenciálható függvény. $\Rightarrow$ Az eredeti egyenlet megoldása: $u(x,t) = k(x+t)$, ahol $k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tetszőleges differenciálható függvény.

C/4, Deriváljuk az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ egyenlet mindkét oldalát: $\frac{2x}{a^2} + \frac{2y \cdot y'(x)}{b^2} = 0$. Fejezzük ki $y'(x)$-et: $y'(x) = -\frac{2xb^2}{a^2 2y}$. Az $x$ helyére 0-t, $y$ helyére $y(0) = |b|$-t írva $y'(0) = 0$.

**Eredmények** $\rightarrow$

A/2/b, $(f \circ g)'(t) = -16 \sin t \cos t + 9 \cos^2 t - 9 \sin^2 t$.

10.Gyakorlat: Differenciálszámítás NT-ekben ($\mathbb{R}^n$-ben): Szélsőérték, Taylor-sor

A, *szélsőérték*

1. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = xy$. Határozzuk meg $f''(0,0)$-t! $\twoheadrightarrow$
2. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3 + y^3$. Határozzuk meg $f''(1,1)$-t! $\twoheadrightarrow$
3. Tekintsük a $z = 4x^2 + 2y^2 - 8$ egyenlet által meghatározott domborzatot! Ezen domborzat melyik pontjában fog összegyűlni a környezetében lehullott csapadék? $\twoheadrightarrow$
4. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 - y^2$. Van-e $f$-nek lokális szélsőértékhelye? $\twoheadrightarrow$
5. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

   a, $f(x,y) = 2x^2 + y^2 + 6xy + 10x - 6y + 25\,;$

   b, $f(x,y) = 2x^2 + y^2 + 6xy - 6y + 25\,.$ $\twoheadrightarrow$

   Keressük meg $f$ lokális szélsőértékhelyeit.
6. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \sin x + \cos y + \cos(x - y)$. Mi a legnagyobb értéke $f$-nek a $H = \{(x,y) : 0 \le x \le \pi/2,\ 0 \le y \le \pi/2\}$ halmazon? $\twoheadrightarrow$

B, *Taylor-sor*

1. Számítsuk ki közelítőleg az $e^{0,05}\sin(\frac{\pi}{2} - 0,1)$ kifejezés értékét Taylor-polinom segítségével! $\twoheadrightarrow$

   a, Használjunk elsőfokú Taylor-polinomot. Mi a geometriai jelentése az elsőfokú Taylor-polinomnak?

   b, Használjunk másodfokú Taylor-polinomot.

**Megoldások** $\twoheadrightarrow$

A/1, A másodrendű parciális deriváltak folytonosak, így $f''$ létezik. $f'(x,y) = (y,x)$,

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow f''(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A/2, A másodrendű parciális deriváltak folytonosak, így $f''$ létezik. $f'(x,y) = (3x^2, 3y^2)$,

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix} \Rightarrow f''(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

A/3, Az $f(x,y) = 4x^2 + 2y^2 - 8$ függvény minimumhelyét keressük.
$f$ az egész $\mathbb{R}^2$-n kétszer differenciálható (végtelen sokszor is). Szélsőértékhelye csak ott lehet, ahol 0 a deriváltja (gradiense). $f'(x,y) = (8x, 4y) = (0,0)$, ha $x = 0$, $y = 0$. Számítsuk ki ebben a pontban a második deriváltat!

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = f''(0,0).$$

A mátrix mindkét bal felső sarokaldeterminánsa pozitív ($8 > 0$; $8 \cdot 4 > 0$) $\Rightarrow f''(0,0)$ pozitív definit mátrix $\Rightarrow$ a $(0,0)$ szigorú lokális minimumhely, tehát itt fog összegyűlni a környezetében lehullott csapadék.

A/4, $f$ kétszer differenciálható (végtelen sokszor is). $f'(x,y) = (2x, -2y) = (0,0)$, ha $(x,y) = (0,0)$, tehát csak itt lehet lokális szélsőértékhelye $f$-nek.

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = f''(0,0).$$

Ennek a mátrixnak a determinánsa negatív, tehát indefinit $\Rightarrow$ a $(0,0)$ nem lokális szélsőértékhely, így $f$-nek nincs lokális szélsőértékhelye. (Az indoklás eleje elhagyható, mert $f''$ nem függ $x, y$-tól.)

A/5/b, $f$ kétszer differenciálható (végtelen sokszor is). $f'(x,y) = (4x + 6y, 2y + 6x - 6) = (0,0)$, ha $x = \frac{9}{7}$ és $y = -\frac{6}{7}$.

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

mindenhol, így a $(\frac{9}{7}, -\frac{6}{7})$ pontban is. Mivel a mátrix determinánsa negatív, nincs lokális szélsőértékhely ebben a pontban, így $f$-nek nincs lokális szélsőértékhelye. (Az indoklás eleje itt is elhagyható.)

A/6, $f$ kétszer differenciálható (végtelen sokszor is). Az $f$ függvény a $H \subset \mathbb{R}^2$ korlátos és zárt halmazon van értelmezve, így felveszi a maximumát (és minimumát). Szélsőértékhelye vagy olyan belső pontban van, amely lokális szélsőértékhely, vagy a peremen.

- Vizsgáljuk meg először, hogy $H$ belsejében hol nulla $f$ deriváltja:
$f'(x,y) = (\cos x - \sin(x-y), -\sin y + \sin(x-y)) = (0,0)$, ha $x$ és $y$ kielégíti a $\cos x - \sin(x-y) = 0$ és $-\sin y + \sin(x-y) = 0$ egyenleteket. A két egyenletből $\cos x = \sin y \Rightarrow \sin(\frac{\pi}{2} - x) = \sin y$. Ez kétféleképpen lehetséges: 1.) $\frac{\pi}{2} - x = y + 2k\pi$; 2.) $\frac{\pi}{2} - x = \pi - y + 2k\pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$. Mindkét egyenletből $x$-et kifejezve és visszahelyettesítve az eredeti első vagy második egyenletbe egyetlen olyan megoldást kapunk, amely a $H$ belsejében van, ez a $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6})$ pont. Itt a függvényérték $f(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2,6$.
- Vizsgáljuk meg a perempontokat is! A perem négy szakaszból áll.
1. $x = 0$, $y \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Itt $f(x,y) = f(0,y) = \sin 0 + \cos y + \cos(-y) = 2\cos y$ maximuma 2.
2. $y = 0$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Itt $f(x,y) = f(x,0) = \sin x + 1 + \cos x$ maximuma az $x = \frac{\pi}{4}$ helyen van, értéke $\frac{2}{\sqrt{2}} + 1 \approx 2,41$ (egyváltozós függvény szélsőértékhelye ott lehet, ahol a deriváltja 0).
3. $x = \frac{\pi}{2}$, $y \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Itt $f(x,y) = f(\frac{\pi}{2}, y) = 1 + \cos y + \sin y \Rightarrow y = \frac{\pi}{4}$, az értéke annyi, mint az előző pontban.
4. $y = \frac{\pi}{2}$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$: itt a maximum 2.

A fentiek közül a legnagyobb értéket $f$ a $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6})$ pontban veszi fel, tehát itt maximuma.

B/1/a, Legyen $f(x,y) = e^x \sin y$, mely végtelen sokszor differenciálható. Közelítsük az $(x_0, y_0) = (0, \frac{\pi}{2})$ körüli elsőfokú Taylor-polinomjával (ez nem más, mint a függvény érintősíkja).
$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + \partial_1 f(x_0,y_0) \cdot (x - x_0) + \partial_2 f(x_0,y_0) \cdot (y - y_0)$.
Itt $\partial_1 f(x,y) = e^x \sin y \Rightarrow \partial_1 f(0, \frac{\pi}{2}) = 1$ ; $\partial_2 f(x,y) = e^x \cos y \Rightarrow \partial_1 f(0, \frac{\pi}{2}) = 0$.
Alkalmazva a közelítést az $(x,y) = (0,05; \frac{\pi}{2} - 0,1)$ pontban:
$e^{0,05} \sin(\frac{\pi}{2} - 0,1) \approx e^0 \sin \frac{\pi}{2} + 1 \cdot 0,05 + 0 = 1,05$.

B/1/b,

$$\begin{aligned} f(x,y) \approx & f(x_0,y_0) + \partial_1 f(x_0,y_0) \cdot (x - x_0) + \partial_2 f(x_0,y_0) \cdot (y - y_0) + \\ & \frac{1}{2}\left(\partial_1^2 f(x_0,y_0) \cdot (x - x_0)^2 + 2\partial_{12} f(x_0,y_0) \cdot (x - x_0) \cdot (y - y_0) + \partial_2^2 f(x_0,y_0) \cdot (y - y_0)^2\right) . \end{aligned}$$

$\partial_1^2 f(x,y) = e^x \sin y$, $\partial_{12} f(x,y) = e^x \cos y$, $\partial_2^2 f(x,y) = -e^x \sin y \Rightarrow$
$e^{0,05} \sin(\frac{\pi}{2} - 0,1) \approx 1,05 + \frac{1}{2}\left(e^0 \sin(\frac{\pi}{2}) 0,05^2 + 2e^0 \cos(\frac{\pi}{2}) 0,05(-0,1) - e^0 \sin(\frac{\pi}{2})(-0,1)^2\right) = 1,04625$.

11.Gyakorlat: Integrálszámítás NT-ekben ($\mathbb{R}^n$-ben): Ívhossz

A, *ívhossz*

1. Számítsuk ki a következő $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ görbe ívhosszát! $r(t) = (3t, 3t^2, 2t^3)$ , $t \in [0, 1]$.
2. Számítsuk ki a következő $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ görbe ívhosszát! $r(t) = (e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t, e^{-t})$ , $t \in [0, \infty)$.
3. Számítsuk ki a következő $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ görbe ívhosszát! $r(t) = (a(t\sin t + \cos t), a(\sin t - t\cos t))$ , $t \in [0, t_0]$.
4. Számítsuk ki a következő görbe ívhosszát!
   a, $y = x^{3/2}$, $x \in [0, 4]$ ;
   b, $y = x^2$, $x \in [0, x_0]$ .
5. Számítsuk ki az egységsugarú kör kerületét!
6. Legyen $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [0, \varphi_0]$. Igazoljuk, hogy
$$l(r) = \int_0^{\varphi_0} \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2}\, \mathrm{d}\varphi\,.$$
7. Számítsuk ki így is az egységsugarú kör kerületét!
8. Számítsuk ki a következő görbe ívhosszát! $r(\varphi) = a\varphi$, $\varphi \in [0, \pi/2]$. (Archimédeszi-spirális)

**Megoldások** $\twoheadrightarrow$

A/2, $r:\ x(t)=e^{-t}\cos t,\ y(t)=e^{-t}\sin t,\ z(t)=e^{-t},\ t\in[0,\infty)$ jelölésekkel

$$l(r)=\int_0^{\infty}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\ \mathrm{d}t=\lim_{s\to\infty}\int_0^{s}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\ \mathrm{d}t$$

$x'(t)=-e^{-t}\cos t-e^{-t}\sin t,\ y'(t)=-e^{-t}\sin t+e^{-t}\cos t,\ z'(t)=-e^{-t}$
Ebből $(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2=3e^{-2t}\Rightarrow$

$$l(r)=\lim_{s\to\infty}\int_0^{s}\sqrt{3e^{-2t}}\ \mathrm{d}t=\sqrt{3}\lim_{s\to\infty}\int_0^{s}e^{-t}\ \mathrm{d}t=\sqrt{3}\lim_{s\to\infty}\left[-e^{-t}\right]_0^s=\sqrt{3}\lim_{s\to\infty}(-e^{-s}+1)=\sqrt{3}\,.$$

A/3, $x'(t)=a(\sin t+t\cos t-\sin t)=at\cos t\,;\ y'(t)=a(\cos t-\cos t+t\sin t)=at\sin t\,.$

$$l(r)=\int_0^{t_0}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\ \mathrm{d}t=\int_0^{t_0}\sqrt{a^2t^2\cos^t+a^2t^2\sin^2 t}\ \mathrm{d}t=|a|\int_0^{t_0}t\ \mathrm{d}t=|a|\frac{t_0^2}{2}.$$

A/4/a,

$$l(r)=\int_0^4\sqrt{1+(f'(x))^2}\ \mathrm{d}x=\int_0^4\sqrt{1+\left(\left(x^{\frac{3}{2}}\right)'\right)^2}\ \mathrm{d}x=\int_0^4\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\ \mathrm{d}x=$$

$$\int_0^4\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\ \mathrm{d}x=\left[\frac{8}{27}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4=\frac{8}{27}\left(\sqrt{1000}-1\right)\,.$$

A/5, A körvonal első síknegyedbe eső darabját az $y=\sqrt{1-x^2},\ x\in[0,1]$ függvény adja meg. Ennek a darabnak az ívhossza

$$l(r)=\int_0^1\sqrt{1+\left[\left(\sqrt{1-x^2}\right)'\right]^2}\ \mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}\ \mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{\frac{1}{1-x^2}}\ \mathrm{d}x=$$

$$\arcsin 1-\arcsin 0=\arcsin 1=\frac{\pi}{2}\,.$$

A teljes ívhossz ennek négyszerese, azaz $2\pi$.

A/6, $r:\varphi\mapsto(x(\varphi),y(\varphi))=(r(\varphi)\cos\varphi,r(\varphi)\sin\varphi),\ \varphi\in[0,\varphi_0]$.
$x'(\varphi)=r'(\varphi)\cos\varphi-r(\varphi)\sin\varphi,$
$y'(\varphi)=r'(\varphi)\sin\varphi+r(\varphi)\cos\varphi,$
$(x'(\varphi))^2=(r'(\varphi))^2\cos^2\varphi-2r'(\varphi)r(\varphi)\sin\varphi\cos\varphi+(r(\varphi))^2\sin^2\varphi,$
$(y'(\varphi))^2=(r'(\varphi))^2\sin^2\varphi+2r'(\varphi)r(\varphi)\sin\varphi\cos\varphi+(r(\varphi))^2\cos^2\varphi.$
Ebből $(x'(\varphi))^2+(y'(\varphi))^2=(r(\varphi))^2+(r'(\varphi))^2$, és így

$$l(r)=\int_0^{\varphi_0}\sqrt{(x'(\varphi))^2+(y'(\varphi))^2}\ \mathrm{d}\varphi=\int_0^{\varphi_0}\sqrt{(r(\varphi))^2+(r'(\varphi))^2}\ \mathrm{d}\varphi\,.$$

A/7, Az egységkörre $r(\varphi)=1,\ \varphi\in[0,2\pi]\ \Rightarrow r'(\varphi)=0\,.$

$$l(r)=\int_0^{2\pi}\sqrt{(r(\varphi))^2+(r'(\varphi))^2}\ \mathrm{d}\varphi=\int_0^{2\pi}\sqrt{1^2+0^2}\ \mathrm{d}\varphi=\int_0^{2\pi}1\ \mathrm{d}\varphi=2\pi\,.$$

A/8, $r'(\varphi)=a\,,$

$$l(r)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\varphi^2+a^2}\ \mathrm{d}\varphi=a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\varphi^2}\ \mathrm{d}\varphi=a\int_0^{\operatorname{arsh}\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t}\operatorname{ch} t\ \mathrm{d}t=$$

$$a\int_0^{\operatorname{arsh}\frac{\pi}{2}}\operatorname{ch}^2 t\ \mathrm{d}t==a\int_0^{\operatorname{arsh}\frac{\pi}{2}}\frac{1+\operatorname{ch}(2t)}{2}\ \mathrm{d}t=\frac{a}{2}\left[t+\frac{\operatorname{sh}(2t)}{2}\right]_0^{\operatorname{arsh}\frac{\pi}{2}}=\frac{a}{4}\operatorname{sh}(2\operatorname{arsh}\frac{\pi}{2})\,.$$

**Útmutatások** $\dashrightarrow$

A/4/b, $l(r)=\int_0^{x_0}\sqrt{1+(2x)^2}=\frac{1}{8}(2\operatorname{arsh}(2x_0)+\operatorname{sh}(2\operatorname{arsh}(2x_0)))$. $2x=:\operatorname{sh} t$ helyettesítéssel, felhasználva az integrálás során, hogy $\operatorname{ch}^2 t=\frac{1+\operatorname{ch}(2t)}{2}$.

12.Gyakorlat: 2.ZH