

1. Gyakorlófeladatsor

Mat3, Földtudomány Bsc 3.fé.

MTK

October 12, 2009

1. Metrikát definiálnak-e \mathbb{R} -n?

a, $d_1(x, y) = x - y$ b, $d_2(x, y) = |2x - 2y|$ c, $d_3(x, y) = ||x| - |y||$.

Ha igen, mik a konvergencia sorozatok az általa definiált metrikus térben?

2. Korlátos-e a következő halmaz?

$$H = \left\{ f \in C[0, 1] : \int_0^1 f(x) dx \neq 0 \right\}, \text{ a } (C[0, 1], d_{sup}) \text{ MT-ben.}$$

3. Szeretnénk megoldani a $\cos x = 2x$ egyenletet. Mi a teendő, ha szeretnénk garantálni, hogy a hiba kisebb legyen, mint 10^{-3} ?

4. Állapítsuk meg az alábbi határértékeket!

a, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x+y^2}$; b, $\lim_{x,y \rightarrow \infty} (x^2 + y^2) e^{-x-y}$.

5. Tekintsük \mathbb{R}^2 -et, mint \mathbb{R} feletti vektorteret. Normát definiálnak-e a következő hozzárendések?

a, $(x_1, x_2) \mapsto \min\{|x_1|, |x_2|\}$; b, $(x_1, x_2) \mapsto \max\{x_1, x_2\}$;

6. Tekintsük \mathbb{R}^2 -ben az alábbi operátort: Először felére összenyomja a vektort, aztán tükrözi az origóra. Lineáris-e? Ha igen, mik a sajátvektorai és hozzá tartozó sajátértékei? Mi a mátrixa a szokásos bázisban és mi a normája $(1, 2, \infty)$?

7. Vizsgáljuk meg a következő $X \rightarrow Y$, -ahol X, Y NT-ek- operátorokat, hogy lineárisak, korlátosak illetve folytonosak-e?

a, $X = (\{(x_n) : \exists \lim x_n\}, \|\cdot\|_{sup})$, $Y = (\mathbb{R}, |\cdot|)$, $L(x_n) = \lim x_n$;

b, $X = (C[a, b], \|\cdot\|_f)$, (ahol $\|f\|_f = \int_a^b |f(x)| dx$), $Y = (C[a, b], \|\cdot\|_{sup})$, $If = f$;

Ha korlátos és lineáris, akkor mi a normája?