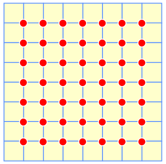
GALJORKIN MÓDSZEREK
Spektrális módszer

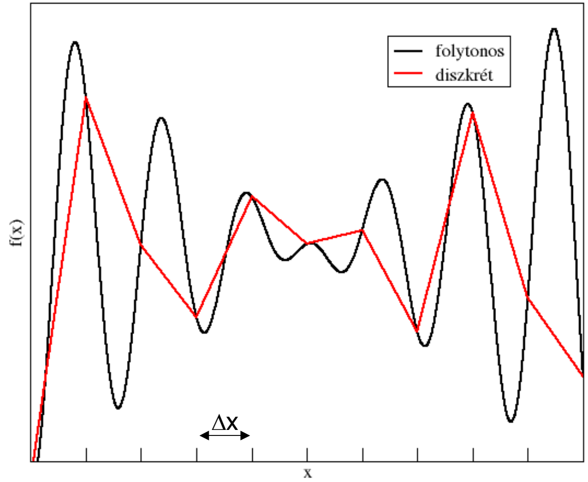
Összeállította: Hágel Edit, Horányi András
Kiegészítette: Szépszó Gabriella

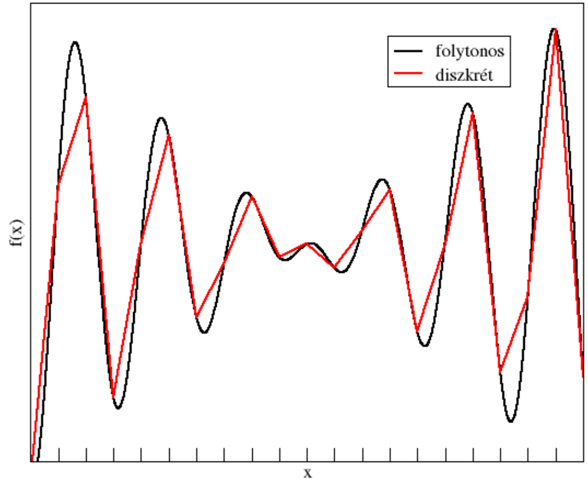
Az órák anyaga: http://nimbus.elte.hu/~numelo/mat

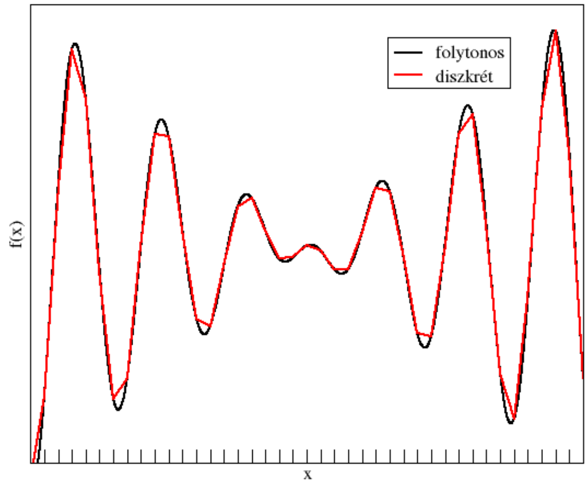
Véges különbséges módszer

- Legyen a vizsgálandó függvény egy egyváltozós függvény: $f=f(x)$
- A $0 \leq x \leq L$ intervallumon vizsgálódunk
- Osszuk fel az intervallumot J darab Δx hosszúságú részre
- Így a függvényünket az $x_j=j\Delta x$ pontokban közelítjük, ahol $j=0,1,2\ldots,J$









Galjorkin módszer

- Írjuk fel *f(x)*-et a következő alakban:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \cos\left(\frac{2k\pi x}{L}\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi x}{L}\right)\right]$$

ahol

$$a_k = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{2k\pi x}{L}\right)dx \qquad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

$$b_k = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{2k\pi x}{L}\right)dx \qquad k=1,\ 2,\ \ldots$$

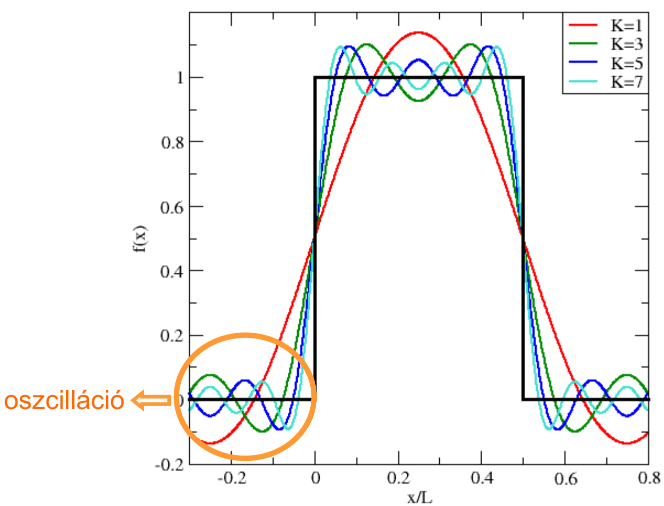
- Természetesen a gyakorlatban **nem tudjuk a képletben szereplő összegzést a végtelenig folytatni**, meg kell állnunk valamilyen véges K értéknél
- Minél nagyobb ez a K érték, annál pontosabban tudjuk közelíteni a függvényt (és ezáltal pontosabb lesz a megoldás is), de annál nagyobb a számításigény is
- Nézzünk erre két példát!
- 1. példa: legyen $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x \le L/2 \\ 0 & L/2 \le x \le L \end{cases}$
- Számítsuk ki a_k és b_k értékeit!

$$a_0 = 1$$

$$a_k = 0 \qquad k = 1,2,3\ldots$$

$$b_k = \frac{1}{k\pi}\left(1 - \cos(k\pi)\right) \qquad k = 1,2,3\ldots$$

K növelésével nő a pontosság:



2. példa:

- Legyen

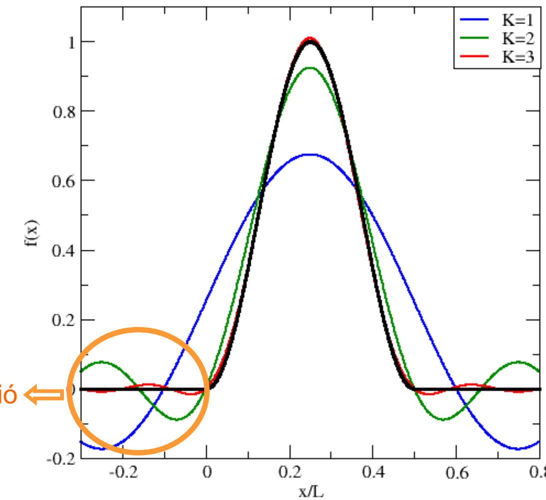
$$f(x)=\begin{cases}\sin^2\left(\dfrac{2\pi x}{L}\right) & 0\le x\le L/2\\ 0 & L/2\le x\le L\end{cases}$$

- Kiszámítva a_k és b_k értékeit:

$$a_0=1/2$$
$$a_2=-1/4$$
$$a_k=0 \qquad k=1,3\ldots$$
$$b_k=\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{2}{k}\left[1-\cos(k\pi)\right]+\frac{1}{(2-k)}\left[1-\cos((2-k)\pi)\right]-\frac{1}{2+k}\left[1-\cos((2+k)\pi)\right]\right\}$$
$$k=1,3,4,5\ldots$$

K növelésével nő a pontosság:

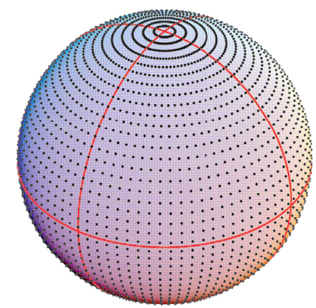
oszcilláció



- Tehát az ismeretlen változókat valamilyen függvényrendszer elemeinek segítségével írjuk fel → **Galjorkin módszerek**
- Két módszercsalád: **spektrális** és **véges elem** módszer
- Feladat: az együtthatók meghatározása
- Megjegyzések:
  - Széles körben elterjedt módszer elsősorban globális problémák megoldására (nincs pólus-probléma, szférikus harmonikusok)
  - DE: léteznek korlátos tartományú (regionális) alkalmazások is (pl. biperiodikus – teljes harmonikus – függvények → a biperiodicitás újabb megoldandó problémát vet fel – erről később)

Mi a pólus-probléma?

- Véges differencia módszer – szélesség-hosszúság rácson
- Meridiánok konvergenciája a pólusokon
- Kis időlépcsők
- Kelet-nyugati irány elvesztése



Szférikus harmonikusok – szférikus sorfejtés:

$$f(\lambda,\varphi)\approx\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}f_l^m Y_l^m(\lambda,\varphi)$$

→ ortogonális rendszert alkotnak

- Tekintsük az $L(u)=f(x)$ egyenletet, ahol

  L: differenciál operátor
  $f(x)$: kényszer tag

- Keressük $u(x)$-et a következő alakban:

Ismeretlen együtthatók

Keresett függvény

$$u(x)=\sum_{j=1}^{\infty} u_j \varphi_j(x)$$

$$u(x)\approx\sum_{j=1}^{N} u_j \varphi_j(x)$$

Ismert bázisfüggvények

- A $\varphi_j(x)$ (bázis) függvények ismertek, a feladat az u_j (x-től nem függő) együtthatók meghatározása
- Kell még valamilyen feltétel, hogy az u_j-ket meghatározhassuk

- A Galjorkin módszerek esetében megköveteljük a közelítési **hiba** (e_N) **ortogonalitását**, azaz a hiba legyen ortogonális a bázisfüggvényekre:

hiba

$$\int_a^b e_N \varphi_i(x)dx = 0 \qquad i=1,\dots,N$$

bázisfüggvény

- Ahol e_N (vagyis a hiba):

$$e_N = L\left(\sum_{j=1}^{N} u_j \varphi_j(x)\right) - L(u)$$

$$e_N = L\left(\sum_{j=1}^{N} u_j \varphi_j(x)\right) - f(x)$$

ismeretlen

ismert

$$\int_a^b e_N \varphi_i(x)dx = 0$$

$$\int_a^b \varphi_i(x)\left[L\left(\sum_{j=1}^{N} u_j \varphi_j(x)\right) - f(x)\right]dx = 0$$

$$\int_a^b \varphi_i(x) L\left(\sum_{j=1}^{N} u_j \varphi_j(x)\right)dx - \int_a^b \varphi_i(x) f(x)dx = 0$$

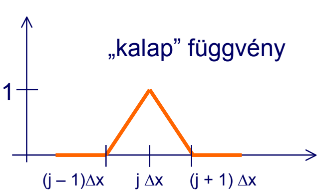
- N db egyenletből álló rendszert kapunk N db ismeretlenre (u_j)

Bázisfüggvények

Milyenek a $\varphi_j(x)$ bázisfüggvények?

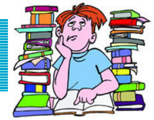
Spektrális módszer

- A bázisfüggvények maguk is ortogonális rendszert alkotnak
- Pl. trigonometrikus (sin, cos) függvények



Véges elem módszer

- A bázisfüggvények egy kis tartománytól eltekintve nullával egyenlők – lokális bázisfüggvények
- Azon a tartományon, ahol ezek értéke nem nulla, alacsonyrendű polinomokat alkalmazunk
- Pl. „kalap" függvények (hullám-megoldás miatt)



Példa spektrális módszerre

- Legyen

$$L(u) = f(x) \qquad 0 \le x \le \pi$$

$$L = \frac{d^2}{dx^2}$$

- Valamint legyen

$$u(0) = u(\pi) = 0$$

$$\varphi_j = \sin(jx) \qquad j = 1, \dots, N$$

$$u_i = -\frac{2}{i^2 \pi} \int_0^{\pi} \varphi_i f(x) dx$$

Az együtthatók arányosak a kényszer Fourier transzformáltjával

Példa véges elem módszerre

- Legyen:

$$L(u) = f(x) \qquad 0 \le x \le \pi$$

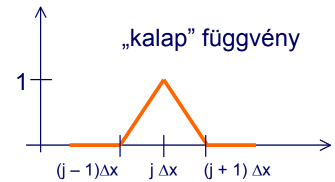
$$L = \frac{d^2}{dx^2}$$

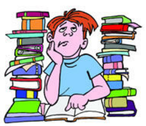
$$\boxed{u(x) \approx \sum_{j=1}^{N} u_j \varphi_j(x)}$$

- Valamint legyen

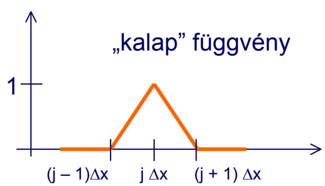
$$u(0) = u(\pi) = 0$$

$$\varphi_j \quad \text{"kalap" fv.}$$





- A $\varphi_j(x)$ függvények alakja:



$$\varphi_j(x) = \begin{cases} 0 & ha \quad x < (j-1)\Delta x \\ 0 & ha \quad x > (j+1)\Delta x \\ \dfrac{x-(j-1)\Delta x}{\Delta x} & ha \quad (j-1)\Delta x \le x \le j\Delta x \\ \dfrac{-x+(j+1)\Delta x}{\Delta x} & ha \quad j\Delta x \le x \le (j+1)\Delta x \end{cases}$$

- A $\varphi_j(x)$ függvények x-szerinti deriváltja:

$$\frac{d\varphi_j}{dx} = \begin{cases} 0 & ha \quad x < (j-1)\Delta x \\ 0 & ha \quad x > (j+1)\Delta x \\ \dfrac{1}{\Delta x} & ha \quad (j-1)\Delta x \le x \le j\Delta x \\ -\dfrac{1}{\Delta x} & ha \quad j\Delta x \le x \le (j+1)\Delta x \end{cases}$$

$$\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{\Delta x^2} = \frac{f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1}}{6}$$

$$\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{\Delta x^2} = f_i$$

Véges különbséges alak (a véges elem pontosabb)

Többdimenziós eset

- Barotróp örvényességi egyenlet:

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\psi + k\times\nabla\psi\cdot\nabla(\nabla^2\psi)+\beta\frac{\partial\psi}{\partial x}=0$$

ahol ψ az áramfüggvény.

- Tekintsünk biperiodikus mezőket, valamint a következő ortogonális bázisfüggvényeket – teljes harmonikus függvények:

$$\varphi_{mn}(x,y)=e^{i(mkx+nly)} \qquad k=\frac{2\pi}{L_x} \quad és \quad l=\frac{2\pi}{L_y}$$

- Ekkor a ψ függvény a következő módon közelíthető:

$$\psi(x,y,t)\approx\sum_{m=-M}^{M}\sum_{n=-N}^{N}C_{mn}(t)e^{imkx}e^{inly}$$

ahol $C_{mn}(t)$ spektrális együtthatók

- Legyen

$$M=mki+nlj$$
$$R=xi+yj$$

- Ekkor $\psi(x,y,t)\approx\sum_{M}C_M(t)e^{iMR}$

- Írjuk fel az egyenlet különböző tagjait:

$$\psi\approx\sum_M C_M(t)e^{iMR}$$
$$\nabla^2\psi\approx-\sum_M(MM)C_Me^{iMR}$$
$$\nabla\psi\approx\sum_H iHC_He^{iHR}$$
$$\nabla(\nabla^2\psi)\approx-\sum_L iL(LL)C_Le^{iLR}$$

- Ezeket kell behelyettesíteni az eredeti egyenletbe $\Rightarrow$ nagyon bonyolult alakot kapunk!

- Ezeket kell behelyettesíteni az eredeti egyenletbe $\Rightarrow$ nagyon bonyolult alakot kapunk!

$$\frac{dC_M}{dt}=\frac{imk\beta C_M}{MM}+\sum_H\frac{(M-H)(M-H)kH\mathrm{x}(M-H)}{MM}C_{M-H}C_H$$

- A jobb oldali tag különböző hullámok kölcsönhatását írja le (a nemlineáris advekciós tag kifejtésével)

$\rightarrow$ **Transzformációs módszer (lásd később)**

A spektrális módszer előnyei:

- a derivált meghatározása a K csonkítási értékig teljesen pontos és egyszerű (hiszen analitikusan deriválható függvényeket kell deriválnunk, pl. sin, cos)
- egy megfelelően „sima” függvény esetében a megoldandó egyenletek száma lényegesen kevesebb, mint a véges különbséges módszer esetén

Ugyanakkor:

- Egyes műveletek (pl. két függvény szorzata) bonyolulttá válhatnak vagy számítási igényük nő meg
- Ilyen esetekben célszerű a számításokat a **spektrális tér** helyett a **fizikai térben** (azaz a rácsponti térben) végezni

➡ A meteorológiában a spektrális módszer alkalmazása azokra a műveletekre szorítkozik, ahol térbeli (azon belül is a horizontális) deriváltak kiszámítására van szükség

Transzformációs módszer

- A spektrális modellekben a spektrál-technika alkalmazása a horizontális differenciál operátorok kiszámítására és az azokkal végzett **lineáris műveletekre** korlátozódik.
- Minden egyéb számítás (pl. fizikai parametrizáció, nemlineáris dinamika) továbbra is a rácsponti térben történik.
- A két tér között **transzformációs módszer** segítségével teremtenek kapcsolatot

Mi a spektrális tér?

- A spektrális modellekben az állapothatározókat a választott bázisfüggvény-rendszer szerint sorba fejtik
- Azaz a spektráltérben a különböző hullámszámhoz tartozó **spektrális együtthatókat** tárolják

A rácsponti térben a változók rácspontbeli értékeit tárolják

Mivel a két tér között minden időlépésben szükséges az áttérés, ezért lényeges a transzformációs módszer hatékonysága

Ezek alapján egy spektrális modell végrehajtásának **fő lépései**:

1. Direkt transzformáció, pl. gyors-Fourier transzformáció (direkt FFT) alkalmazásával: sorfejtés alkalmazása az állapotváltozókra
2. Számítások a spektrális térben: lineáris operátorok alkalmazása a spektrális állapotvektorra (pl. differenciál-operátorok számítása, szemi-implicit séma)
3. A horizontális deriváltakkal kiegészített állapotvektor inverz transzformációja a spektrális térből a rácsponti térbe, pl. inverz gyors-Fourier transzformáció (inverz FFT) alkalmazásával
4. Nemlineáris tagok kiszámítása a rácsponti térben

- A spektrális módszer alkalmazása:
  - definiálni kell egy rácsot („transform grid”)
  - a nemlineáris tagokat ebben a rácsponti térben kezelik
  - a deriváltakat a spektrális térben számítják
- A spektrális modellt általában a **csonkítási** hullámszámmal (pl. ECMWF: T799, lásd később), vagy a kapcsolódó rács (a „transform grid”) rácstávolságával jellemzik (ALADIN: 8km)
- Ez utóbbi (rácstávolság) szemléletesebb számunkra, de a spektrális és a véges különbséges módszerek korrekt összehasonlítása az lenne, ha a még leírható legkisebb jelenség méretét adnánk meg

Csonkítás

- Csonkítás

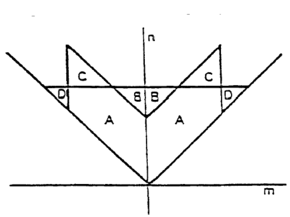
$$\sum_{n=1}^{N}\ldots \qquad N=?$$

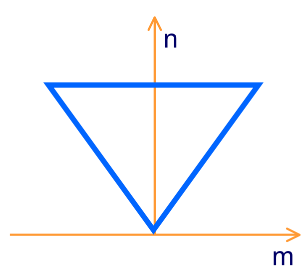
- Kis n értékek $\Rightarrow$ nagy hullámhosszok
- Nagy n értékek $\Rightarrow$ kis hullámhosszok
- Minél nagyobb N értéke, annál pontosabban határozhatjuk meg a keresett mennyiségeket, de annál nagyobb a számításigény is
- A csonkítással elveszhet információ a rácsponti és a spektrális tér közötti transzformációnál

- Csonkítás
  - **Globális modelleknél: háromszög alakú, romboidális** (szélességi körök „rövidülése”)

$$X(\lambda,\mu) = \sum_{m=-M}^{M}\sum_{n=|m|}^{N} X_n^m\, P_n^m(\mu)\, \exp[im\lambda]$$

- M=? N=?
- m és n közötti kapcsolat





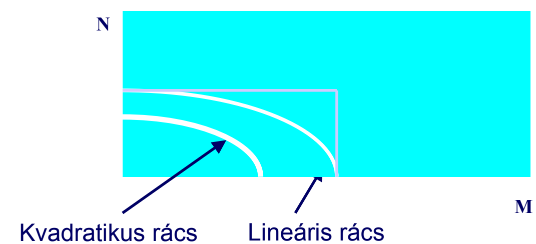
Trianguláris csonkítás (pl. T799)

- Csonkítás
  - **Korlátos tartományú (regionális) modelleknél: elliptikus (téglalap alakú)**

$$\psi(x,y,t)\approx\sum_{m=-M}^{M}\sum_{n=-N}^{N} C_{mn}(t)e^{imkx}e^{inly}$$

- M=? N=?
- m és n közötti kapcsolat

$$\frac{n^2}{N^2}+\frac{m^2}{M^2}\le 1$$



Megjegyzés: téglalap alakú csonkításnál teljesen pontos a spektrális tér és a rácspont tér közötti transzformáció

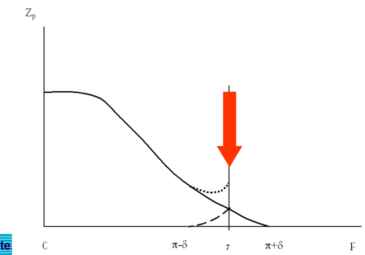
Aliasing (nem-lineáris instabilitás)

- Adott egy Δx felbontású rács
- Ez legjobb esetben is csak egy $2\Delta x$ hullámhosszú hullámot tud leírni, azaz a valós, **fizikai felbontás nem Δx, hanem $2\Delta x$**.
- Tehát a $2\Delta x$-nél kisebb hullámhosszú hullámok zajként jelennek meg...

- Ráadásul, ha vannak nem-lineáris tagok is:

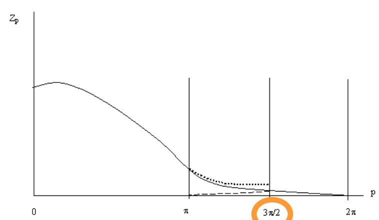
$$Q(x,y)=\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} Q_{mn} e^{imkx} e^{inly} \qquad Q_1(x,y) \times Q_2(x,y)$$

- Ekkor M-nél (N-nél) nagyobb hullámszámra is keletkezik információ, azaz még kevesebb hullám leírására van lehetőség
- Ezek a hullámok zajként jelennek meg tehát és energiájuk hatással van az amúgy jól leírt hullámok energiájára – főként a legrövidebb hullámoknál okoz gondot
- Philips kísérlete (1957): stabilitási kritériumot kielégítő időlépcső, mégis „instabil” modellkísérlet



- A spektrális módszernél ez könnyen kiküszöbölhető, ha 2M+1 rácspont helyett több pontot definiálunk adott számú hullámhoz (túlcsonkítás):

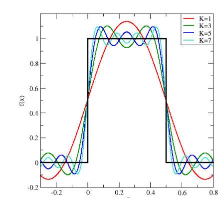
$$J \geq (4)3M+1$$
$$K \geq (4)3N+1$$

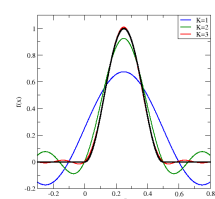


  – A szemi-Lagrange kezelés esetében „nincs gond” az advekciós tagokkal, azaz az ebből adódó instabilitást sem kell kezelni, nem is kell túlcsonkítani (marad a „lineáris rács”, azaz a rácspontok száma kétszerese a hullámok számának).
- Vannak egyéb olyan numerikus sémák is, amelyek csillapítják a rövidhullámokat

Gibbs oszcilláció

- „Simább” függvény esetében már kisebb K értékre is viszonylag pontos közelítést kapunk
- Az erős gradiensű helyek közelében oszcillációt tapasztalunk (ún. Gibbs oszcilláció)
- Az oszcilláció erőssége függ magától a folytonos függvénytől
- Különösen zavaró olyan függvények esetében, ahol erős gradiensek léphetnek fel, de fizikai okokból a függvény értékének mindig pozitívnak kell maradnia (pl. domborzat)





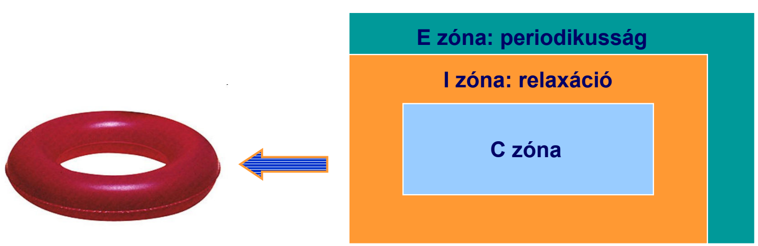
Összefoglalás: előnyök, hátrányok

- A hidro-termodinamikai egyenletrendszerben szereplő deriváltak pontosan (analitikusan) számolhatóak
- A nem-lineáris tagoknál az aliasing (nem-lineáris instabilitás) megfelelő túlcsonkítással elkerülhető
- A spektrális együtthatók száma kisebb, mint a rácspontok száma (gazdaságosabb tárolás)
- A globális modelleknél nincs pólus probléma
- A szemi-implicit séma Helmholtz-egyenletének megoldása triviális a spektrális módszernél

DE:

- A sémák bonyolultak lehetnek
- A műveletek száma a felbontás növekedésével gyorsabban növekszik, mint a rácsponti esetben
- A transzformációs módszer nélkül a nemlineáris tagok kiszámolása nagyon költséges
- Erős gradiensű tagoknál oszcilláció, illetve nem reális értékek
- Nehézség **korlátos tartományú esetben** (szférikus harmonikusok nem alkalmazhatóak)

- Fourier-függvények alkalmazása esetén követelmény: periodikusság
- A meteorológiai mezők általában nem periodikusak egy korlátos tartomány felett
- Megoldás: kiterjesztési (E) zóna, ahol a nagyskálájú információkat tesszük periodikussá



Példa véges elem módszerre

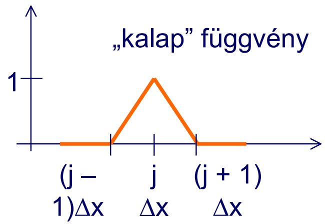
- Tekintsük az 1D lineáris advekciós egyenletet:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

- Oldjuk meg véges elem módszerrel a „kalap" függvényeket alkalmazva!

- Az eredeti egyenlet:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+c\frac{\partial u}{\partial x}=0$$



- A Galjorkin alak:

$$\sum_{j=1}^{N}\frac{du_j}{dt}\int_0^{\pi}\varphi_i\varphi_j dx+c\sum_{j=1}^{N}u_j\int_0^{\pi}\varphi_i\frac{d\varphi_j}{dx}dx=0$$

$$\frac{1}{12\Delta t}(u_{m+1,n+1}-u_{m+1,n-1}+4(u_{m,n+1}-u_{m,n-1})+u_{m-1,n+1}-u_{m-1,n-1})+\frac{c}{2\Delta x}(u_{m+1,n}-u_{m-1,n})=0$$

Példa spektrális módszerre

- Tekintsük az 1D lineáris advekciós egyenletet:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t}+\gamma\frac{\partial \omega}{\partial \lambda}=0$$

γ: szögsebesség
λ: földrajzi hosszúság

- Határfeltétel:

$$\omega(\lambda,t)=\omega(\lambda+2p\pi,t) \qquad p\in N$$

- Kezdeti feltétel: $\omega(\lambda,0)=f(\lambda)$

- A megoldást a következő alakban keressük:

$$\omega(\lambda,t)=\sum_{m=-M}^{M}\omega_m(t)e^{im\lambda}$$

- Használjuk fel, hogy:

$$f(\lambda)=\sum_{m=-M}^{M}f_m e^{im\lambda}$$

$$\omega(\lambda,t)=\sum_{m=-M}^{M}\omega_0 e^{im(\lambda-\gamma t)}$$