

Közelítő módszerek általános elmélete

Szépszó Gabriella
szepszo.g@met.hu

Előadások: <http://nimbus.elte.hu/~numelo>

Ismétlés: hidro-termodinamikai egyenletek

A légkörben zajló folyamatok fizikai törvényeknek engedelmeskednek, pl. Newton-törvények, energia-megmaradás, tömeg-megmaradás

Mozgásegyenletek	$\frac{d\bar{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \bar{g} - 2\bar{\Omega} \times \bar{v} + \bar{F} + \bar{S}$
Kontinuitási egyenlet	$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \cdot \text{div} \bar{v}$
Termodinamikai egyenlet	$\frac{dQ}{dt} = c_p \frac{dT}{dt} - \alpha \frac{dp}{dt}$
Nedvesség kontinuitási egyenlete	$\frac{dq}{dt} = -\frac{1}{\rho} \cdot M$
Állapotegyenlet	$p = \rho RT$

Nemlineáris parciális differenciálegyenlet-rendszer:
 7 egyenlet – 7 változó: (u,v,w), T, p, ρ, ρ_v

Példák az egyenletek egyszerűsítésére

- Gömbi közelítés
- A légkör vastagságának elhanyagolása
- Hidrosztatikus közelítés
- Vízgőz hatásának elhanyagolása a levegő sűrűségében

ANALITIKUSAN TOVÁBBRA SEM OLDHATÓ MEG!
 → Analitikus megoldás hiányában numerikus módszerek

Sekélyvíz (shallow water) egyenletek

A folyadék vertikális kiterjedése elhanyagolható a horizontálishoz képest, vertikálisan homogén, összenyomhatatlan, súrlódásmentes forgó közeg:

Horizontális mozgásegyenletek:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - f \cdot v$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + f \cdot u$$

Hidrosztatikus közelítés: $\frac{dw}{dt} = 0 \rightarrow \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho \cdot g$

Divergencia-mentesség: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$



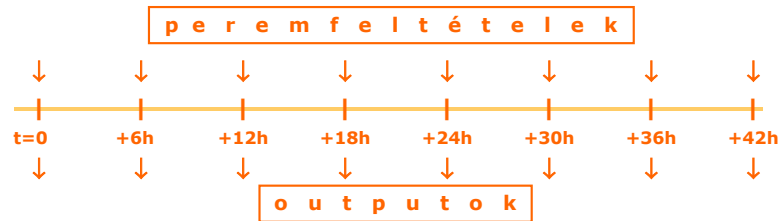
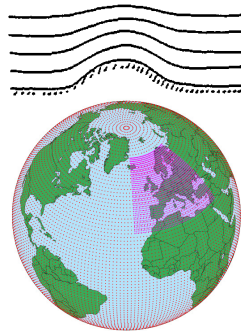
$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -g \frac{\partial h}{\partial x} + f \cdot v$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -g \frac{\partial h}{\partial y} - f \cdot u$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} = -h \cdot D$$

Térbeli és időbeli diszkretizáció

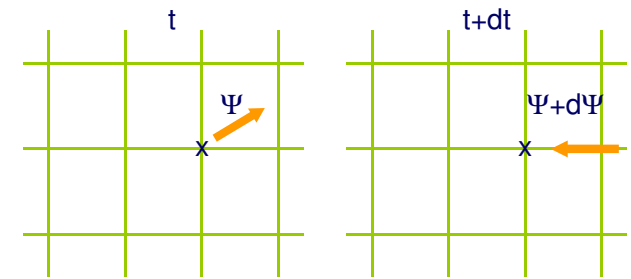
- Horizontális koordináták (gömbi koordináták, síkbeli leképezések)
- Véges differencia modellek (rácsok)
- Spektrális modellek (horizontális irányban ortogonális fgv. rendszer szerinti sorfejtés)
- Vertikális koordináták (felszínkövető, nyomási, hibrid..)
- Explicit, implicit és egyéb sémák



Euleri és Lagrange-i szemlélet

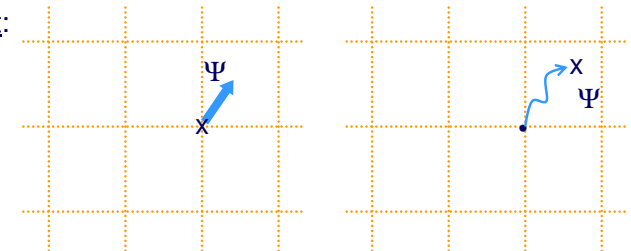
Euler-szemlélet:
rögzített rács

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + c \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0$$



Lagrange-szemlélet:
a folyadékelem követése

$$\frac{d\Psi}{dt} = 0$$



Vizsgálandó egyenletek

1D lineáris advekción egyenlet: $\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -g \frac{\partial h}{\partial x} + f \cdot v \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -g \frac{\partial h}{\partial y} - f \cdot u \end{aligned}$$

Gravitációs-hullám tagokat tartalmazó egyenlet:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial t} + H \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} = -h \cdot D$$

Lineáris advekción + gravitációs-hullám tagokat tartalmazó egyenlet:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial t} + u_0 \frac{\partial h}{\partial x} + H \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

Közelítendő operátorok

Időbeli deriváltak: $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial t}$

Térbeli deriváltak: $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial x}$

Folytonos feladat

Tekintsük a következő (t.f.h. korrekt kitűzésű) feladatot:

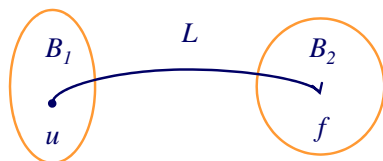
$$Lu = f,$$

$$u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n \in B_1, f \in B_2,$$

B_1, B_2 Banach - terek,

$L : B_1 \rightarrow B_2$ lineáris,

$$D(L) \subset B_1, R(L) \subset B_2.$$



A közelítő megoldásra kétféle módszer-család:

- 1.) Véges-differencia módszer (hamarosan)
- 2.) Projekciós-variációs módszerek, pl. Galjorkin módszer (később)

9

Alapfogalmak

„Közelség” $y = Ax$ pl. $y = \int_a^b x(t)dt$

Közelítés: a) x bemenő adatot közelítjük
pl. $x(t)$ polinomokkal, Fourier-sorral való közelítése (spektrális közelítés)

b) az A operátort közelítjük
pl. $\int \rightarrow \sum$
(véges differenciák)

10

Metrikus és normált terek

Metrikus tér

$$X; \rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$$

- $\rho(x_1, x_2) \geq 0$,
- $\rho(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$,
- $\rho(x_1, x_2) = \rho(x_2, x_1)$,
- $\rho(x_1, x_3) \leq \rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, x_3)$.

Teljes metrikus tér

Normált tér

$$X; \| \cdot \| : X \rightarrow \mathbb{R}^+$$

- $\|x\| \geq 0$,
- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$,
- $\|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\|$.

Banach tér

11

Normák

Példák: a) $R : \|x\| = |x|$,

b) $C[a, b]$ tér : $\|x\|_C = \max_{t \in [a, b]} |x(t)|$,

c) L_p tér : $\|x\|_{L_p} = \left[\int_a^b |x(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} \longrightarrow$ Hilbert-tér

Reláció ezen normák között: $\|x(t)\|_{L_1} \leq \|x(t)\|_{L_2} \leq \dots \leq \|x(t)\|_C$



A konvergencia iránya

Mátrix-normák:

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|, \quad \|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \quad \|A\| = \sup_{\vec{v} \neq 0} \frac{\|A \cdot \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}.$$

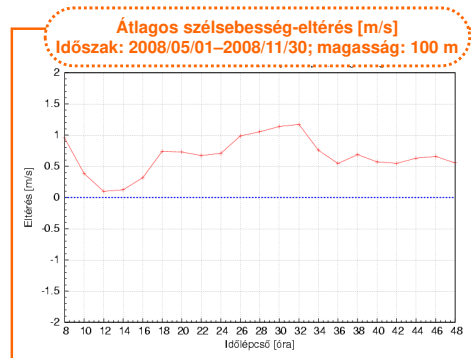
12

Hibák

• A numerikus modell megoldása során jelentkező hibák forrása:

1. A matematikai modell hibája
2. Kiindulási adatok hibája
3. Közelítő módszer hibája
4. Kerekítések során fellépő hiba

Szisztematikus hiba



Korrekttség

Korrekttség = egzisztencia + unicitás + stabilitás

Belső tulajdonság!

Bemenő adat: $x + \delta x$

Ehhez tartozó megoldás: $y + \delta y = A(x + \delta x)$

$$\delta y = A(x + \delta x) - A(x)$$

Példa nem korrekt feladatra:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x, 0) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = \varphi(x) \end{cases}$$

→ bemenő

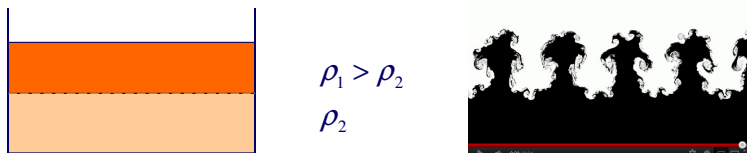
Hogyan függ a megoldás a bemenő adatoktól?

Stabilitás

$\varphi(x) = 0 \rightarrow u(x, y) = 0$ triviális megoldás

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{n} \cos(nx) \rightarrow u_n(x, y) = \frac{1}{n^2} \cos(nx) \frac{e^{ny} - e^{-ny}}{2}$$

A feladat a Rayleigh-Taylor instabilitást modellezi:



$$\rho_1 > \rho_2$$

$$\rho_2$$

<http://www.youtube.com/watch?v=QLMfu8p-EAc>

Stabilitás: y megoldás stabil, ha y folytonosan függ x -től.

Kezdeti kis δx -ből nagy $\delta y \rightarrow$ instabilitás – ekkor a feladat közvetlen megoldására nem célszerű numerikus módszert alkalmazni

Stabil: $\|\delta y\| < c \cdot \|\delta x\|$, ha $c \ll 1 \rightarrow$ ellenkező esetben a kezdeti hiba nagyon megnövekedhet (**gyenge stabilitás**)

Például:

$$\begin{cases} y''(x) = y(x) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

Általános megoldás:

$$y(x) = \frac{1}{2} [y(0) + y'(0)] \cdot e^x + \frac{1}{2} [y(0) - y'(0)] \cdot e^{-x}$$

Ezekkel a kezdeti feltételekkel:

$$y(x) = e^{-x}$$

De kis hiba a kezdeti feltételekben és a másik tag is megjelenik.

A nem korrekt feladat helyettesíthető korrekt „közele” feladattal: p paraméterrel, $p \rightarrow 0$ esetén a feladat tart az eredeti feladathoz és a megoldás is tart az eredeti megoldáshoz – **regularizáció**

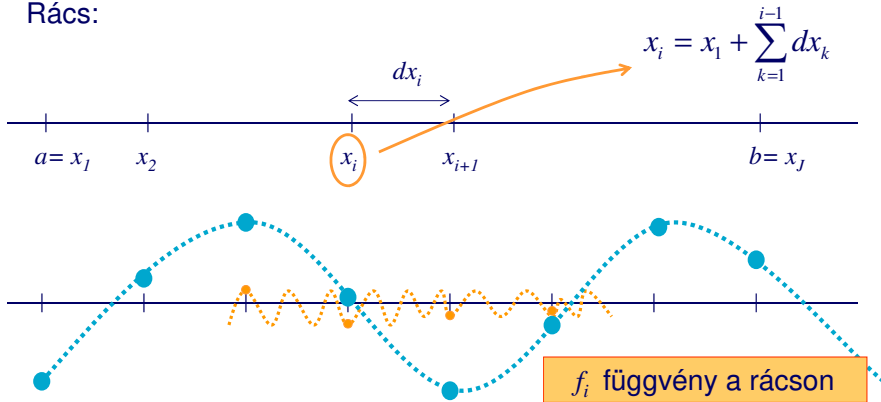
Függvények rácson

$$X = [a, b]$$



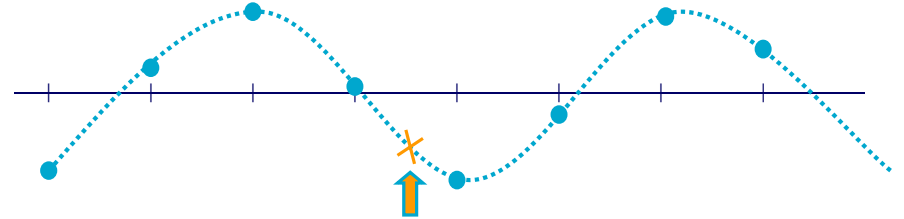
$f(x)$ folytonos függvény

Rács:



A rácson a dx_i -nél rövidebb hullámhosszak nem írhatók le.

$f(x)$ folytonos függvény, f_i függvény a rácson:



A folytonos f függvény adott pontban becsülhető:

$$f^* = \varepsilon \cdot f_{i+1} + (1 - \varepsilon) f_i, \text{ ahol } \varepsilon = \frac{x' - x_i}{x_{i+1} - x_i}$$

A rácson a dx_i -nél rövidebb hullámhosszak nem írhatók le. A közelítés jóságát például Taylor-sorfejtéssel vizsgálhatjuk.

Véges differencia módszerek

$$Lu = f \quad u \in B_1, f \in B_2.$$

A véges differencia séma megadásának lépései:

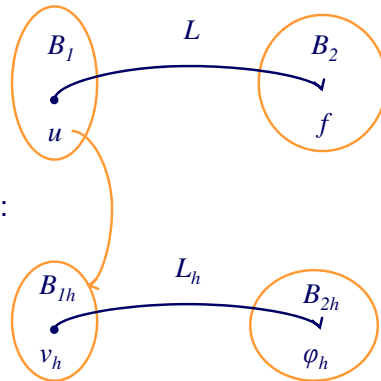
1.) Normált terek sorozatának megadása:

$$B_{1h}, B_{2h} \Rightarrow \|h\| \rightarrow 0.$$

2.) Véges differencia séma megadása:

$$L_h v_h = \varphi_h, v_h \in B_{1h}, \varphi_h \in B_{2h}, L_h : B_{1h} \rightarrow B_{2h}$$

3.) B_1 és B_{1h} elemeinek összehasonlítása



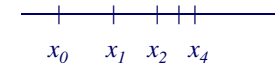
Példák rácusra:

1.) Egyenletes rácson: $\Omega = \{a \leq x \leq b\}, x_i = a + i \cdot h, h = \frac{b-a}{n}$

$$\Omega_h = \left\{ x_i : x_i = a + i \cdot h; h = \frac{b-a}{n}; i = 0, n \right\}$$

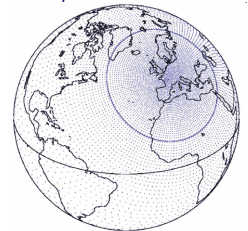
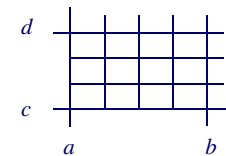
2.) Nem egyenletes rácson:

$$x_0 = a, x_i = x_{i-1} + h_i, x_n = b$$

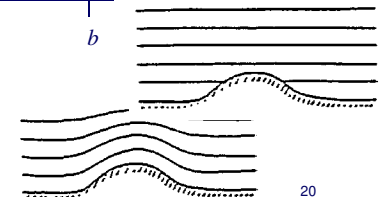
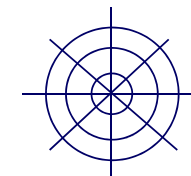


3.) Egyenletes rácson síkon:

$$\Omega = \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$



4.) Izometrikus rácson:



Elvárt / vizsgált tulajdonságok

- Kompatibilitás
- Korrekt kitűzés (stabilitás)
- Approximáció, konzisztencia
- Konvergencia

21

Kompatibilitás

Minden h -hoz létezzon egy $P_{1h} : B_1 \rightarrow B_{1h}$ lineáris operátor, amelyre $P_{1h}u = u_h \in B_{1h}$ és legyenek $\|\cdot\|_1$ valamint $\|\cdot\|_{1h}$ és teljesüljön menderre a kompatibilitási feltétel:

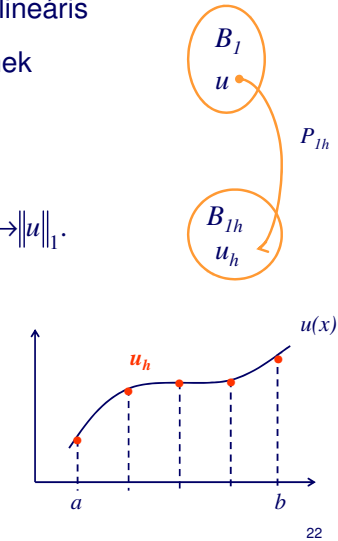
$$\forall u \text{-ra } \|P_{1h}u\|_{1h} \xrightarrow{\|h\| \rightarrow 0} \|u\|_1.$$

Példa:

$$B_1 = C[a, b], u \in B_1 \rightarrow \|u\|_C = \max_{x \in [a, b]} |u(x)|.$$

$$\text{Legyen } P_h(u) = u_h = u \quad \forall x \in \Omega_h,$$

$$\|u_h\|_{C_h} = \max_{x \in \Omega_h} |u(x)|.$$



22

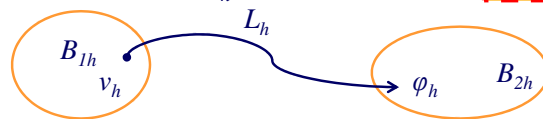
Korrekttség

Korrekttség = egzisztencia + unicitás + stabilitás

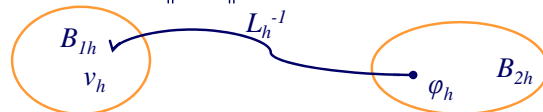
$$(1) + (2) : \forall \varphi_h \in B_{2h} \exists! v_h : L_h v_h = \varphi_h,$$

$$(3) : v_h \text{ folytonosan függ } \varphi_h \text{-től.}$$

Belső tulajdonság!



Tehát: \exists olyan $L_h^{-1} : B_{2h} \rightarrow B_{1h} : v_h = L_h^{-1} \varphi_h$, amely h szerint egyenletesen korlátos $\rightarrow \|L_h^{-1}\| \leq K$.



$$\text{Ekkor : } \|v_h\| = \|L_h^{-1} \varphi_h\| \leq \|L_h^{-1}\| \cdot \|\varphi_h\| \leq K \cdot \|\varphi_h\|$$

23

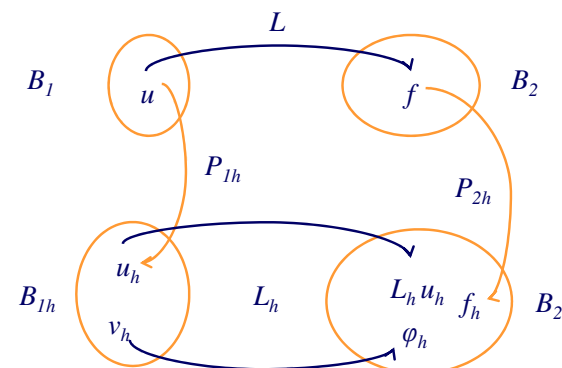
Approximáció

Adottak: $P_{1h} : B_1 \rightarrow B_{1h}, P_{1h}u = u_h,$
 $P_{2h} : B_2 \rightarrow B_{2h}, P_{2h}f = f_h,$

és teljesítik a kompatibilitási feltételt:

$$\|P_{1h}u\|_{1h} \xrightarrow{\|h\| \rightarrow 0} \|u\|_1,$$

$$\|P_{2h}f\|_{2h} \xrightarrow{\|h\| \rightarrow 0} \|f\|_2.$$



24

Definíciók:

1. A véges diff. séma az $u \in B_1$ elemen m -ed rendben approximál, ha

$$\|\Psi_h\|_{2h} := \|\varphi_h - L_h u_h\|_{2h} = o(|h|^m)$$

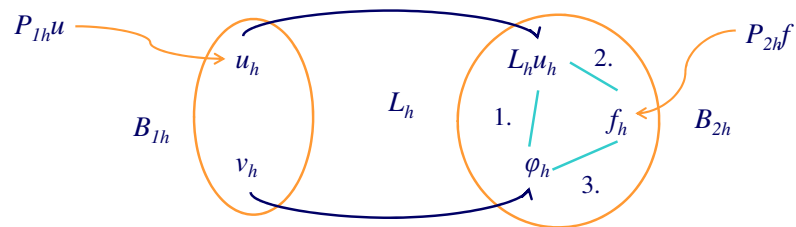
2. Az L_h az L -t m -ed rendben approximálja, ha

$$\forall u \in B_1 \text{-re } \|L_h(P_{1h}u) - P_{2h}(Lu)\|_{2h} = o(|h|^m)$$

Konzisztencia

3. A φ_h az f -et m -ed rendben approximálja, ha

$$\|\varphi_h - P_{2h}f\|_{2h} = o(|h|^m)$$

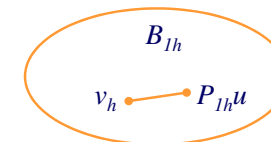


25

Konvergencia

Konvergencia: a véges differencia séma megoldása tart a pontos megoldáshoz, azaz

$$y_h = v_h - P_{1h}u \text{ és } \|y_h\|_h \xrightarrow{|h| \rightarrow 0} 0$$



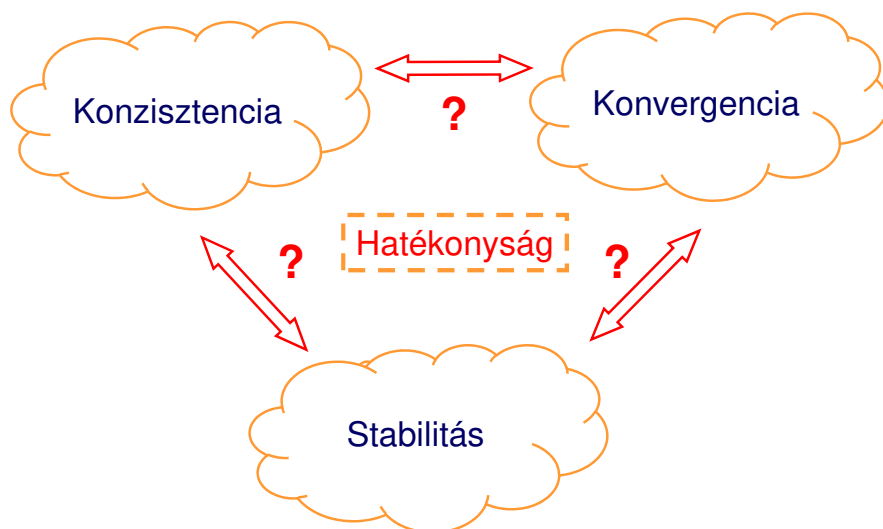
A konvergencia rendje megegyezik az approximáció rendjével:

$$\|y_h\|_{1h} = o(|h|^m) \text{ vagy } \|y_h\|_{1h} \leq K \cdot |h|^m$$

K h -tól független

27

Gyakorlati vizsgálatok



28

Konzisztencia

Konzisztencia: $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$ esetén a véges differencia-feladat tartson az eredeti feladathoz

A gyakorlatban a differenciál- és a differencia-egyenlet különbségét vizsgáljuk.

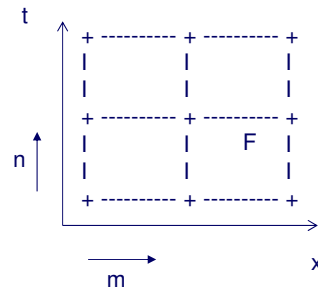
29

Példa: advekcións egyenlet (lineáris 1D)

$$\frac{\partial F}{\partial t} + c \frac{\partial F}{\partial x} = 0.$$

A véges differenciás egyenlet:

$$\frac{F_{m,n+1} - F_{m,n}}{\Delta t} + c \frac{F_{m+1,n} - F_{m-1,n}}{2\Delta x} = 0.$$



A közelítés jósága (konzisztencia rendje) Taylor-sorfejtéssel vizsgálható – csonkítási hiba:

$$Tr = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \cdot \frac{\Delta t}{2} + c \cdot \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} \cdot \frac{\Delta x^2}{6} + o(\Delta x^3) + o(\Delta t^2)$$

↓
elsőrendű ↓
 másodrendű



Stabilitás a gyakorlatban

Stabilitás: a véges differencia séma belső tulajdonsága.

A numerikus megoldás korlátosságát szokták megkövetelni – általában a folytonos feladat megoldása nem korlátos.

Definíció: a numerikus séma hibája rögzített Δt és Δx esetén korlátos marad az időben

ϵ_n : az n -edik időlépcsőben keletkező hiba

$$\epsilon_{n+1} = g \cdot \epsilon_n$$

→ áttérési együttható

Követelmény: $|\epsilon_{n+1}| \leq |\epsilon_n| \Rightarrow |g| \leq 1$ → 1 dimenzióban

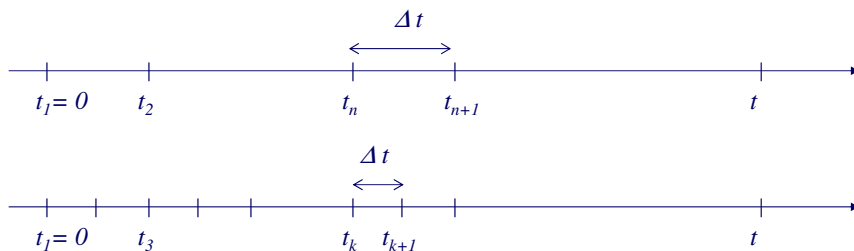
Több dimenzióban g helyett egy mátrix áll és ennek sajátértékeinek kell (abszolútértékben) 1-nél nem nagyobbak lenni: $|\mu_i| \leq 1, i = 1, N.$

Effektivitás

„Perhaps some day in the dim future it will be possible to advance the computations faster than the weather advances and at a cost less than the saving to mankind due to the information gained. But that is a dream.” (L.F. Richardson, 1922)

Hatékonyság:

- A számítógép véges kapacitása által szabott követelmény
- Ha nagy pontosságot szeretnénk, akkor nyilvánvalóan nagy lesz a számítási igény is



Konvergenca

A numerikus séma megoldása tart a pontos megoldáshoz, ha a (térbeli és időbeli) rács felbontása kellően finom.

Lax-Richtmyer tétel:

KONZISZTENCIA + STABILITÁS = KONVERGENCA

↓
egyenletek

↓
belső tulajdonság

↓
megoldás