

Galjorkin módszerek

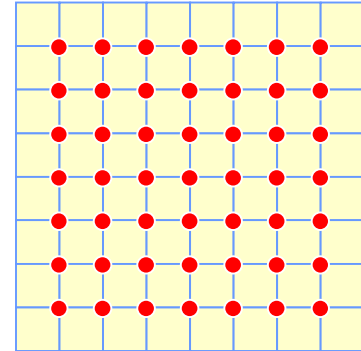
Spektrális módszer

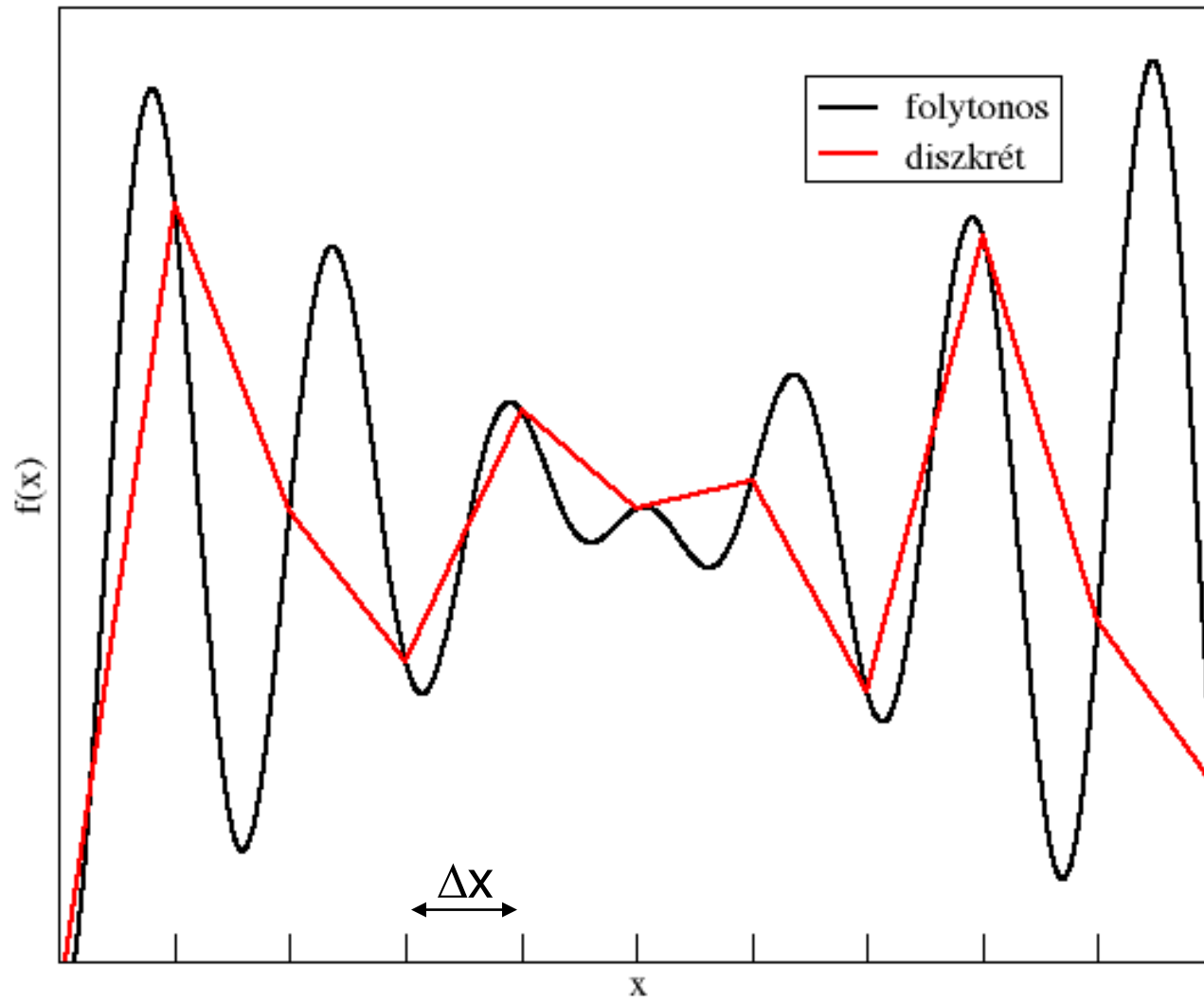
Szépszó Gabriella
szepszo.g@met.hu

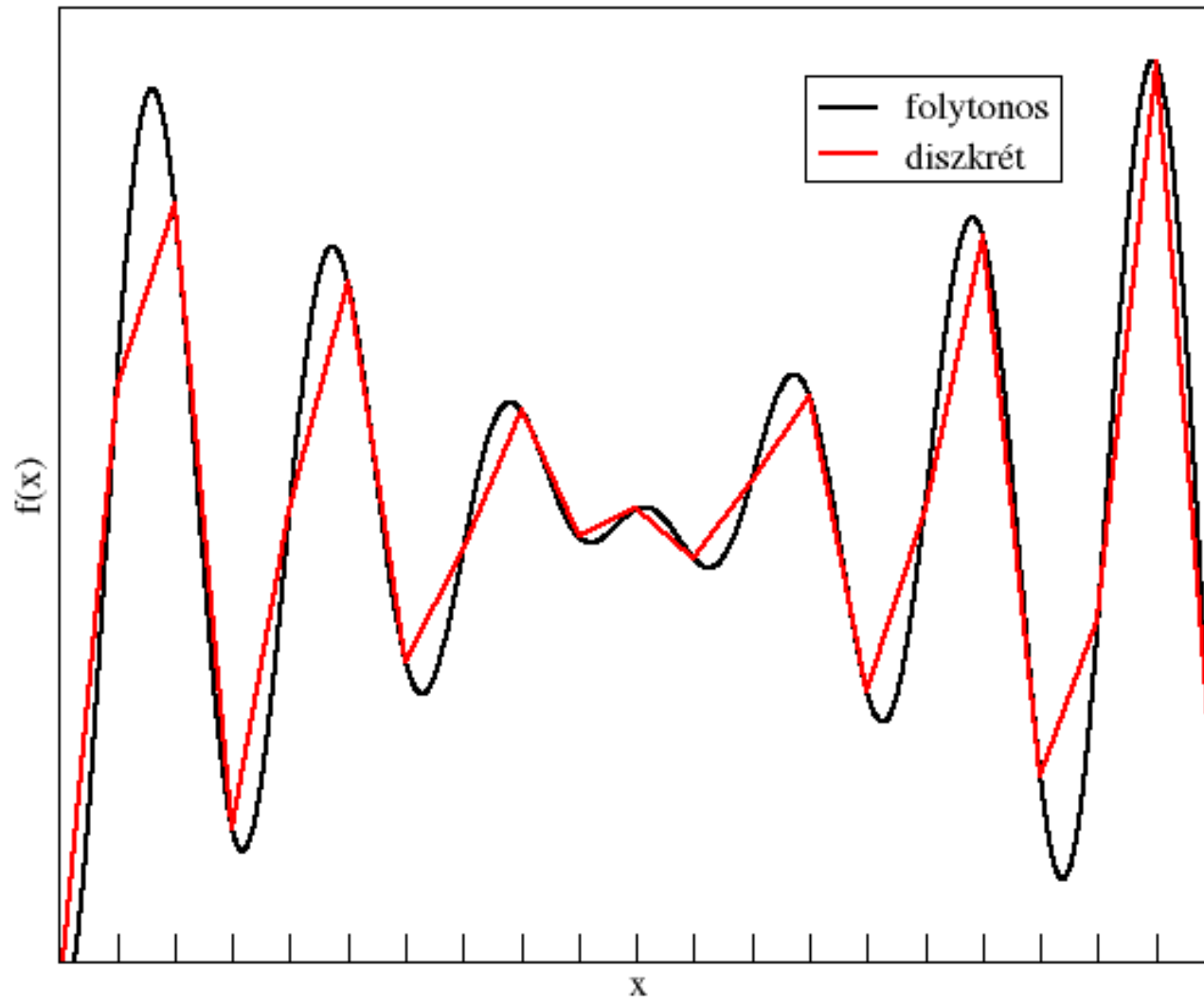
Előadások: <http://nimbus.elte.hu/~numelo>

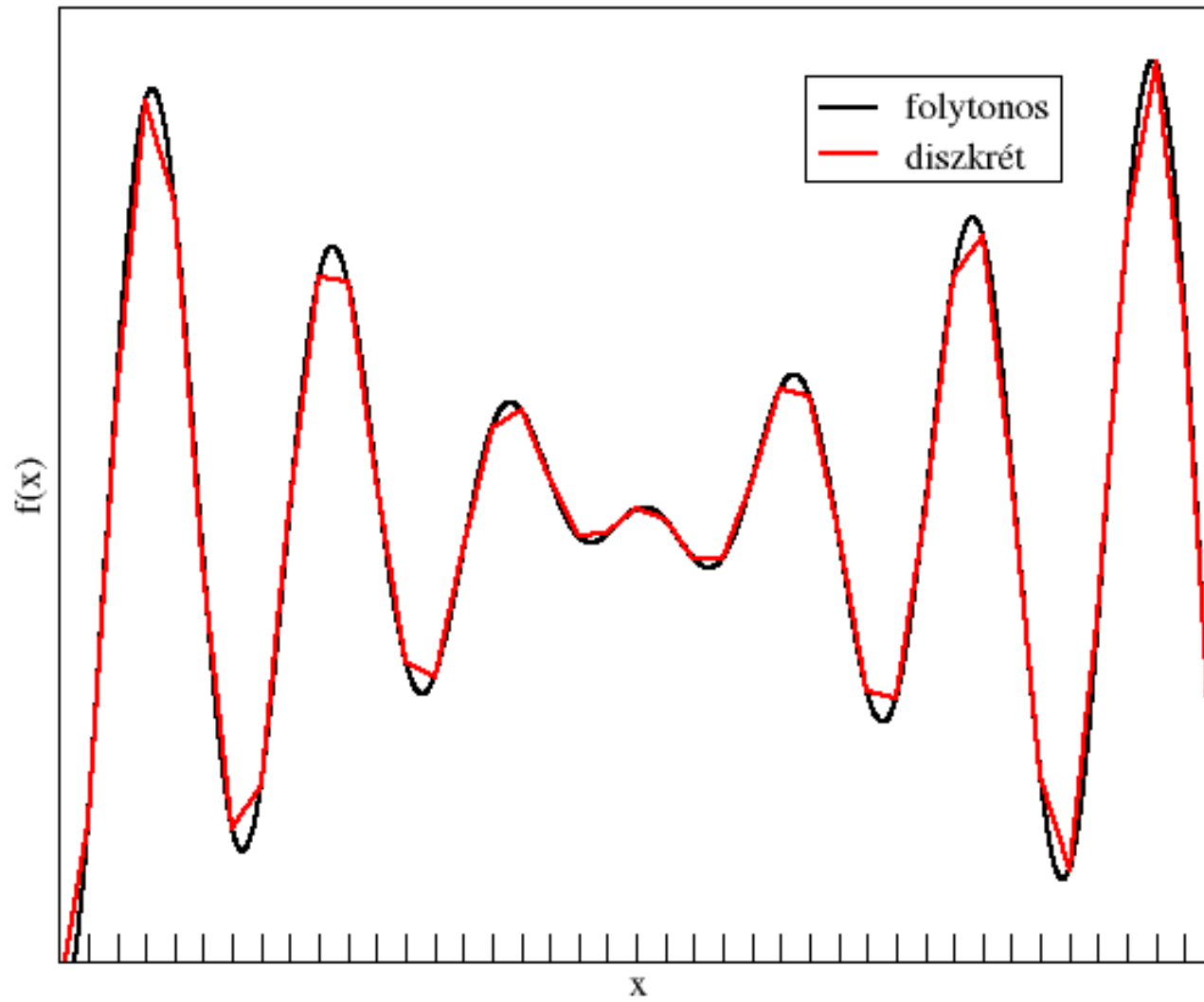
Véges különbséges módszer

- Legyen a vizsgálandó függvény egy egyváltozós függvény: $f=f(x)$
- A $0 \leq x \leq L$ intervallumon vizsgálódunk
- Osszuk fel az intervallumot J darab Δx hosszúságú részre
- Így a függvényünket az $x_j=j\Delta x$ pontokban közelítjük, ahol $j=0, 1, 2, \dots, J$









Galjorkin módszer

- Írjuk fel $f(x)$ -et a következő alakban:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos\left(\frac{2k\pi x}{L}\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi x}{L}\right) \right]$$

ahol

$$a_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{2k\pi x}{L}\right) dx \quad k=0, 1, 2, \dots$$

$$b_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{2k\pi x}{L}\right) dx \quad k=1, 2, \dots$$

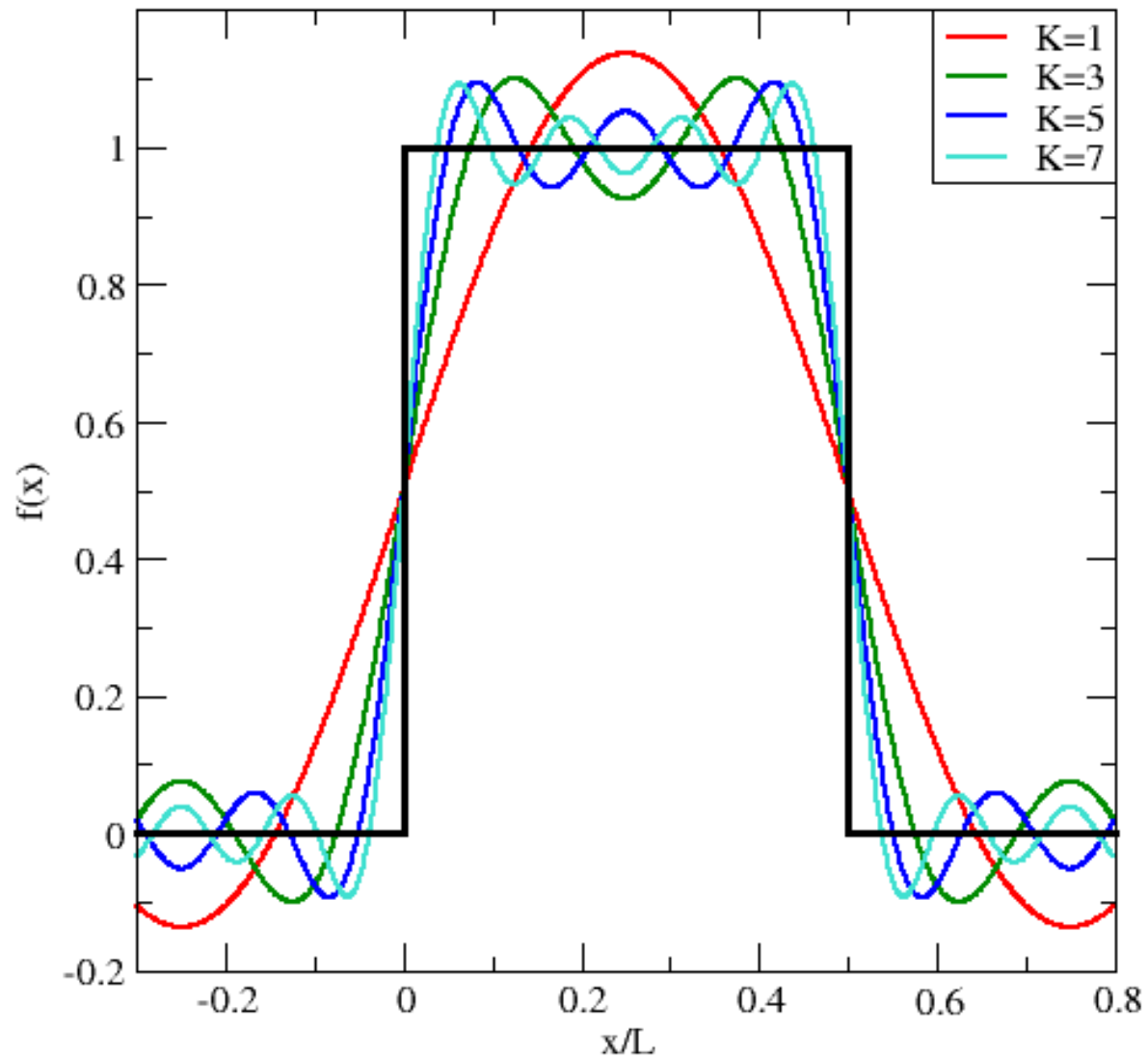
- Természetesen a gyakorlatban **nem tudjuk a képletben szereplő összegzést a végtelenig folytatni**, meg kell állnunk valamilyen véges K értéknél
- Minél nagyobb ez a K érték, annál pontosabban tudjuk közelíteni a függvényt (és ezáltal pontosabb lesz a megoldás is), de annál nagyobb a számításigény is
- Nézzünk erre két példát!
- 1. példa: legyen $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq L/2 \\ 0 & L/2 \leq x \leq L \end{cases}$
- Számítsuk ki a_k és b_k értékeit!

$$a_0 = 1$$

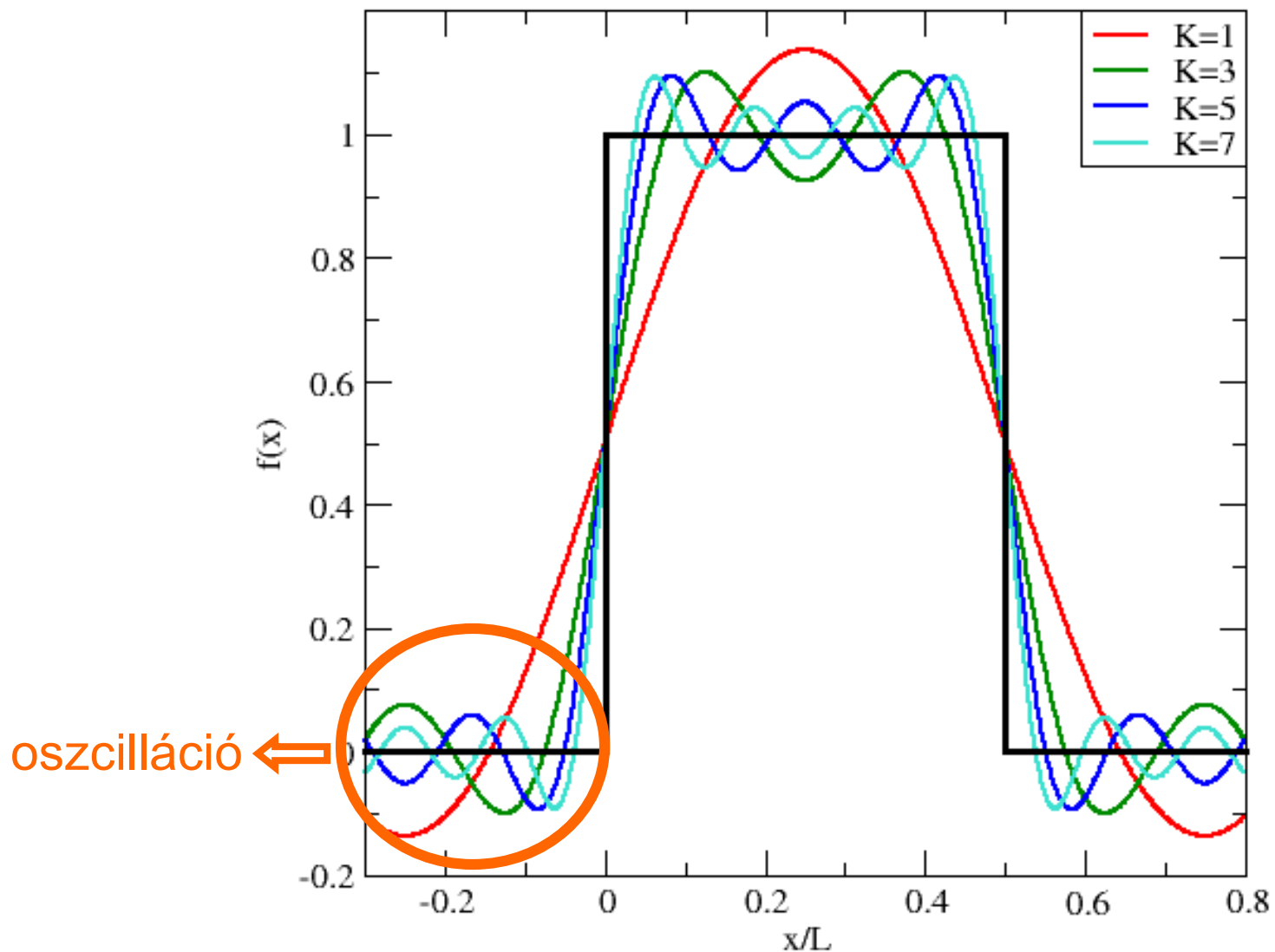
$$a_k = 0 \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

$$b_k = \frac{1}{k\pi} (1 - \cos(k\pi)) \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

K növelésével nő a pontosság:



K növelésével nő a pontosság:



2. példa:

- Legyen

$$f(x) = \begin{cases} \sin^2\left(\frac{2\pi x}{L}\right) & 0 \leq x \leq L/2 \\ 0 & L/2 \leq x \leq L \end{cases}$$

- Kiszámítva a_k és b_k értékeit:

$$a_0 = 1/2$$

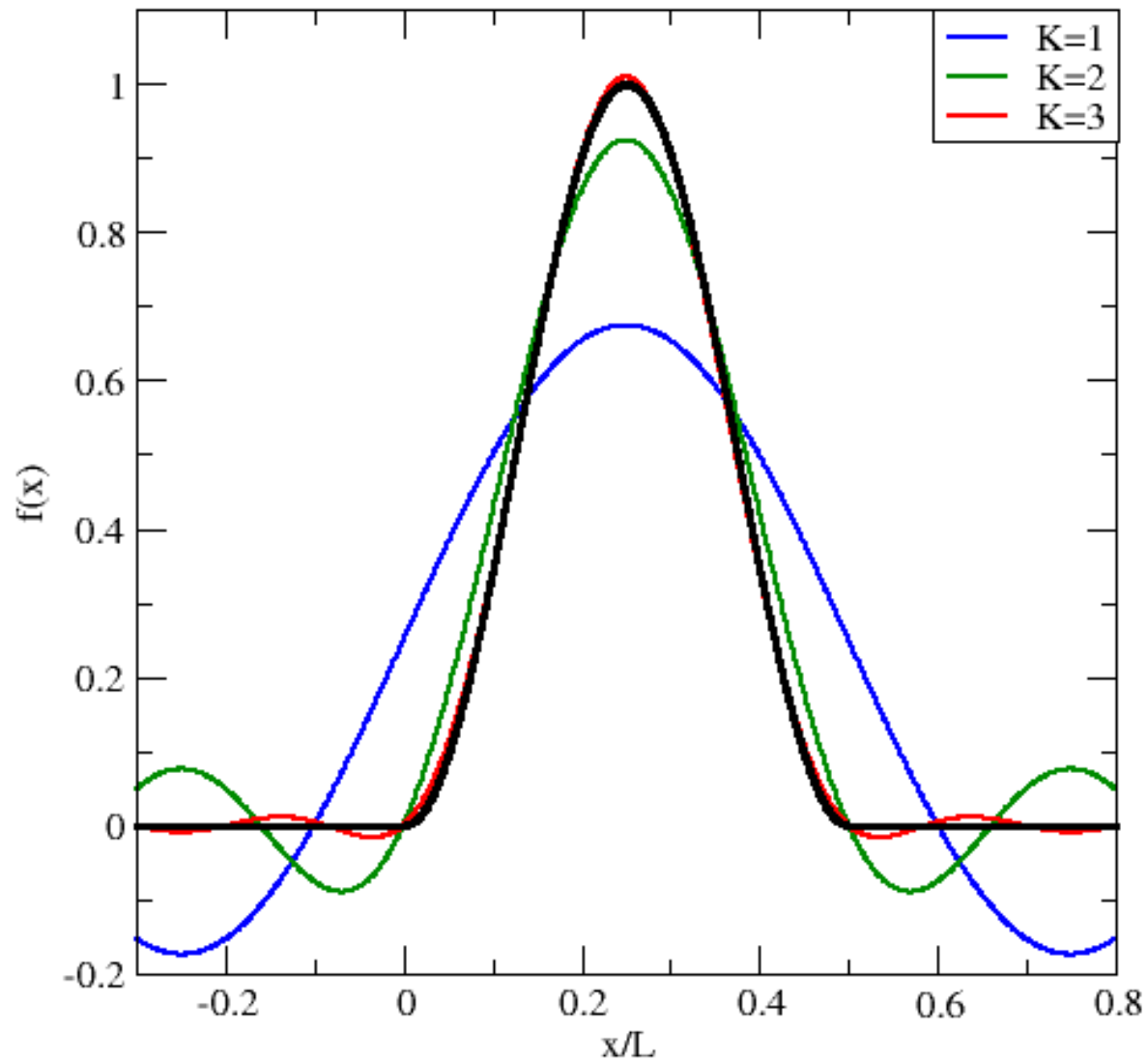
$$a_2 = -1/4$$

$$a_k = 0 \quad k = 1, 3, \dots$$

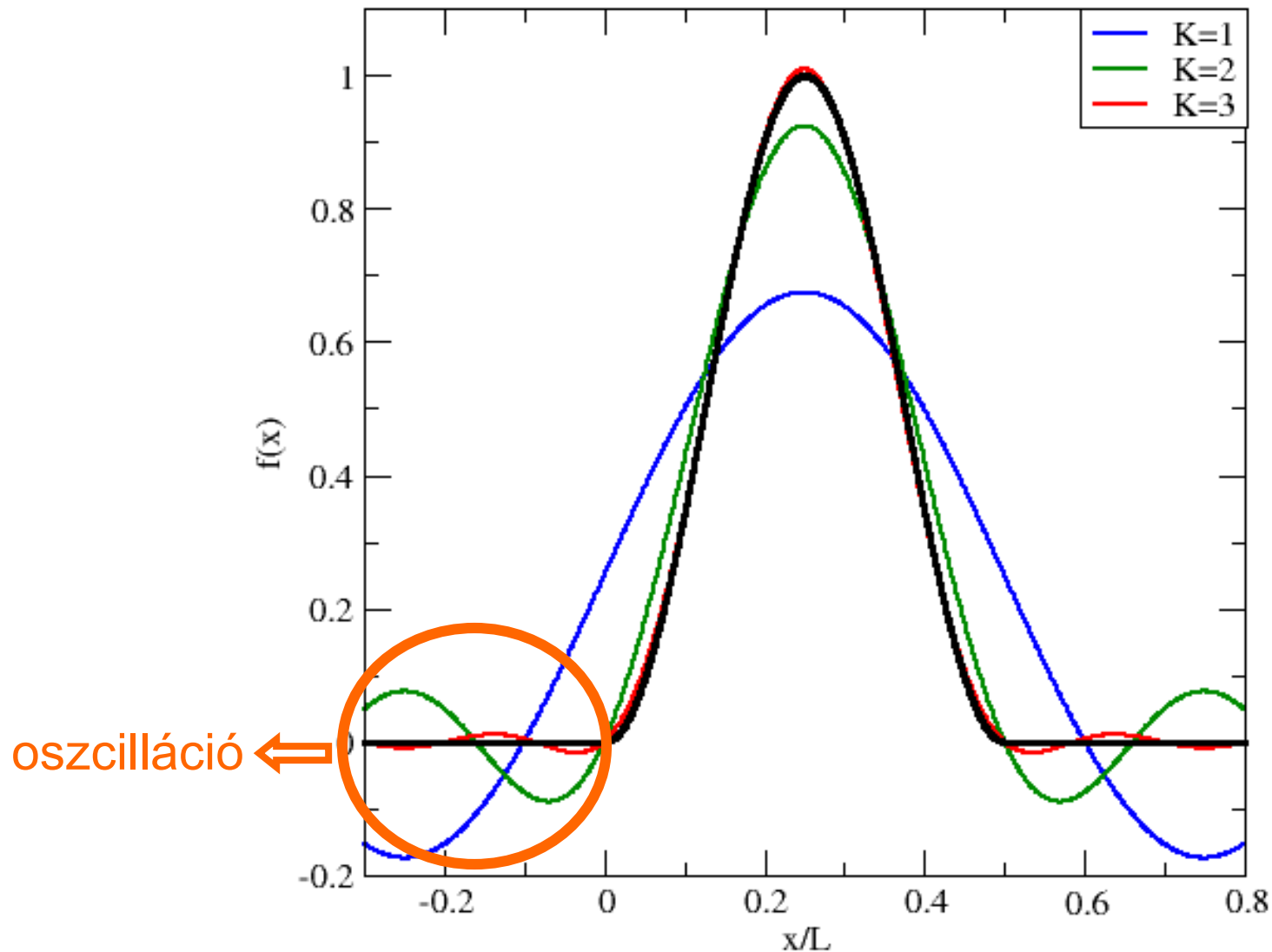
$$b_k = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{2}{k} [1 - \cos(k\pi)] + \frac{1}{(2-k)} [1 - \cos((2-k)\pi)] - \frac{1}{2+k} [1 - \cos((2+k)\pi)] \right\}$$

$$k = 1, 3, 4, 5, \dots$$

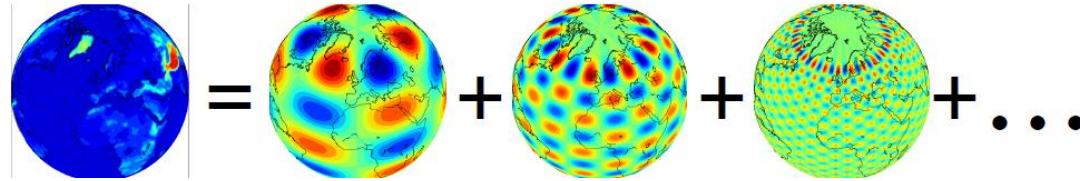
K növelésével nő a pontosság:



K növelésével nő a pontosság:



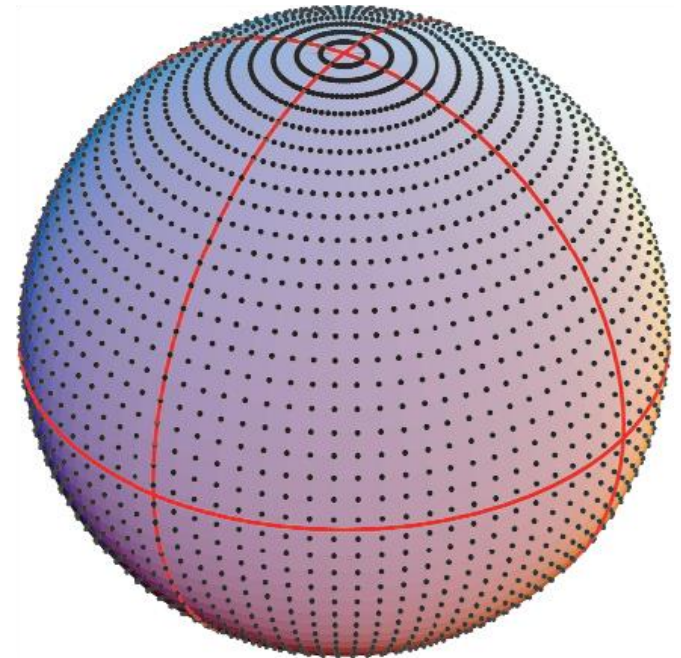
- Tehát az ismeretlen változókat valamilyen függvényrendszer elemeinek segítségével írjuk fel → **Galjorkin módszerek**



- Két módszer család: **spektrális** és **véges elem** módszer
- Feladat: az együtthatók meghatározása
- Megjegyzések:
 - Széles körben elterjedt módszer elsősorban globális problémák megoldására (nincs pólus-probléma, szférikus harmonikusok)
 - Léteznek korlátos tartományú (regionális) alkalmazások is (pl. biperiodikus – teljes harmonikus függvények → a biperiodicitás újabb problémát vet fel (l. később))

Mi a pólus-probléma?

- Véges differencia módszer – szélesség-hosszúság rácson
- Meridiánok konvergenciája a pólusokon
- Ekvidisztáns szélesség-hosszúság rács esetén kis időlépcsők a stabilitáshoz



Szférikus harmonikusok – szférikus sorfejtés:

$$f(\lambda, \varphi) \approx \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l f_l^m Y_l^m(\lambda, \varphi)$$



ortogonális rendszert alkotnak

- Tekintsük az $L(u)=f(x)$ egyenletet, ahol

L : differenciál operátor

$f(x)$: kényszer tag

- Keressük $u(x)$ -et a következő alakban:

$$u(x) = \sum_{j=1}^{\infty} u_j \varphi_j(x)$$

$$u(x) \approx \sum_{j=1}^N u_j \varphi_j(x)$$

- A $\varphi_j(x)$ (bázis) függvények ismertek, a feladat az u_j (x -től nem függő) együtthatók meghatározása
- Kell még valamilyen feltétel, hogy az u_j -ket meghatározhassuk

- Tekintsük az $L(u)=f(x)$ egyenletet, ahol

L : differenciál operátor

$f(x)$: kényszer tag

- Keressük $u(x)$ -et a következő alakban: **Ismeretlen együtthatók**

$$u(x) = \sum_{j=1}^{\infty} u_j \varphi_j(x)$$

$$u(x) \approx \sum_{j=1}^N u_j \varphi_j(x)$$

Keresett függvény

Ismeretlen együtthatók

Ismert bázisfüggvények

- A $\varphi_j(x)$ (bázis) függvények ismertek, a feladat az u_j (x -től nem függő) együtthatók meghatározása
- **Kell még valamilyen feltétel, hogy az u_j -ket meghatározhassuk**

- A Galjorkin módszerek esetében megköveteljük a közelítési **hiba** (e_N) **ortogonalitását** a bázisfüggvényekre:

$$\int_a^b e_N \varphi_i(x) dx = 0 \quad i = 1, \dots, N$$

- Ahol e_N (vagyis a hiba):

$$e_N = L\left(\sum_{j=1}^N u_j \varphi_j(x)\right) - L(u)$$

$$e_N = L\left(\sum_{j=1}^N u_j \varphi_j(x)\right) - f(x)$$

- A Galjorkin módszerek esetében megköveteljük a közelítési **hiba** (e_N) **ortogonalitását** a bázisfüggvényekre:

$$\int_a^b e_N \varphi_i(x) dx = 0 \quad i = 1, \dots, N$$

hiba

bázisfüggvény

- Ahol e_N (vagyis a hiba):

$$e_N = L\left(\sum_{j=1}^N u_j \varphi_j(x)\right) - L(u)$$

$$e_N = L\left(\sum_{j=1}^N u_j \varphi_j(x)\right) - f(x)$$

$$\int_a^b e_N \varphi_i(x) dx = 0$$

$$\int_a^b \varphi_i(x) \left[L \left(\sum_{j=1}^N u_j \varphi_j(x) \right) - f(x) \right] dx = 0$$

$$\int_a^b \varphi_i(x) L \left(\sum_{j=1}^N u_j \varphi_j(x) \right) dx - \int_a^b \varphi_i(x) f(x) dx = 0$$

- N db egyenletből álló rendszert kapunk N db ismeretlenre (u_j)

$$\int_a^b e_N \varphi_i(x) dx = 0$$

$$\int_a^b \varphi_i(x) \left[L \left(\sum_{j=1}^N u_j \varphi_j(x) \right) - f(x) \right] dx = 0$$

$$\int_a^b \varphi_i(x) L \left(\sum_{j=1}^N u_j \varphi_j(x) \right) dx - \int_a^b \varphi_i(x) f(x) dx = 0$$

ismeretlen ismert

- N db egyenletből álló rendszert kapunk N db ismeretlenre (u_j)

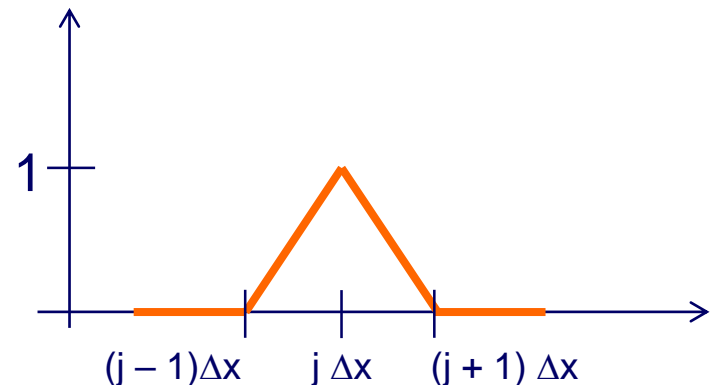
Bázisfüggvények

Spektrális módszer

- A bázisfüggvények maguk is ortogonális rendszert alkotnak – globális bázisfüggvények
- A feladat geometriájától és a határfeltételektől függő választás
 - Téglalap alakú tartományon, periodikus határfeltétellel – Fourier sorfejtés
 - Legendre függvények a szélességi köröktől való függésre

Véges elem módszer

- A bázisfüggvények egy kis tartománytól eltekintve nulla értékűek – lokális bázisfüggvények
- Ahol értékük nem nulla, alacsonyrendű polinomokat alkalmazunk
- Pl. „kalap” függvények



Példa spektrális módszerre

- Legyen

$$L(u) = f(x) \quad 0 \leq x \leq \pi$$

$$L = \frac{d^2}{dx^2}$$



- Valamint legyen

$$u(0) = u(\pi) = 0$$

$$\varphi_j = \sin(jx) \quad j = 1, \dots, N$$

$$u_i = -\frac{2}{i^2 \pi} \int_0^\pi \varphi_i f(x) dx$$

Az együtthatók arányosak a kényszer Fourier transzformáltjával

Példa véges elem módszerre

- Legyen:

$$L(u) = f(x) \quad 0 \leq x \leq \pi$$

$$L = \frac{d^2}{dx^2}$$

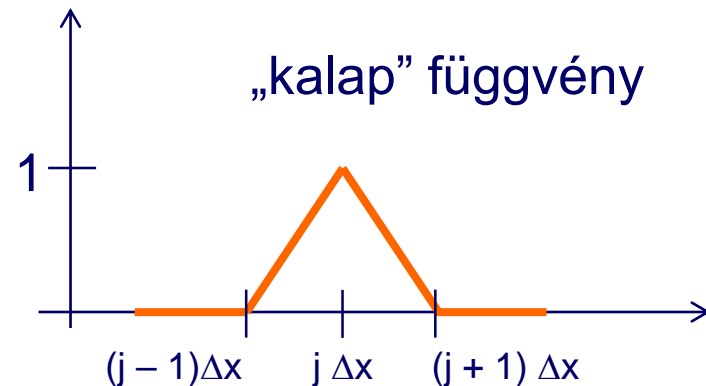
HF

$$u(x) \approx \sum_{j=1}^N u_j \varphi_j(x)$$

- Valamint legyen

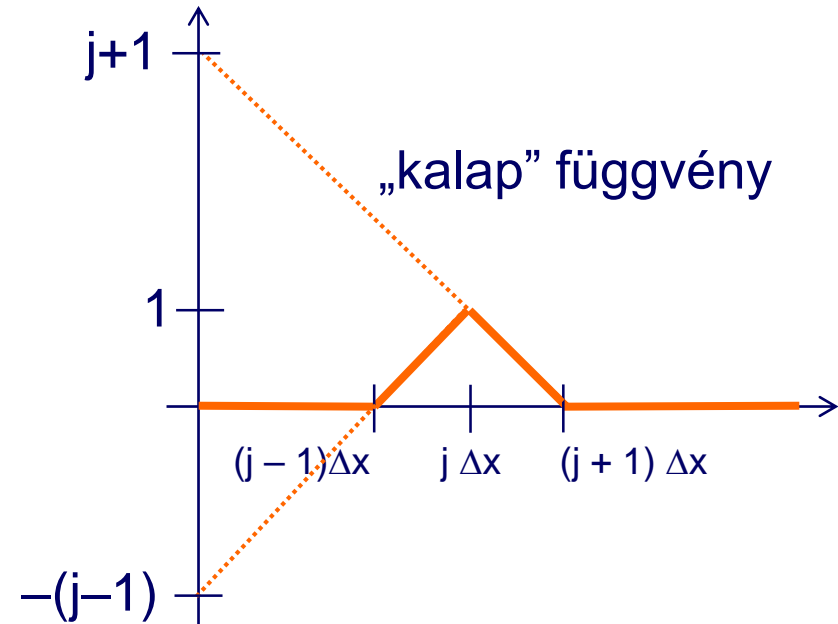
$$u(0) = u(\pi) = 0$$

φ_j "kalap" fv.



HF

- A $\varphi_j(x)$ függvények alakja:



$$\varphi_j(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < (j-1)\Delta x \\ 0 & \text{ha } x > (j+1)\Delta x \\ \frac{x - (j-1)\Delta x}{\Delta x} & \text{ha } (j-1)\Delta x \leq x \leq j\Delta x \\ \frac{-x + (j+1)\Delta x}{\Delta x} & \text{ha } j\Delta x \leq x \leq (j+1)\Delta x \end{cases}$$

- A $\varphi_j(x)$ függvények x -szerinti deriváltja:

$$\frac{d\varphi_j}{dx} = \begin{cases} 0 & \text{ha} & x < (j-1)\Delta x \\ 0 & \text{ha} & x > (j+1)\Delta x \\ \frac{1}{\Delta x} & \text{ha} & (j-1)\Delta x \leq x \leq j\Delta x \\ -\frac{1}{\Delta x} & \text{ha} & j\Delta x \leq x \leq (j+1)\Delta x \end{cases}$$

$$\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{\Delta x^2} = \frac{f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1}}{6}$$

$$\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{\Delta x^2} = f_i$$

Véges különbséges alak
(a véges elem pontosabb)

Fázishiba

- 1D lineáris advekcións egyenlet: $\frac{\partial \phi}{\partial t} + c \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$

- Fourier bázisfüggvények: $\phi(x, t) = \sum_{k=-N}^N a_k(t) \cdot e^{ikx}$

- A térbeli és időbeli deriváltak:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \sum_{k=-N}^N i \cdot k \cdot a_k(t) \cdot e^{ikx}; \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} = \sum_{k=-N}^N \frac{da_k(t)}{dt} \cdot e^{ikx}$$

- Az együtthatókra vonatkozó egyenlet:

$$\frac{da_k(t)}{dt} + c \cdot i \cdot k \cdot a_k(t) = 0 \rightarrow a_k(t) = e^{-ickt}$$

- Tehát a fázissebesség megegyezik a folytonos feladatbeli fázissebességgel → **nincs fázishiba**

Stabilitás

- 1D lineáris advekcións egyenlet: $\frac{\partial \phi}{\partial t} + c \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$

- Leapfrog séma + Fourier bázisfüggvények:

$$\frac{\phi^{n+1} - \phi^{n-1}}{2\Delta t} + c \cdot i \cdot k \cdot \phi^n = 0$$

- Neumann-módszer alkalmazása:

$$\lambda_k^2 + 2\Delta t \cdot c \cdot i \cdot k \cdot \lambda_k - 1 = 0$$

$$\lambda_{k1,2} = -i \cdot k \cdot c \cdot 2\Delta t \pm \sqrt{1 - k^2 c^2 \Delta t^2}$$

- Stabilitási feltétel: $(k \cdot c \cdot \Delta t)^2 \leq 1$

$$c \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{\pi}$$



véges különbséges
esetnél szigorúbb feltétel

Többdimenziós eset

- Barotróp örvényességi egyenlet:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi + \mathbf{k} \times \nabla \psi \cdot \nabla (\nabla^2 \psi) + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$$

ahol ψ az áramfüggvény.

- Tekintsünk biperiodikus mezőket, valamint a következő ortogonális bázisfüggvényeket – teljes harmonikus függvények:

$$\varphi_{mn}(x, y) = e^{i(mkx + nly)} \quad k = \frac{2\pi}{L_x} \quad \text{és} \quad l = \frac{2\pi}{L_y}$$

- Ekkor a ψ függvény a következő módon közelíthető:

$$\psi(x, y, t) \approx \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-N}^N C_{mn}(t) e^{imkx} e^{inly}$$

ahol $C_{mn}(t)$ spektrális együtthatók

- Legyen

$$\mathbf{M} = mk\mathbf{i} + nl\mathbf{j}$$

$$\mathbf{R} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

- Ekkor

$$\psi(x, y, t) \approx \sum_{\mathbf{M}} C_{\mathbf{M}}(t) e^{i\mathbf{M}\mathbf{R}}$$

- Írjuk fel az egyenlet különböző tagjait:

$$\psi \approx \sum_{\mathbf{M}} C_{\mathbf{M}}(t) e^{i\mathbf{M}\mathbf{R}}$$

$$\nabla^2 \psi \approx - \sum_{\mathbf{M}} (\mathbf{M}\mathbf{M}) C_{\mathbf{M}} e^{i\mathbf{M}\mathbf{R}}$$

$$\nabla \psi \approx \sum_{\mathbf{H}} i\mathbf{H} C_{\mathbf{H}} e^{i\mathbf{H}\mathbf{R}}$$

$$\nabla(\nabla^2 \psi) \approx - \sum_{\mathbf{L}} i\mathbf{L}(\mathbf{L}\mathbf{L}) C_{\mathbf{L}} e^{i\mathbf{L}\mathbf{R}}$$

- Ezeket kell behelyettesíteni az eredeti egyenletbe \Rightarrow
nagyon bonyolult alakot kapunk!

- Ezeket kell behelyettesíteni az eredeti egyenletbe \Rightarrow **nagyon bonyolult** alakot kapunk!

$$\frac{dC_M}{dt} = \frac{imk\beta C_M}{MM} + \sum_H \frac{(M-H)(M-H)k \cdot [H \times (M-H)]}{MM} C_{M-H} C_H$$

- A jobb oldali tag különböző hullámok kölcsönhatását írja le (a nemlineáris advekciós tag kifejtésével)

\rightarrow **Transzformációs módszer (l. később)**

A spektrális módszer előnyei:

- A derivált meghatározása a K csonkítási értékig teljesen pontos és egyszerű (hiszen analitikusan deriválható függvényeket kell deriválnunk, pl. \sin , \cos)
- Egy megfelelően „sima” függvény esetében a megoldandó egyenletek száma lényegesen kevesebb, mint a véges különbséges módszer esetén

Ugyanakkor:

- Egyes műveletek (pl. két függvény szorzata) bonyolulttá válhatnak vagy számítási igényük nő meg
- Ilyen esetekben célszerű a számításokat a **spektrális tér** helyett a **fizikai térben** (azaz a rácsponti térben) végezni



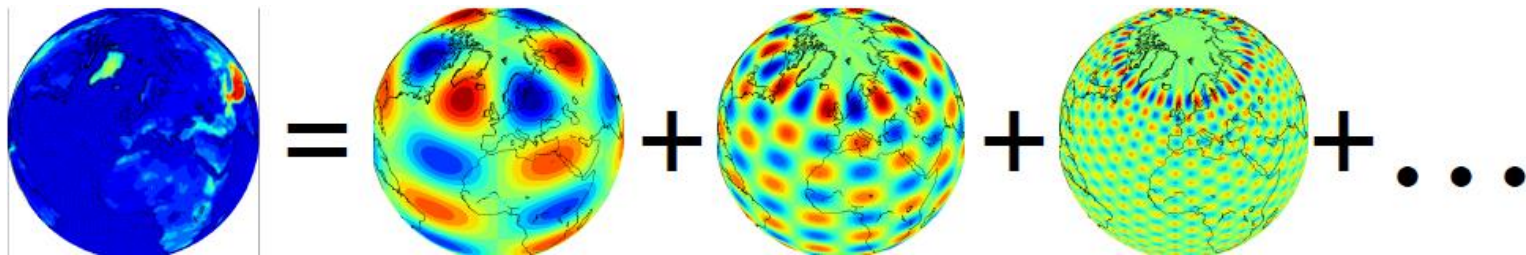
A meteorológiában a spektrális módszer alkalmazása azokra a műveletekre szorítkozik, ahol térbeli (azon belül is a horizontális) deriváltak kiszámítására van szükség

Transzformációs módszer

- A spektrális modellekben a spektrál-technika alkalmazása a horizontális differenciál operátorok kiszámítására és az azokkal végzett lineáris műveletekre korlátozódik
- Minden egyéb számítás (pl. fizikai parametrizáció, nemlineáris dinamika) továbbra is a rácsponti térben történik
- A két tér között transzformációs módszer segítségével teremtenek kapcsolatot

Mi a spektrális tér?

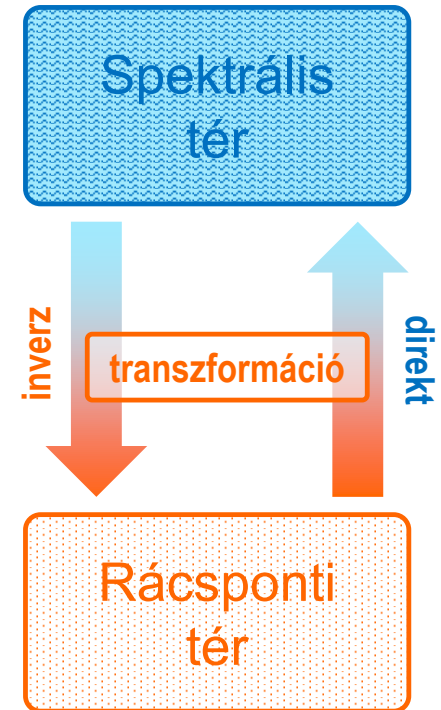
- A rácsponti térben a változók rácspontbeli értékeit tárolják: $T_{(i,j,k),t}$, $Q_{(i,j,k),t}$
- A spektrális modellekben az állapotváltozókat a választott bázisfüggvény-rendszer szerint sorba fejtik
- Azaz a spektráltérben a különböző hullámszámhoz tartozó **spektrális együtthatókat** tárolják: $u_{(i,j,k),t}$



A két tér között minden időlépésben szükséges az áttérés, ezért lényeges a transzformációs módszer hatékonysága

Ezek alapján egy spektrális modell végrehajtásának fő lépései:

1. Számítások a spektrális térben: lineáris operátorok alkalmazása a spektrális állapotvektorra (pl. **differentiál-operátorok** számítása, **szemi-implicit** séma)
2. A horizontális deriváltakkal kiegészített állapotvektor inverz transzformációja a spektrális térből a rácsponti térbe, pl. inverz gyors-Fourier transzformáció (inverz FFT) alkalmazásával
3. Nemlineáris tagok, fizikai parametrizációk kiszámítása a rácsponti térben, szemi-Lagrange séma, időbeli léptetés
4. Direkt transzformáció, pl. gyors-Fourier transzformáció (direkt FFT): sorfejtés alkalmazása az állapotváltozókra → ismétlés az új időlépcsőre



- A spektrális módszer alkalmazása:
 - definiálni kell egy rácsot („transform grid”)
 - a nemlineáris tagokat ebben a rácsponti térben kezelik
 - a deriváltakat a spektrális térben számítják
- A spektrális modellt általában a **csonkítási** hullámszámmal (pl. **ECMWF: T799**, I. később), vagy a kapcsolódó rács („transform grid”) rácstávolságával jellemzik (**ALADIN: 8km**)
- Ez utóbbi (**rácstávolság**) szemléletesebb, de a spektrális és a véges különbséges módszerek korrekt összehasonlítása az, ha a még leírható legkisebb jelenség méretét adjuk meg

Csonkítás

- Csonkítás

$$\sum_{n=1}^N \dots \quad N = ?$$

- Kis n értékek \Rightarrow nagy hullámhosszak
- Nagy n értékek \Rightarrow kis hullámhosszak
- Minél nagyobb N értéke, annál pontosabban határozhatjuk meg a keresett mennyiségeket, de annál nagyobb a számításigény is – kompromisszum
- A csonkítással elveszhet információ a rácsponti és a spektrális tér közötti transzformációnál

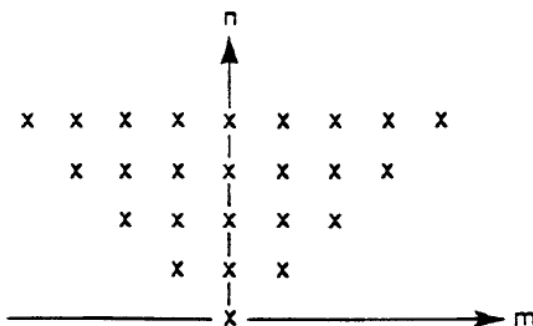
- Globális modelleknél:

földrajzi
hosszúság

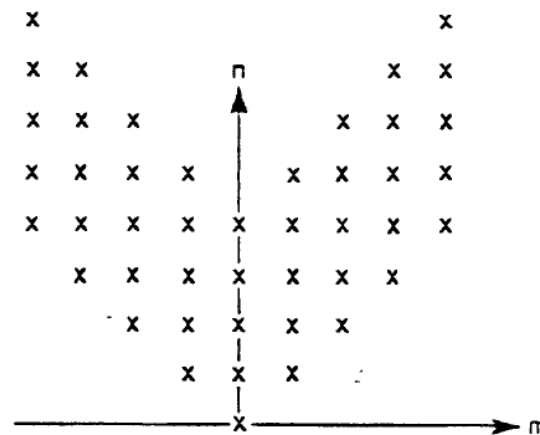
$$Q(\lambda, \mu) = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^{N(m)} C_{mn} \cdot Y_{m,n}(\lambda, \mu)$$

- $M=?$ $N=?$
- m és n közötti kapcsolat
- Háromszög (egységes felbontás),
rombusz alakú (szélességi körök „rövidülése”)

Trianguláris
 $N(m)=M$ (pl. T799)



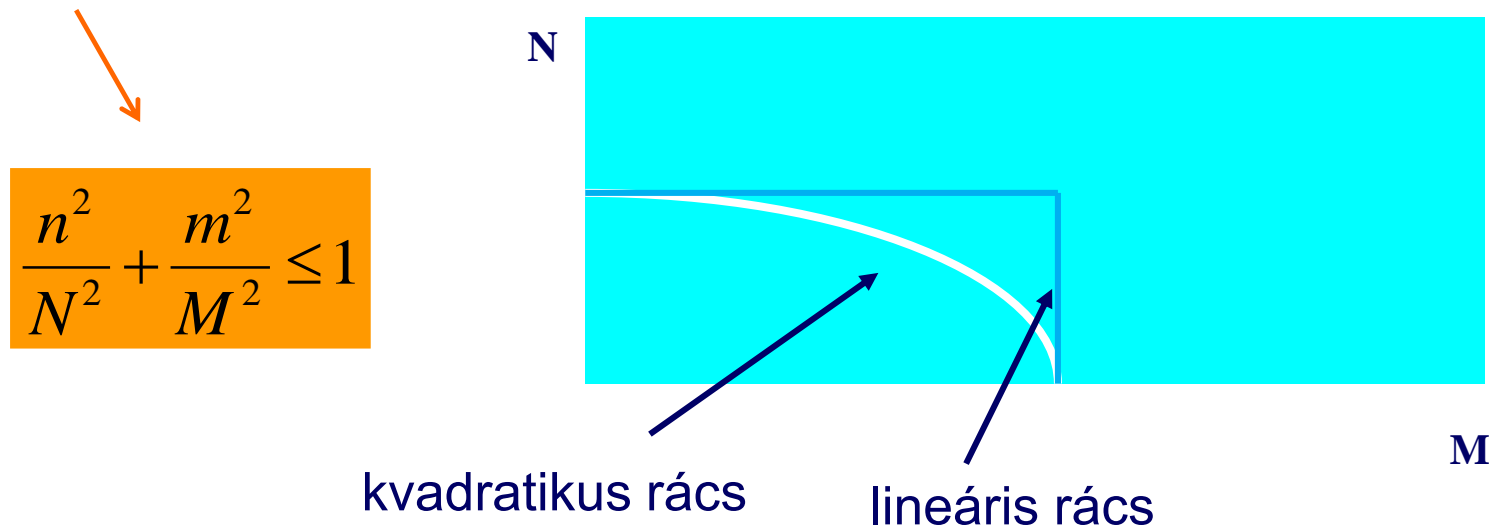
Romboidális
 $N(m)=|m|+M$



- Korlátos tartományú (regionális) modelleknél:

$$\psi(x, y, t) \approx \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-N}^N C_{mn}(t) e^{imkx} e^{inly}$$

- $M=?$ $N=?$
- m és n közötti kapcsolat
- elliptikus, téglalap alakú



Megjegyzés: téglalap alakú csonkításnál teljesen pontos a spektrális és a rácsponti tér közötti transzformáció

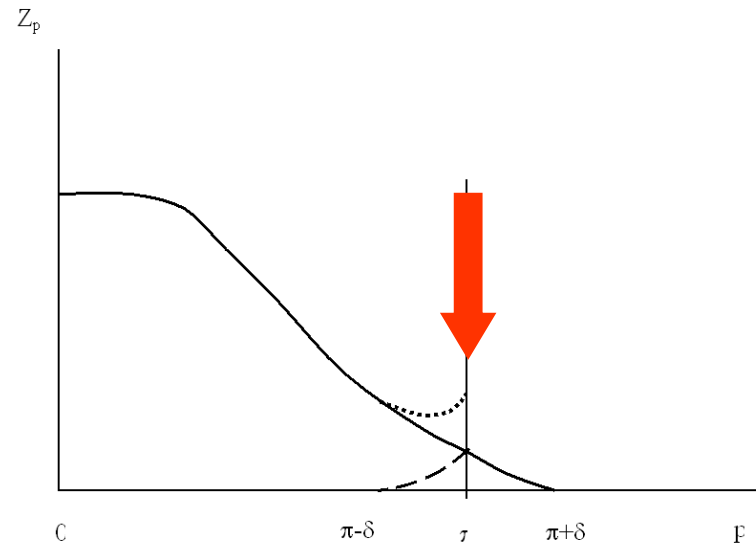
Aliasing (nem-lineáris instabilitás)

- Adott egy Δx felbontású rács
- Ez legjobb esetben egy $2\Delta x$ hullámhosszú hullámot tud leírni
- Az előrejelzés során megjelennek olyan hullámok is, amelyek $2\Delta x$ -nél rövidebbek, energiájuk a rendszerhez adódik
- Tehát a $2\Delta x$ -nél kisebb hullámhosszú hullámok zajként jelennek meg...

- Ha vannak nem-lineáris tagok is:

$$Q(x, y) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N Q_{mn} e^{imkx} e^{inly} \quad Q_1(x, y) \times Q_2(x, y)$$

- Ekkor M -nél (N -nél) nagyobb hullámszámra is keletkezik információ
- Ezek a hullámok zajként jelennek meg és energiájuk hatással van az amúgy „jól” leírt hullámok energiájára – főként a legrövidebb hullámoknál okoz gondot
- Philips kísérlete (1957): stabilitási kritériumot kielégítő időlépcső, mégis „instabil” modellkísérlet

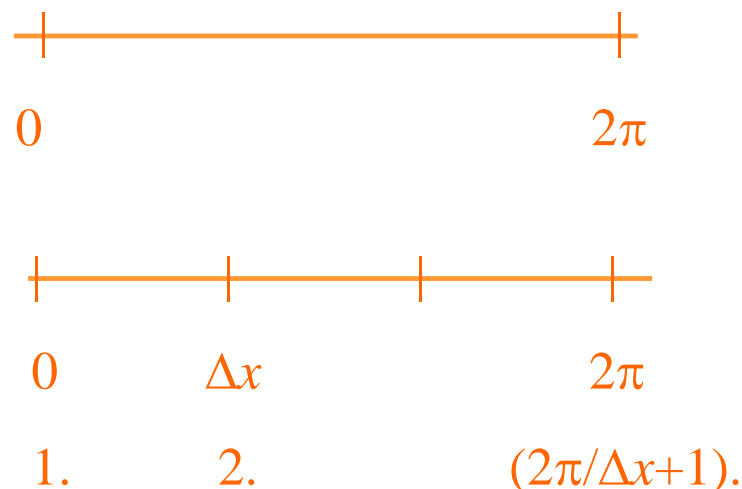


- Tekintsük a $[0, 2\pi]$ intervallumot és ezen alkalmazzunk Δx rácspontfelbontást
- A rácspontok száma: $J = 2\pi/\Delta x + 1$
- Ezzel a felbontással a leírható legrövidebb hullám hullámszáma:
 $K = (J - 1)/2 = \pi/\Delta x$
- Hogy a spektrális tér és a rácsponti tér között ne veszítsünk információt, a csonkítási hullámszám (M) és a rácspontok száma között szükséges:

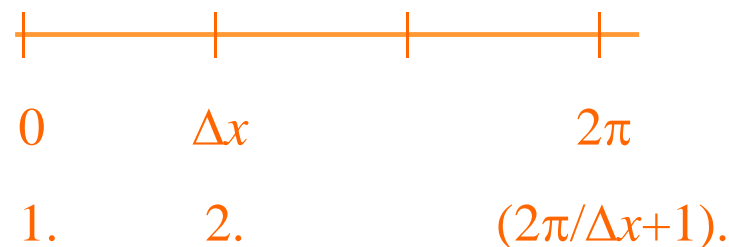
- Tekintsük a $[0, 2\pi]$ intervallumot és ezen alkalmazzunk Δx rácspontfelbontást
- A rácspontok száma: $J = 2\pi/\Delta x + 1$
- Ezzel a felbontással a leírható legrövidebb hullám hullámszáma: $K = (J - 1)/2 = \pi/\Delta x$
- Hogy a spektrális tér és a rácsponti tér között ne veszítsünk információt, a csonkítási hullámszám (M) és a rácspontok száma között szükséges:



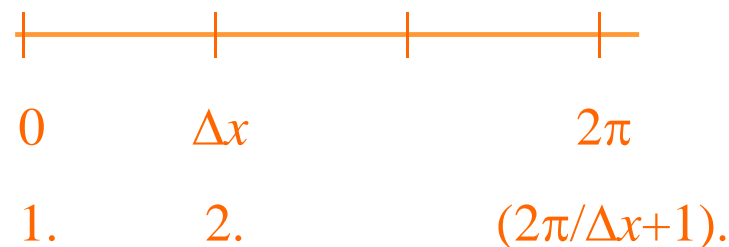
- Tekintsük a $[0, 2\pi]$ intervallumot és ezen alkalmazzunk Δx rácshelbontást
- A rácshpontok száma: $J = 2\pi/\Delta x + 1$
- Ezzel a felbontással a leírható legrövidebb hullám hullámszáma: $K = (J - 1)/2 = \pi/\Delta x$
- Hogy a spektrális tér és a rácshponti tér között ne veszítsünk információt, a csonkítási hullámszám (M) és a rácshpontok száma között szükséges:



- Tekintsük a $[0, 2\pi]$ intervallumot és ezen alkalmazzunk Δx rácspontfelbontást
- A rácspontok száma: $J = 2\pi/\Delta x + 1$
- Ezzel a felbontással a leírható legrövidebb hullám hullámszáma: $K = (J - 1)/2 = \pi/\Delta x$
- Hogy a spektrális tér és a rácsponti tér között ne veszítsünk információt, a csonkítási hullámszám (M) és a rácspontok száma között szükséges:



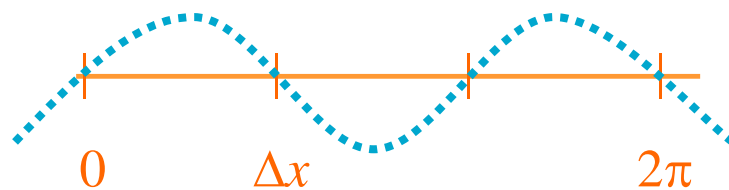
- Tekintsük a $[0, 2\pi]$ intervallumot és ezen alkalmazzunk Δx rácspontfelbontást
- A rácspontok száma: $J = 2\pi/\Delta x + 1$
- Ezzel a felbontással a leírható legrövidebb hullám hullámszáma: $K = (J - 1)/2 = \pi/\Delta x$
- Hogy a spektrális tér és a rácsponti tér között ne veszítsünk információt, a csonkítási hullámszám (M) és a rácspontok száma között szükséges:



- Tekintsük a $[0, 2\pi]$ intervallumot és ezen alkalmazzunk Δx rácshelbontást
- A rácshpontok száma: $J = 2\pi/\Delta x + 1$
- Ezzel a felbontással a leírható legrövidebb hullám hullámszáma: $K = (J - 1)/2 = \pi/\Delta x$
- Hogy a spektrális tér és a rácshponti tér között ne veszítsünk információt, a csonkítási hullámszám (M) és a rácshpontok száma között szükséges:



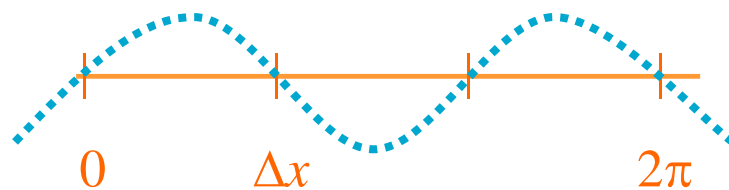
1. 2. $(2\pi/\Delta x + 1)$.



- Tekintsük a $[0, 2\pi]$ intervallumot és ezen alkalmazzunk Δx rácspontfelbontást
- A rácspontok száma: $J = 2\pi/\Delta x + 1$
- Ezzel a felbontással a leírható legrövidebb hullám hullámszáma: $K = (J - 1)/2 = \pi/\Delta x$
- Hogy a spektrális tér és a rácsponti tér között ne veszítsünk információt, a csonkítási hullámszám (M) és a rácspontok száma között szükséges:



1. 2. $(2\pi/\Delta x + 1)$.

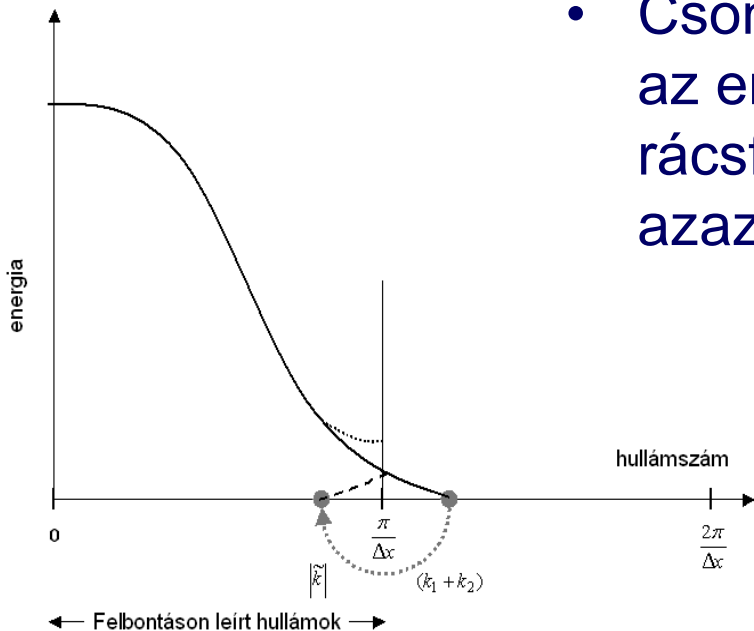


$$J \geq 2M + 1$$

- A nem-lineáris szorzatok miatt megjelennek $(k_1 + k_2) > K$ hullámszámú hullámok
- Energiájuk a spektrumban szimmetrikusan elhelyezkedő hullámok energiájához adódik hozzá:

$$\tilde{K} = \pi / \Delta x - (k_1 + k_2 - \pi / \Delta x) = 2\pi / \Delta x - (k_1 + k_2)$$

- Csonkítás megválasztása:
az energiatöbblet ne okozzon változást a rácsfelbontás által még leírt hullámokon, azaz



$$\tilde{K} \geq K$$

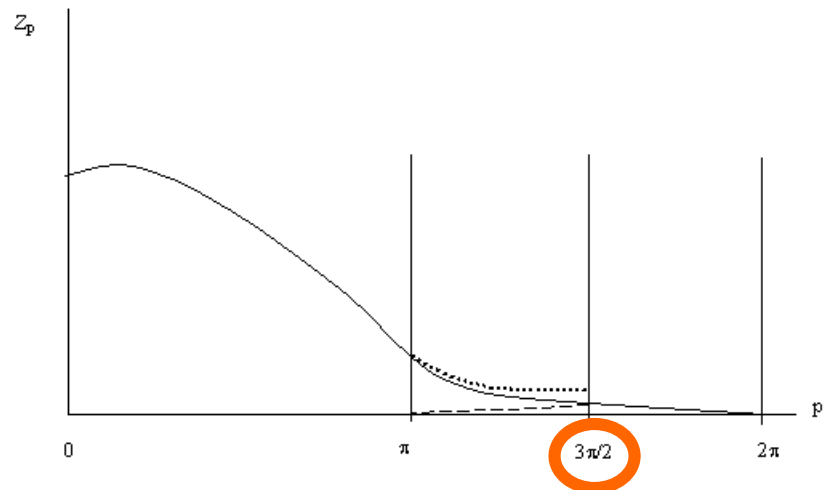
$$2\pi / \Delta x - 2M \geq M$$

$$J - 1 - 2M \geq M$$

- A **spektrális módszernél** a nem-lineáris instabilitás könnyen kiküszöbölhető, ha $2M+1$ rácspont helyett több pontot definiálunk adott számú hullámhoz (túlcsonkítás):

Kvadratikus rács: $J \geq 3M+1$

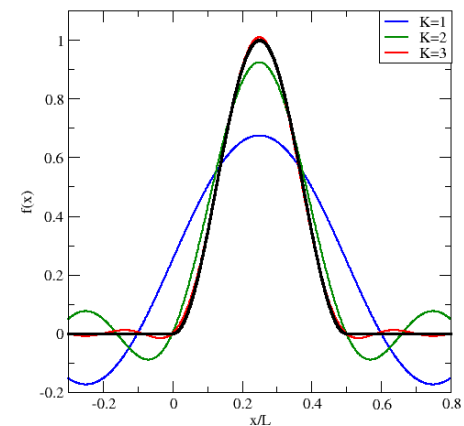
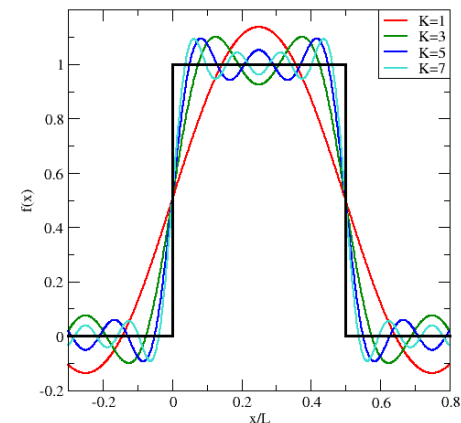
Köbös rács: $J \geq 4M+1$



- A szemi-Lagrange kezelés esetében „nincs gond” az advekciós tagokkal, nem is kell túlcsonkítani → használható a **lineáris rács**, azaz a rácspontok száma kétszerese a hullámok számának
- Vannak további numerikus sémák, amelyek csillapítják a rövidhullámokat

Gibbs oszcilláció

- „Simább” függvény esetében már kisebb K értékre is viszonylag pontos közelítést kapunk
- Az erős gradiensű helyek közelében oszcillációt tapasztalunk (ún. *Gibbs oszcilláció*)
- Az oszcilláció erőssége függ magától a folytonos függvénytől
- Különösen zavaró olyan függvényeknél, ahol erős gradiensek léphetnek fel, de fizikai okokból a függvény értékének mindig pozitívnak kell maradnia (pl. domborzat)

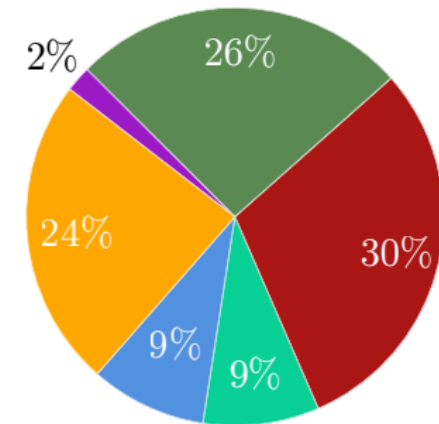


Összefoglalás: előnyök, hátrányok

- A hidro-termodinamikai egyenletrendszerben szereplő deriváltak pontosan (analitikusan) számolhatók
- A nem-lineáris tagoknál az aliasing (nem-lineáris instabilitás) megfelelő túlcsonkítással elkerülhető
- A spektrális együtthatók száma kisebb, mint a rácspontok száma (gazdaságosabb tárolás)
- A globális modelleknél nincs pólus probléma
- A szemi-implicit séma Helmholtz-egyenletének megoldása triviális a spektrális módszernél
- Nincs fázishiba

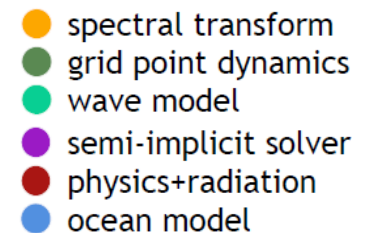
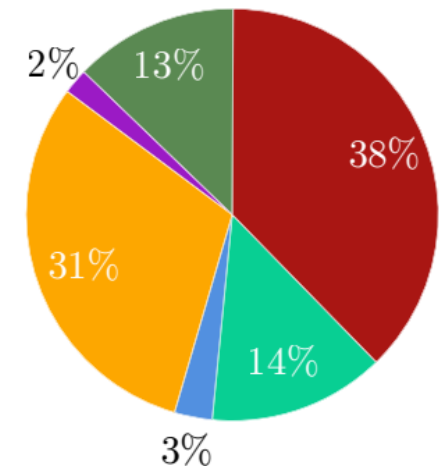
DE:

- A sémák bonyolultak lehetnek
- A műveletek száma a felbontás növekedésével gyorsabban növekszik, mint a rácsponti esetben
- A transzformációs módszer nélkül a nemlineáris tagok kiszámolása nagyon költséges
- Globális modellek esetében örvényesség- és divergencia-egyenlet (a pólusoknál a szélirány „elvesztése” miatt)
- Erős gradiensű tagoknál oszcilláció, illetve nem reális értékek
- Nehézség **korlátos tartományú esetben** (szférikus harmonikusok nem alkalmazhatók)



IFS 9kmL137

IFS 5kmL137



Korlátos tartományú eset:

- Fourier-függvények alkalmazása esetén követelmény: periodikusság
- A meteorológiai mezők általában nem periodikusak egy korlátos tartomány felett
- Megoldás: kiterjesztési (E) zóna, ahol az információkat periodikussá tesszük



Néhány szó a felbontásról

- A horizontális felbontásnak konzisztensnek kell lennie a vertikális felbontással és a fizikai parametrizációkkal
- Hozzá kell igazítani
 - Az adatasszimilációs rendszert
 - A verifikációs módszereket
 - A csatolást
 - A produktumokat
 - Az ensemble rendszert
- Nézzük meg ezt az EMCWF operatív modelljének (IFS) példáján

Az IFS legutóbbi horizontális felbontás növelése

Az IFS legutóbbi horizontális felbontás növelése

OMSZ hírek

OMSZ: 2016. március 9. 10:00

ECMWF modell horizontális felbontása már 10 km alatt van



A [korábbi tervekkel](#) összhangban, 2016. március 8-án a Középtávú Időjárás Előrejelzések Európai Központjában (ECMWF) futtatott [nagyfelbontású időjárás előrejelzési modellben](#) a horizontális felbontás 16 km-ről 9 km-re, az ensemble modellben pedig 32 km-ről 18 km-re nőtt.

Az IFS legutóbbi horizontális felbontás növelése

OMSZ hírek

OMSZ: 2016. március 9. 10:00

ECMWF modell horizontális felbontása már 10 km alatt van



A [korábbi tervekkel](#) összhangban, 2016. március 8-án a Középtávú Időjárás Előrejelzések Európai Központjában (ECMWF) futtatott [nagyfelbontású időjárás előrejelzési modellben](#) a horizontális felbontás 16 km-ről 9 km-re, az ensemble modellben pedig 32 km-ről 18 km-re nőtt.

Last resolution upgrade for the IFS: March 2016

From:

4DV: TL1279/TL255-255-255

HRES: TL1279

EDA: TL399

ENS: TL639/TL319 (d1-10/d11-30)

To:

4DV: TCo1279/TL255-319-399

HRES: TCo1279

EDA: TCo639

ENS: TCo639/TCo319 (d1-10/d11-30)

Az IFS legutóbbi horizontális felbontás növelése

OMSZ hírek

OMSZ: 2016. március 9. 10:00

ECMWF modell horizontális felbontása már 10 km alatt van



A [korábbi tervekkel](#) összhangban, 2016. március 8-án a Középtávú Időjárás Előrejelzések Európai Központjában (ECMWF) futtatott [nagyfelbontású időjárás előrejelzési modellben](#) a horizontális felbontás 16 km-ről 9 km-re, az ensemble modellben pedig 32 km-ről 18 km-re nőtt.

Last resolution upgrade for the IFS: March 2016

From:

4DV: TL1279/TL255-255-255

HRES: TL1279

EDA: TL399

ENS: TL639/TL319 (d1-10/d11-30)

To:

4DV: TCo1279/TL255-319-399

HRES: TCo1279

EDA: TCo639

ENS: TCo639/TCo319 (d1-10/d11-30)

Az IFS legutóbbi horizontális felbontás növelése

OMSZ hírek

OMSZ: 2016. március 9. 10:00

ECMWF modell horizontális felbontása már 10 km alatt van



A [korábbi tervekkel](#) összehangban, 2016. március 8-án a Középtávú Időjárás Előrejelzések Európai Központjában (ECMWF) futtatott [nagyfelbontású időjárás előrejelzési modellben](#) a horizontális felbontás 16 km-ről 9 km-re, az ensemble modellben pedig 32 km-ről 18 km-re nőtt.

Last resolution upgrade for the IFS: March 2016

From:

4DV: TL1279/TL255-255-255

HRES: TL1279

EDA: TL399

ENS: TL639/TL319 (d1-10/d11-30)

Mindkettő igaz!

Hogy lehet?

To:

4DV: TCo1279/TL255-319-399

HRES: TCo1279

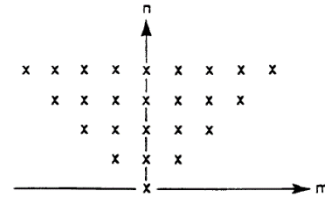
EDA: TCo639

ENS: TCo639/TCo319 (d1-10/d11-30)

Spektrális reprezentáció

- Az IFS modellben alkalmazott spektrális reprezentáció Legendre-polinomokkal és trianguláris csonkítással:

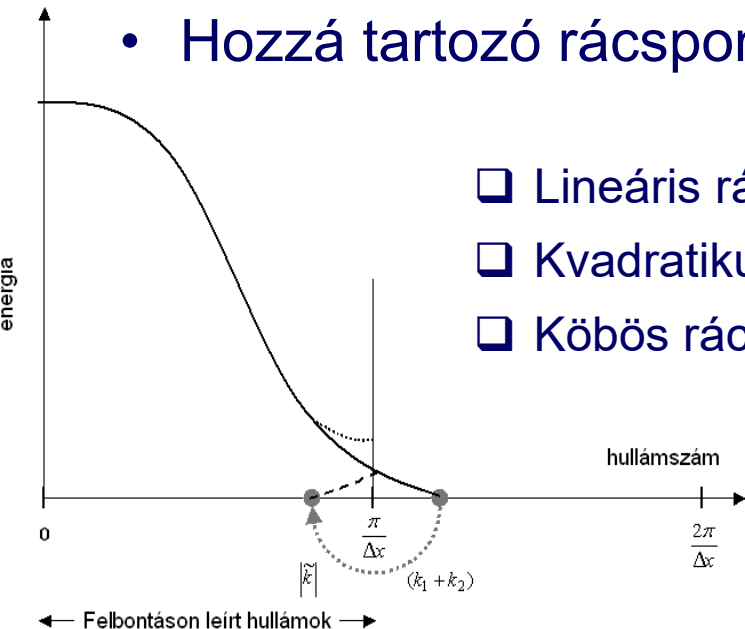
$$Q(\lambda, \mu) = \sum_{n=0}^{NSMAX} \sum_{-n \leq m \leq -n} C_{m,n} \cdot Y_{m,n}(\lambda, \mu)$$



NSMAX a spektrális csonkítás (jelenleg 1279)

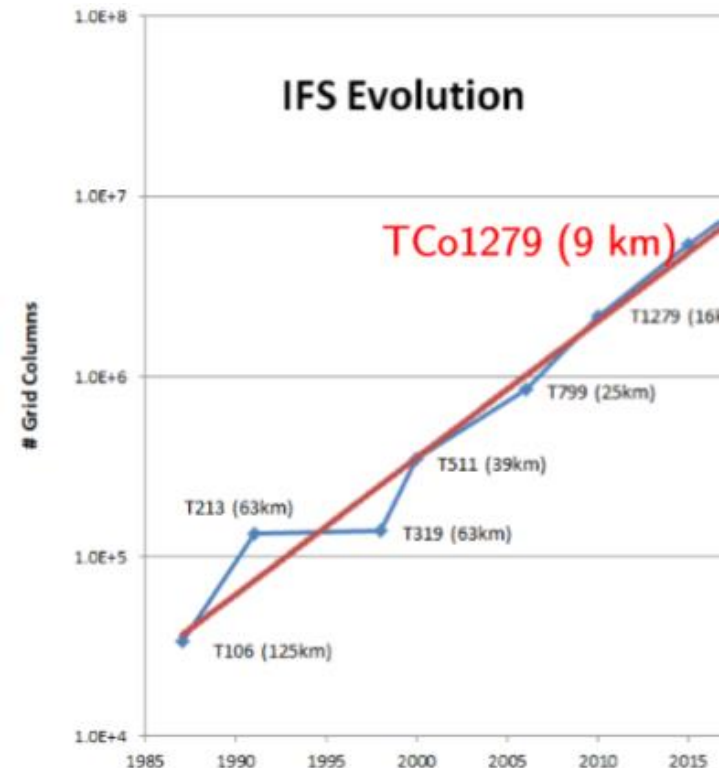
- Hozzá tartozó rácspontok száma (*J*):

- Lineáris rács: $J \geq 2M + 1$ legrövidebb hullám 2 rácsponttal
- Kvadratikus rács: $J \geq 3M + 1$ legrövidebb hullám 3 rácsponttal
- Köbös rács: $J \geq 4M + 1$ legrövidebb hullám 4 rácsponttal

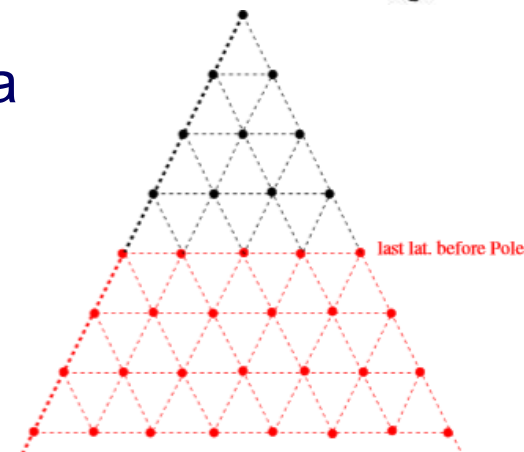
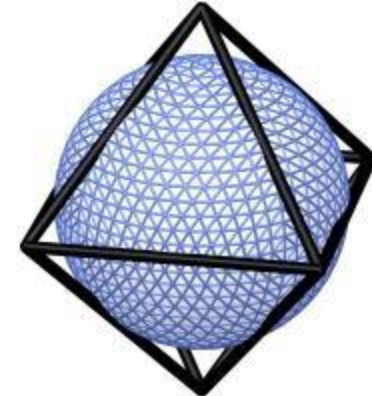


IFS „rácstörténelem”

- 1999-ig kvadratikusan rászűrt rács: TQ213 – szűri a kvadratikusan tagokból eredő nem-lineáris instabilitást (aliasing)
- Szemi-Lagrange séma bevezetésével áttérés lineáris rácsra: TL319 (a SL séma kezeli a legmarkánsabb nem-lineáris tagot) – ugyanannyi rácspont, több hullám
 - Nincs információvesztés a spektrális-rácsponti transzformációk között
- 2016-ig lineáris rács (TL1279)



- 2016-tól köbös-oktahedrális rács: TCo1279
 - Szűri a köbös nem-lineáris tagokból eredő instabilitást
 - A spektrális csonkítás hullámszáma változatlan – a fizikai tér rácsfelbontása lett nagyobb
 - Az új oktahedrális ráccsal kevesebb rácspont



- Rácspontok száma 1 szintre:

TL1279: 2,14 millió pont

TC1279: 8,51 millió pont

TCo1279:

$(1279 \cdot 4 + 20) \cdot 1280$

~6,57 millió pont

