Hatékony numerikus sémák

Szépszó Gabriella
szepszo.g@met.hu

Előadások: http://nimbus.elte.hu/~numelo

Összegzés

Leírt mozgásformák	1D lineáris advekció	Gravitációs hullám	Advekció + gravitációs hullám
Maximális terjedési sebesség	u_0	$\pm\sqrt{gH}$	$u_0 \pm \sqrt{gH}$
Explicit Euler + centrált térbeli séma	abszolút instabil	abszolút instabil	–
Implicit időbeli + centrált térbeli séma	abszolút stabil	abszolút stabil	?
Leapfrog + centrált térbeli séma	CFL	CFL	CFL
CFL kritérium	$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{u_0}$	$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\sqrt{gH}}$	$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{u_0 + \sqrt{gH}}$

Cél: az időlépcsőre vonatkozó kritérium enyhítése
(= hosszabb időlépés) a stabilitás és a pontosság megtartásával

Szemi-implicit séma

Ötlet: a gravitációs hullám-tagok kezelése implicit módon, a többi tagnál megtartjuk az explicit sémát, például

$$\begin{cases} \dfrac{u^{+}-u^{-}}{2\Delta t} + u_0 \dfrac{\partial u^0}{\partial x} + g \dfrac{\dfrac{\partial h^{+}}{\partial x} + \dfrac{\partial h^{-}}{\partial x}}{2} = 0 \\[2ex] \dfrac{h^{+}-h^{-}}{2\Delta t} + u_0 \dfrac{\partial h^0}{\partial x} + H \dfrac{\dfrac{\partial u^{+}}{\partial x} + \dfrac{\partial u^{-}}{\partial x}}{2} = 0 \end{cases}$$

Explicit

Implicit

<u>Például</u>: advekciós tagnál centrált séma + gravitációs hullámtagok esetében centrált sémák időbeli átlaga (ez lehet súlyozott átlag is)

$$\begin{cases} \dfrac{u_j^{n+1}-u_j^{n-1}}{2\Delta t} + u_0\dfrac{u_{j+1}^{n}-u_{j-1}^{n}}{2\Delta x} + g\dfrac{\dfrac{h_{j+1}^{n+1}-h_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x}+\dfrac{h_{j+1}^{n-1}-h_{j-1}^{n-1}}{2\Delta x}}{2} = 0 \\[2ex] \dfrac{h_j^{n+1}-h_j^{n-1}}{2\Delta t} + u_0\dfrac{h_{j+1}^{n}-h_{j-1}^{n}}{2\Delta x} + H\dfrac{\dfrac{u_{j+1}^{n+1}-u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x}+\dfrac{u_{j+1}^{n-1}-u_{j-1}^{n-1}}{2\Delta x}}{2} = 0 \end{cases}$$

Stabilitási kritérium: $u_0^2 \cdot \Delta t^2 \le \Delta x^2 + gH \cdot \Delta t^2$

Ez mindig teljesül, amikor $\Delta t \le \dfrac{\Delta x}{u_0}$ $\longrightarrow$ A gyengébb advekciós sebesség szolgáltatja a feltételt

$$u_0 << \sqrt{gH}$$

Általános alak

Teljes nemlineáris modell (M) – linearizálás egy referencia-állapot körül

izoterm, nyugvó légkör,
hidrosztatikus egyensúly

lineáris rész (L) + nemlineáris rész (N)
(gravitációs hullám- + nemlineáris advekciós tagok)

$$\frac{\partial \Psi^0}{\partial t} = L\left(\frac{\Psi^+ + \Psi^-}{2}\right) + N\left(\Psi^0\right)$$

Időbeli derivált:
explicit leapfrog séma

Linearizált tagok:
implicit kezelés

Nemlineáris maradéktag:
explicit séma

Teljes nemlineáris modell: $M\left(\Psi^{0}\right)=L\left(\Psi^{0}\right)+N\left(\Psi^{0}\right)$

$$\frac{\partial\Psi^{0}}{\partial t}=L\left(\frac{\Psi^{+}+\Psi^{-}}{2}\right)+N\left(\Psi^{0}\right)=L\left(\frac{\Psi^{+}+\Psi^{-}-2\Psi^{0}}{2}\right)+M\left(\Psi^{0}\right)$$

$$\frac{\Psi^{+}-\Psi^{-}}{2\Delta t}=L\left(\frac{\Psi^{+}+\Psi^{-}-2\Psi^{0}}{2}\right)+M\left(\Psi^{0}\right)$$

$$\Psi^{+}-\Psi^{-}=\Delta t\cdot L\cdot\left(\Psi^{+}+\Psi^{-}-2\Psi^{0}\right)+2\Delta t\cdot M\left(\Psi^{0}\right)$$

$$\left(I-\Delta t\cdot L\right)\Psi^{+}=\Psi^{-}+2\Delta t\cdot M\left(\Psi^{0}\right)+\Delta t\cdot L\cdot\left(\Psi^{-}-2\Psi^{0}\right)$$

A SI séma <u>implicit</u> része

Explicit leapfrog-séma

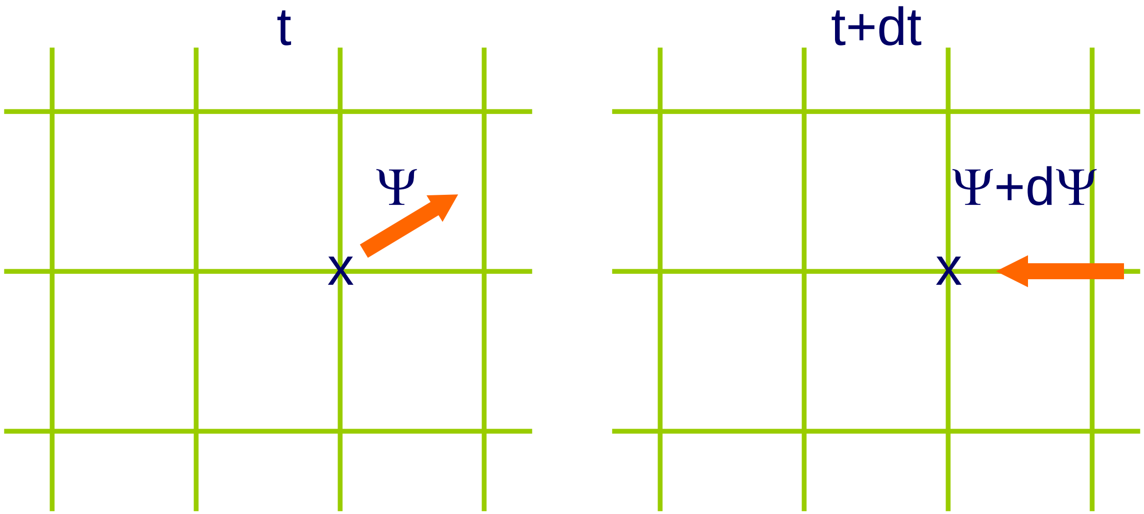
A SI séma <u>explicit</u> része

A séma a nemlineáris modell <u>lineáris</u> részét stabilizálja – marad az advekciós sebességre vonatkozó kritérium

Kérdés: miért csak a lineáris tagokra alkalmazunk implicit kezelést?

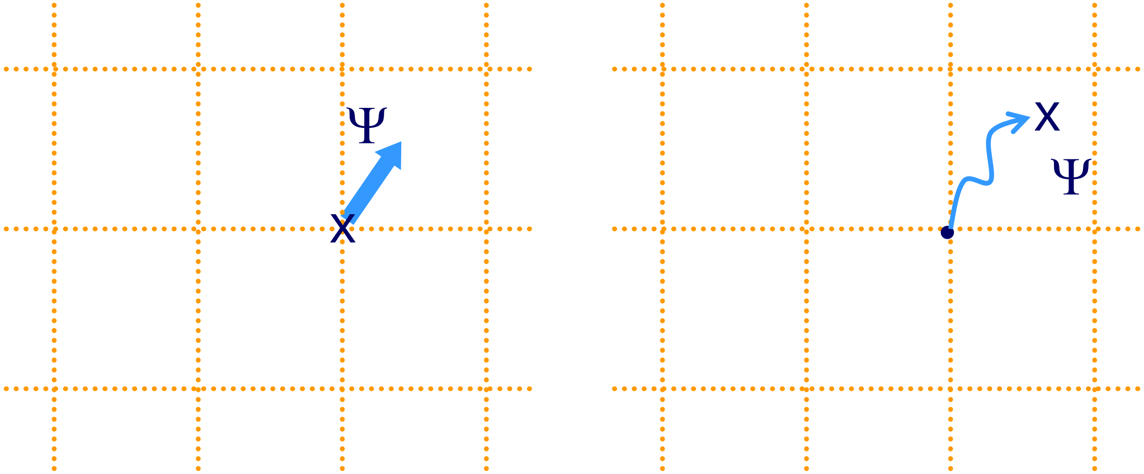
Megjegyzés: a linearizálásnál használt referencia-állapot távol eshet a valós légköri állapottól

Szemi-Lagrange módszer



Euler-szemlélet:
rögzített rács

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + c\,\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0$$



Lagrange-szemlélet:
a folyadékelem követése

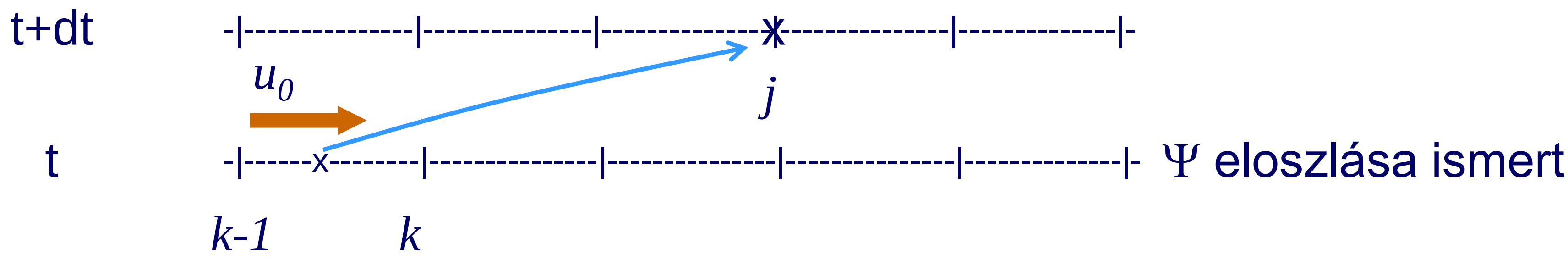
$$\frac{d\Psi}{dt} = 0$$

Tehát: $\dfrac{d\Psi}{dt} = 0$ → Mit jelent ez?

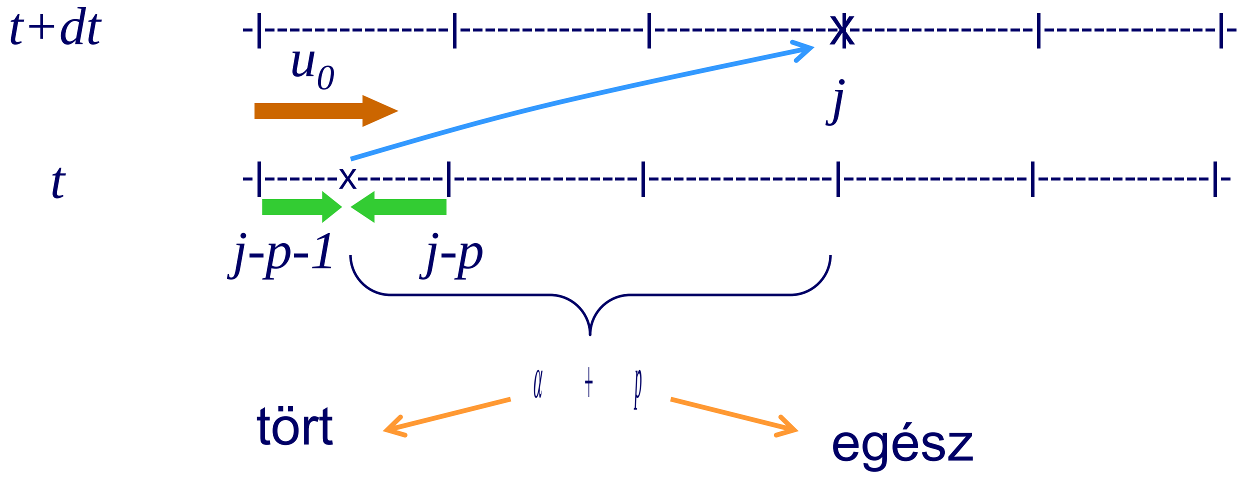
A folyadékelem viszi magával a tulajdonságait:

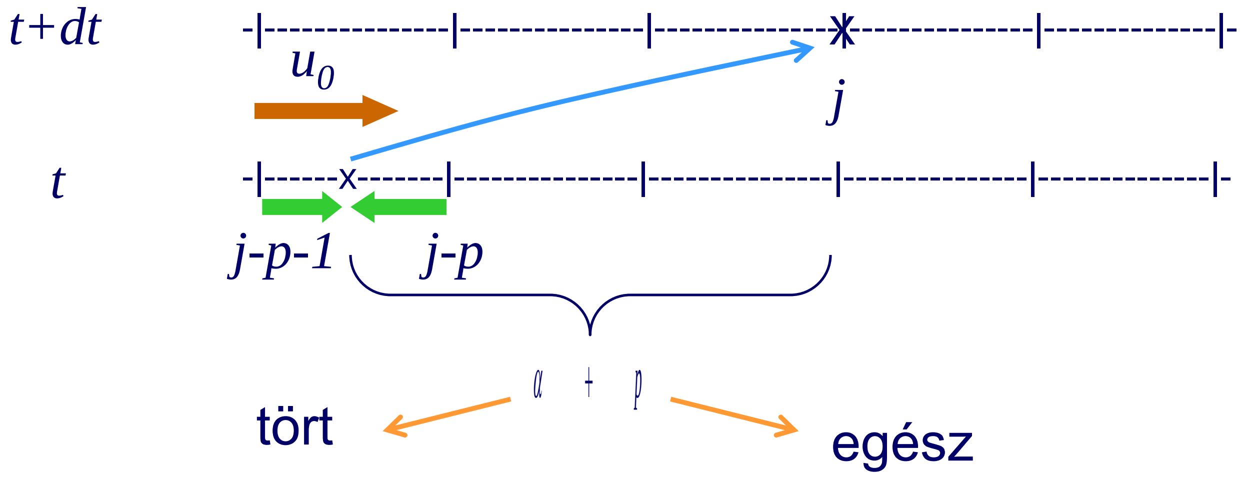
Ψ (($n+1$)-edik időlépésben, j-edik rácspontban) = Ψ (n-edik időlépésben, indulási pontban)

A légrész pályájának nyomon követésével leírható Ψ jövőbeli eloszlása:

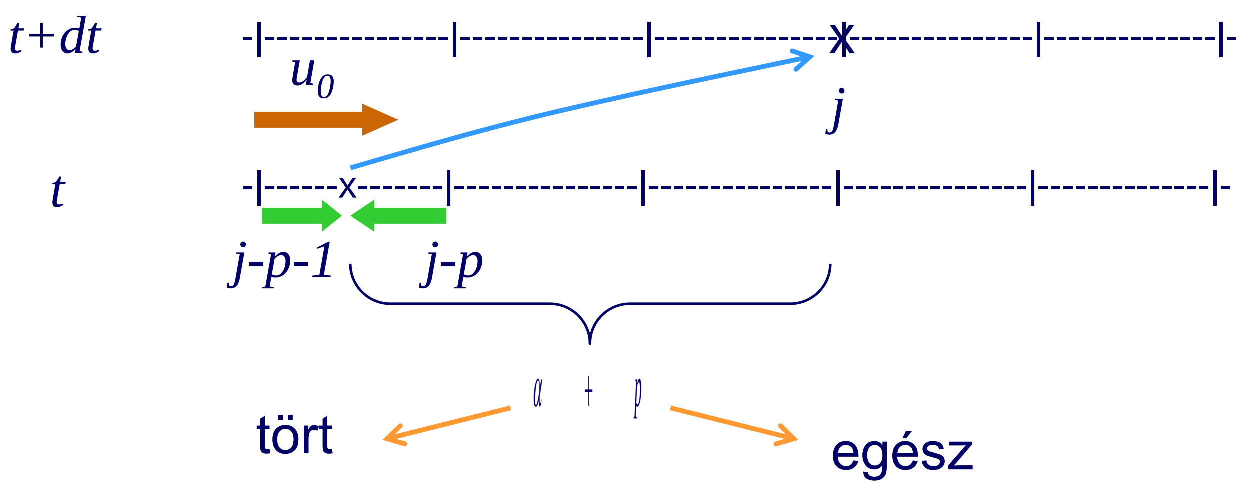


A rácspontból induló részecske nem (feltétlenül) rácspontba érkezik, illetve a rácspontba érkező légrész nem (feltétlenül) indul rácspontból.

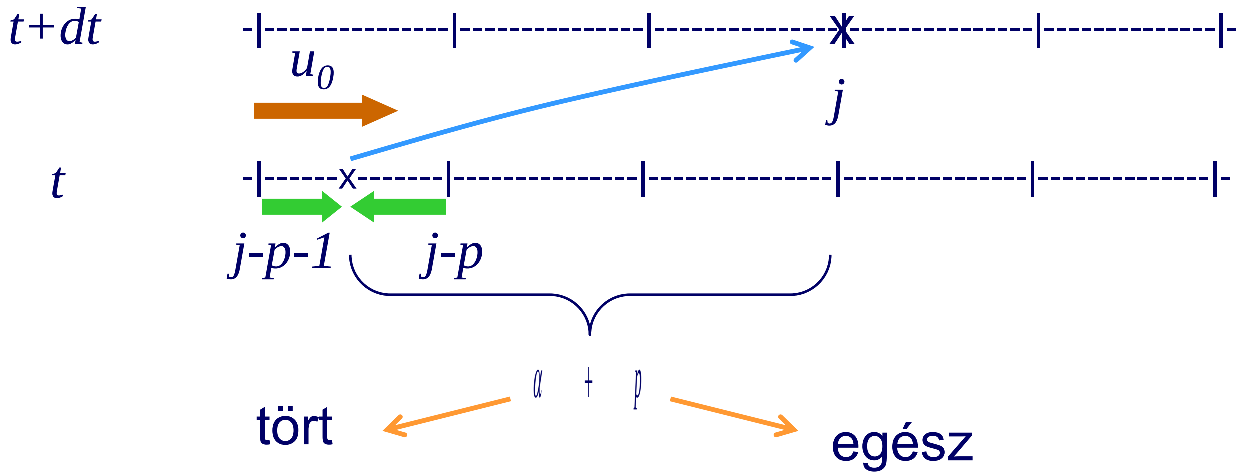

t+dt
u0
j
t
j-p-1
j-p
α + p
tört
egész



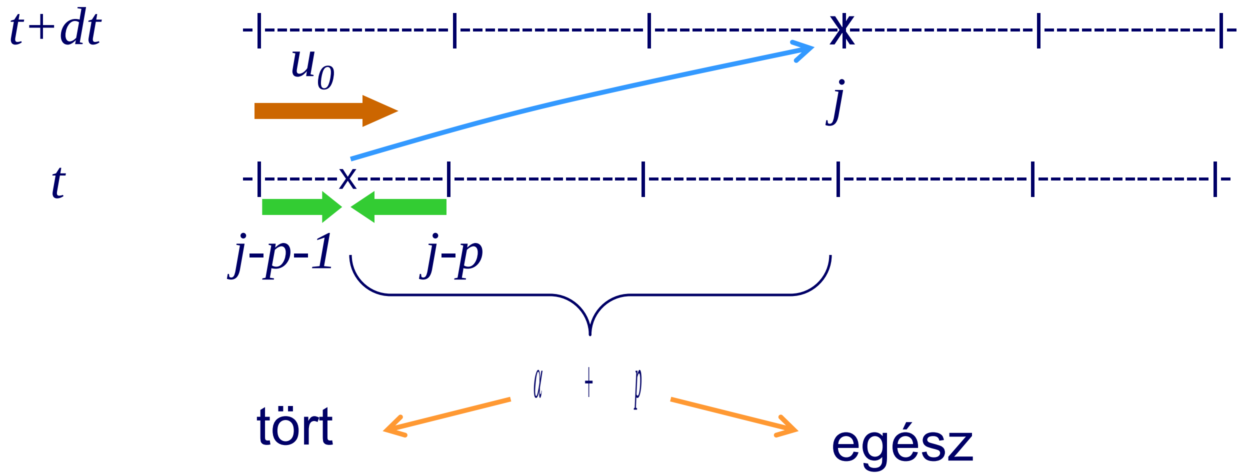
1. Konstans advekciós sebességet tételezünk fel: u_0



1. Konstans advekciós sebességet tételezünk fel: u_0
2. Meghatározzuk a légelem indulási pozícióját:

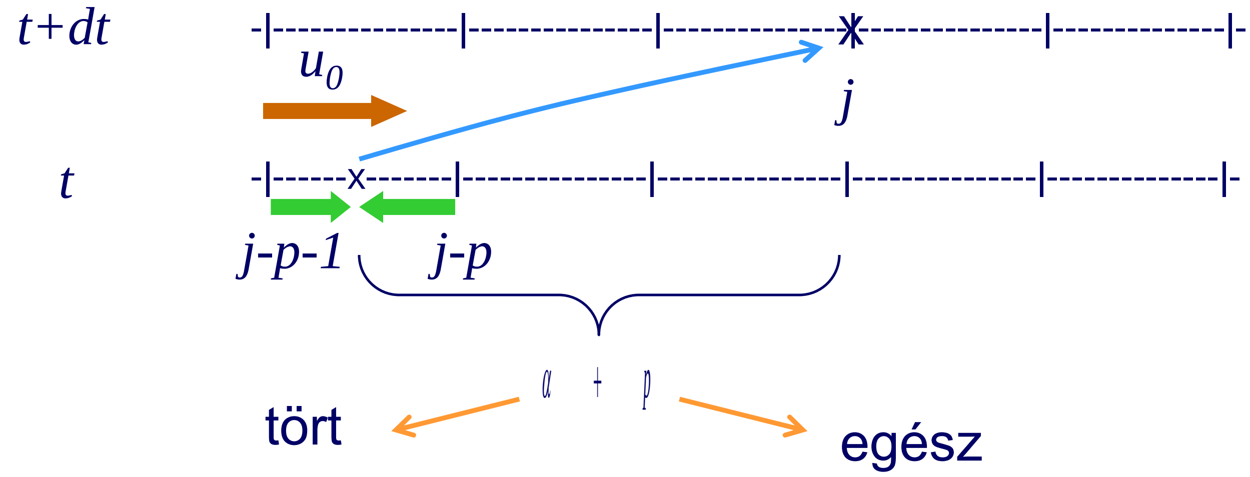


1. Konstans advekciós sebességet tételezünk fel: u_0
2. Meghatározzuk a légelem indulási pozícióját: $x_* \in [x_{j-p-1}, x_{j-p}]$



1. Konstans advekciós sebességet tételezünk fel: u_0
2. Meghatározzuk a légelem indulási pozícióját: $x_* \in \left[x_{j-p-1}, x_{j-p}\right]$

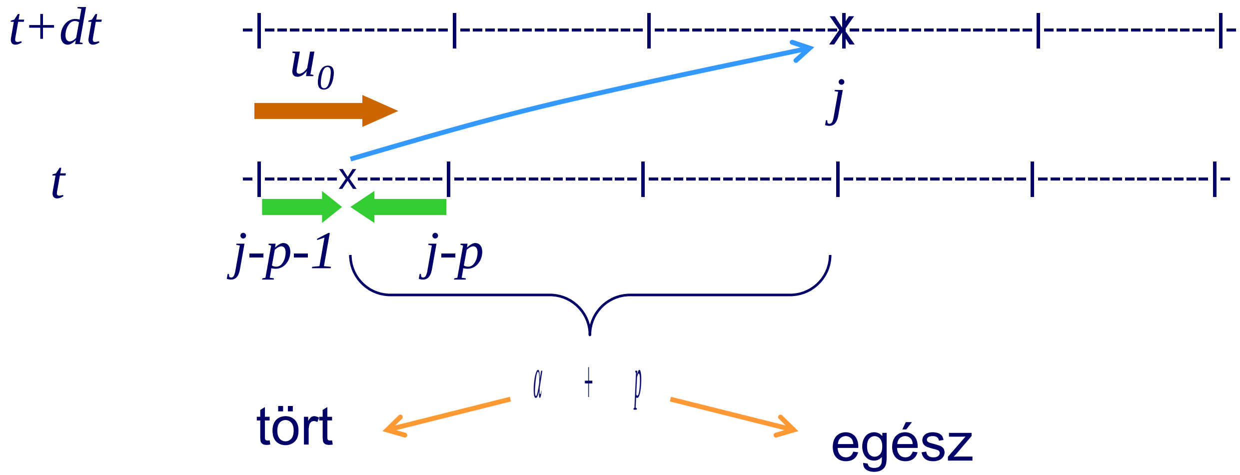
$$x_* = x_j - u_0 \Delta t \longrightarrow u_0 \frac{\Delta t}{\Delta x} = p + \alpha$$



1. Konstans advekciós sebességet tételezünk fel: u_0
2. Meghatározzuk a légelem indulási pozícióját: $x_* \in \left[x_{j-p-1}, x_{j-p} \right]$

$$x_* = x_j - u_0 \Delta t \longrightarrow u_0 \frac{\Delta t}{\Delta x} = p + \alpha$$

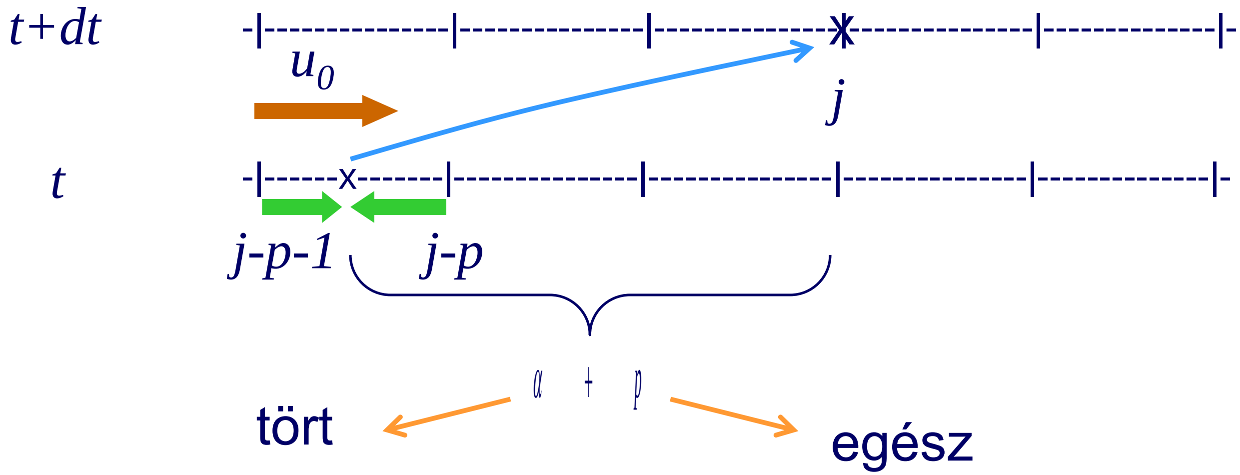
3. Az indulási ponttal szomszédos rácspontokban ismerjük Ψ eloszlását: Ψ_{j-p-1} és Ψ_{j-p}.



1. Konstans advekciós sebességet tételezünk fel: u_0
2. Meghatározzuk a légelem indulási pozícióját: $x_* \in [x_{j-p-1}, x_{j-p}]$

$$x_* = x_j - u_0 \Delta t \longrightarrow u_0 \frac{\Delta t}{\Delta x} = p + \alpha$$

3. Az indulási ponttal szomszédos rácspontokban ismerjük Ψ eloszlását: Ψ_{j-p-1} és Ψ_{j-p}.
4. Ezekből horizontális interpolációval határozzuk meg az indulási pontban az advektált paraméter értékét. Lineáris interpoláció esetén:

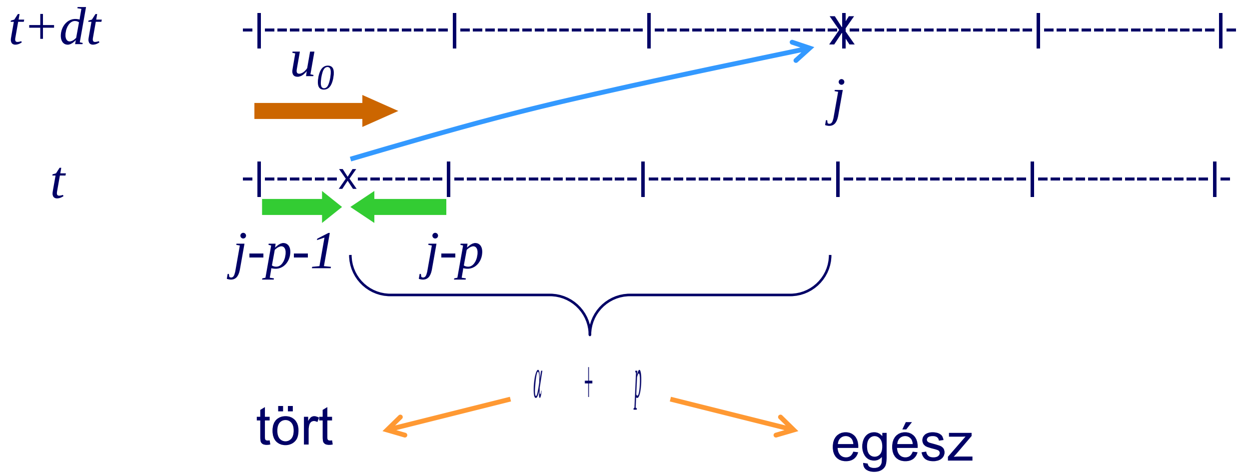


1. Konstans advekciós sebességet tételezünk fel: u_0
2. Meghatározzuk a légelem indulási pozícióját: $x_* \in \left[x_{j-p-1}, x_{j-p}\right]$

$$x_* = x_j - u_0 \Delta t \longrightarrow u_0 \frac{\Delta t}{\Delta x} = p + \alpha$$

3. Az indulási ponttal szomszédos rácspontokban ismerjük Ψ eloszlását: Ψ_{j-p-1} és Ψ_{j-p}.
4. Ezekből horizontális interpolációval határozzuk meg az indulási pontban az advektált paraméter értékét. Lineáris interpoláció esetén:

$$\Psi_j^{n+1} = \Psi_*^n = (1-\alpha) \cdot \Psi_{j-p}^n + \alpha \cdot \Psi_{j-p-1}^n$$



1. Konstans advekciós sebességet tételezünk fel: u_0
2. Meghatározzuk a légelem indulási pozícióját: $x_* \in \left[x_{j-p-1}, x_{j-p}\right]$

$$x_* = x_j - u_0 \Delta t \longrightarrow u_0 \frac{\Delta t}{\Delta x} = p + \alpha$$

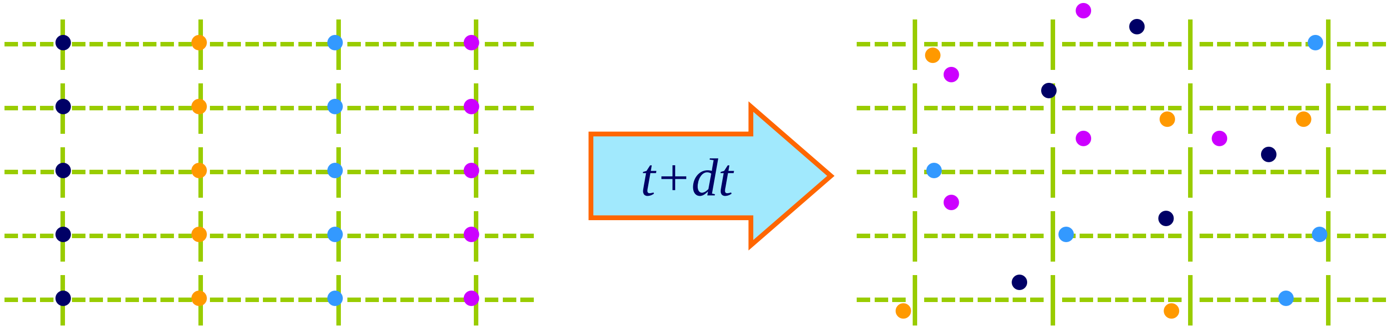
3. Az indulási ponttal szomszédos rácspontokban ismerjük Ψ eloszlását: Ψ_{j-p-1} és Ψ_{j-p}.
4. Ezekből horizontális interpolációval határozzuk meg az indulási pontban az advektált paraméter értékét. Lineáris interpoláció esetén:

$$\Psi_j^{n+1} = \Psi_*^n = \left(1-\alpha\right) \cdot \Psi_{j-p}^n + \alpha \cdot \Psi_{j-p-1}^n$$

Kérdés: miért az indulási pontra végezzük el az interpolációt?

- Lagrange-módszer: meghatározott folyadékelemek halmazát követjük, (pl. a rácspontbeli folyadékelemekét)

- Az időbeli fejlődés során azonban a kezdetben szabályos elrendeződés szabálytalan alakot ölt



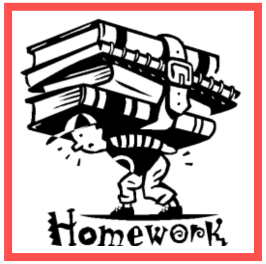
- A numerikus számítások rácson történnek, ezért az adott rácspontba érkező részecske tulajdonságait az előző időlépcsőbeli értékekből interpolációval állítjuk elő → minden lépésben egy „backward”-trajektóriát számítunk → egységes térbeli lefedettség

- Így viszont a módszerrel az idő során nem ugyanazt a részecskét követjük végig – **<u>szemi</u>**-Lagrange módszer

Stabilitásvizsgálat Neumann-módszerrel:

$$\lambda_k = \left[1-\alpha\cdot\left(1-e^{-ik\Delta x}\right)\right]\cdot e^{-ipk\Delta x}$$

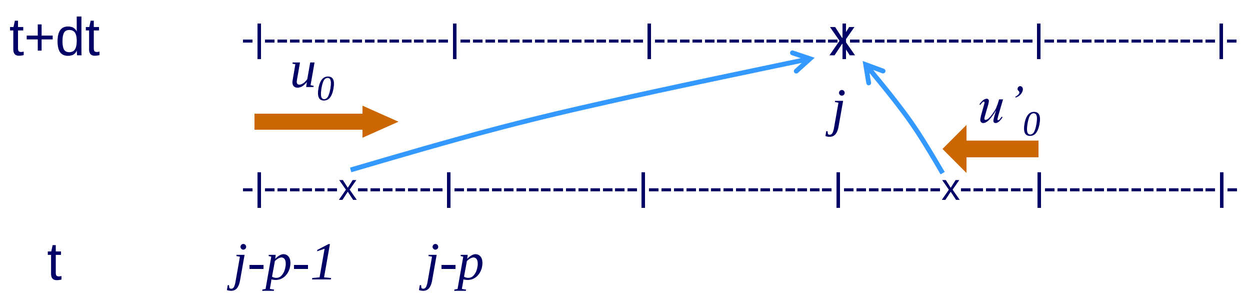
$$\left|\lambda_k\right|^2 = 1-2\alpha\cdot\left(1-\alpha\right)\cdot\left(1-\cos k\Delta x\right)$$



Stabilitási feltétel: $0 \leq \alpha \leq 1$

→ α definíciójából következik, tehát <u>feltétel nélkül stabil séma</u>

Nincs CFL-kritérium – helyette <u>Lipschitz-féle feltétel</u>: a trajektóriák egy időlépcső alatt nem metszhetik egymást:



→ 6-szor nagyobb időlépcsőt enged meg, mint egy Euler-séma

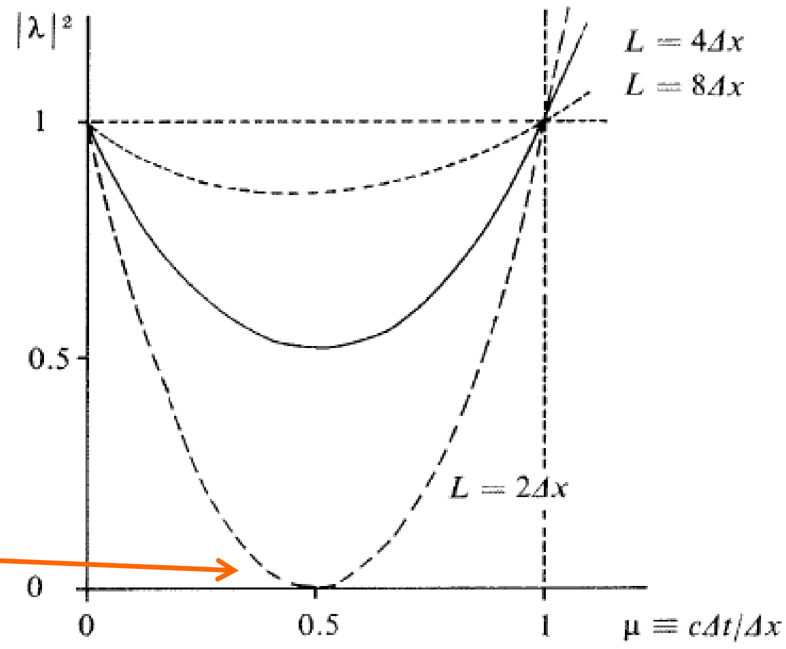
$$|\lambda_k|^2 = 1 - 2\alpha \cdot (1-\alpha) \cdot (1 - \cos k\Delta x)$$

Összevetve az analitikus megoldással:

Fiktív csillapítás, amikor $|\lambda_k| < 1$

Különböző hullámhosszak esetén eltérő mértékű a csillapítás:

- Legerősebb a legrövidebb hullámoknál ($L=2\Delta x$)
- Illetve, ha a kiindulási pont rács-felező pontba esik ($\alpha=0,5$)
- Ha a kettő együtt fennáll: teljes kioltás



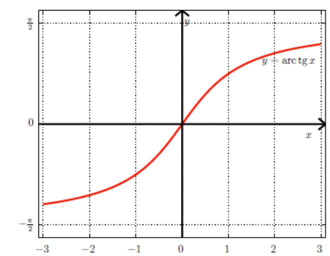
A fázissebesség:

$$\lambda_k = |\lambda_k| \cdot e^{i\Theta} \longrightarrow \Theta = -p \cdot k \cdot \Delta x - arctg\left[\frac{\alpha \cdot \sin k\Delta x}{1-\alpha(1-\cos k\Delta x)}\right]$$

A fázishiba:

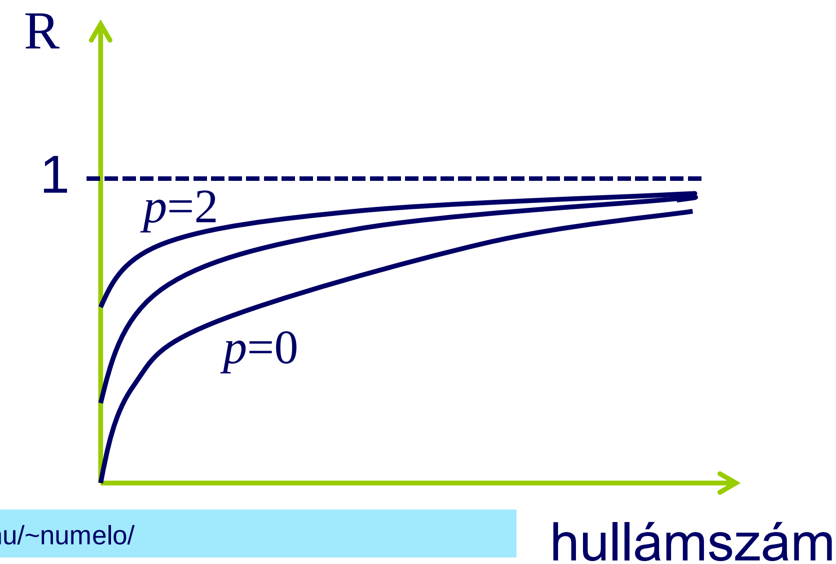
$$R = \frac{c}{u_0} = \frac{-\Theta}{k \cdot \Delta t \cdot u_0} = \frac{-\Theta}{k \cdot \Delta x \cdot (p+\alpha)}$$

$$\boxed{R = \frac{p \cdot k \cdot \Delta x + arctg\left[\dfrac{\alpha \cdot \sin k\Delta x}{1-\alpha(1-\cos k\Delta x)}\right]}{k \cdot \Delta x \cdot (p+\alpha)}}$$



Cél: $R \sim 1$

- Ha a kiindulási pont rácspontba esik (α =1 vagy 0)
- Hosszúhullámoknál
- p növekedésével a fázishiba csökken



- Mindez a lineáris interpoláció esetére érvényes

- Kvadratikus interpoláció:

    - Feltétlen stabilitás
    - Csökkenő csillapítás
    - A fázishiba-karakterisztikák megmaradnak

- Köbös spline interpoláció:

    - Mindkettőt felülmúlja (csillapítás és fázishiba tekintetében)
    - Jelentős számításigény

- Hátrány:

    - Hosszútávon (pl. klímamodelleknél) szignifikáns tömegveszteség
    - Nem-hidrosztatikus modelleknél: rövidebb időlépcső (fizika + gyorsan terjedő mozgásformák)

További érdeklődéshez

- GARP Publication Series No. 17:
  Numerical Methods used in atmospheric models:
  http://www.atmos.ucla.edu/~brianpm/download/mesinger_arakawa_1976.pdf

- Eugenia Kalnay:
  Atmospheric Modeling, Data Assimilation and Predictability

- Szépszó G., Bölöni G., Horányi A., Szűcs M.:
  A numerikus időjárási modellek felépítése
  http://nimbus.elte.hu/~numelo/Doc/jegyzetek/NumerikusModellezes.pdf

- ECMWF e-learning:
  https://www.ecmwf.int/en/en/learning/education-material/elearning-online-resources