Numerikus stabilitás

Szépszó Gabriella
szepszo.g@met.hu

Előadások: http://nimbus.elte.hu/~numelo

Véges differencia sémák tulajdonságai

- Konzisztencia: folytonos és diszkrét feladat viszonya
- Stabilitás: kezdeti feltétel és megoldás viszonya (a sémában) – vizsgálati módszer:
    - Áttérési együttható (ε,g)
- Konvergencia: pontos és közelítő megoldás viszonya

Lax-Richtmyer tétel:

KONZISZTENCIA + STABILITÁS = KONVERGENCIA

↓ egyenletek ↓ belső tulajdonság ↓ megoldás

1. Konzisztencia

- Ha $\Delta t \to 0$ és $\Delta x \to 0$, akkor a diszkrét feladat tart a folytonos feladathoz
- Csonkítási hiba Tr, $Tr \to 0$, példa volt:

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$L_{h\tau}\, u_{h\tau} = u_t^n + c u_x^n$$

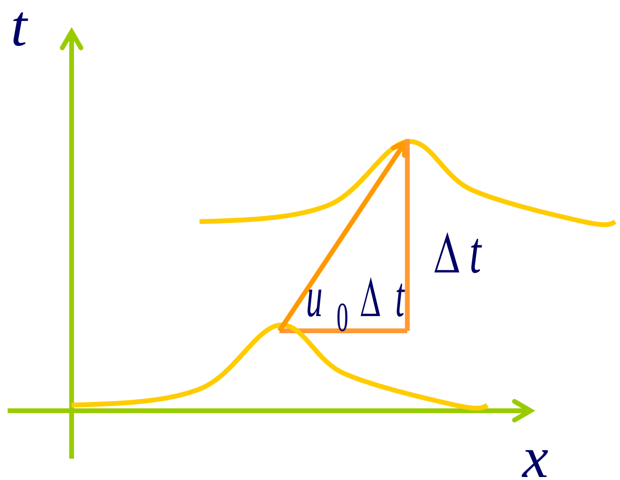
$$\left.\begin{aligned} u_t^n &= \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} \\ u_x^n &= \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} \end{aligned}\right\} Tr = \left(Lu\right)_{j,n} - \left(L_{h\tau}\, u_{h\tau}\right)_{j,n} \to 0$$

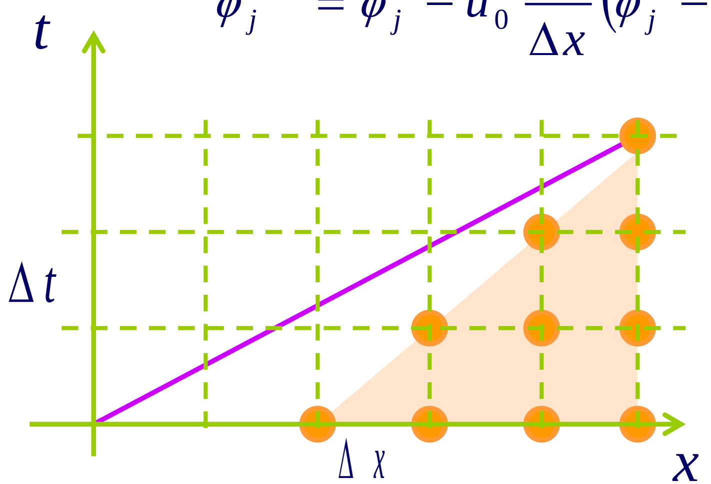
2. Konvergencia

- Ha $\Delta t \to 0$ és $\Delta x \to 0$, akkor a diszkrét feladat megoldása tart a folytonos feladat megoldásához, azaz $\phi_j^n \to \phi(j\Delta x, n\Delta t)$
- A konzisztencia önmagában nem elegendő a konvergenciához!

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \quad u_0 > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^n}{\Delta t} + u_0 \frac{\phi_j^n - \phi_{j-1}^n}{\Delta x} = 0$$

$$\phi_j^{n+1} = \phi_j^n - u_0 \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\phi_j^n - \phi_{j-1}^n\right)$$



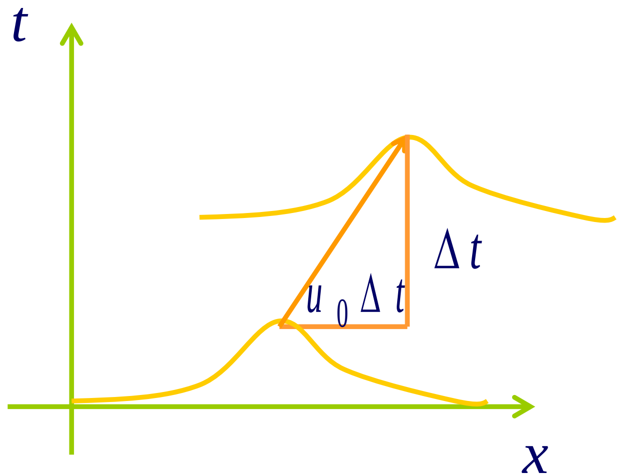


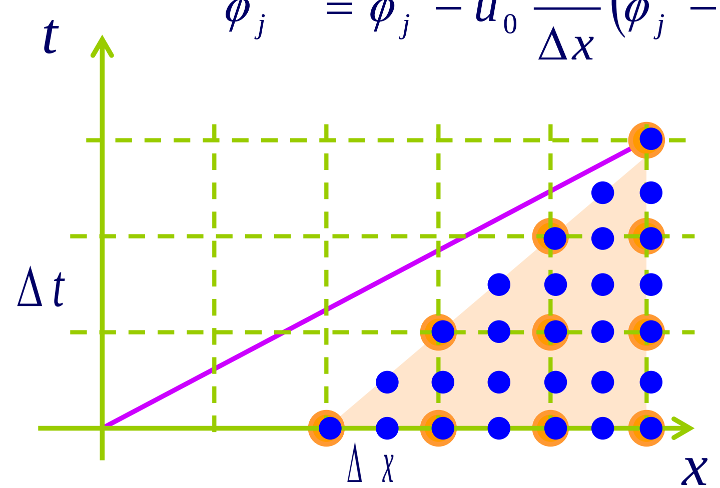
2. Konvergencia

- Ha $\Delta t \to 0$ és $\Delta x \to 0$, akkor a diszkrét feladat megoldása tart a folytonos feladat megoldásához, azaz $\phi_j^n \to \phi(j\Delta x, n\Delta t)$
- A konzisztencia önmagában nem elegendő a konvergenciához!

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \quad u_0 > 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^n}{\Delta t} + u_0 \frac{\phi_j^n - \phi_{j-1}^n}{\Delta x} = 0$$

$$\phi_j^{n+1} = \phi_j^n - u_0 \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\phi_j^n - \phi_{j-1}^n\right)$$





$$\boxed{u_0 \le \frac{\Delta x}{\Delta t}}$$

3. Stabilitás

- Stabilitás: adott $t = n\Delta t$-nél $\Delta t \to 0$ esetén a numerikus megoldás korlátos marad (rögzített t esetén ha $\Delta t \to 0$, akkor $n \to \infty$)

- De: a valóságban a megoldás nem feltétlenül korlátos

- Mégis, ha tudjuk, hogy a folytonos megoldás korlátos, akkor a következő definíciót használjuk:

  - ϕ_j^n megoldás stabil: adott $t = n\Delta t$-nél $\Delta t \to 0$ esetén rögzített Δx-re a $\phi_j^n - \phi(j\Delta x, n\Delta t)$ korlátos marad
  - séma stabil: bármely kezdeti feltételhez tartozó ϕ_j^n megoldás stabil

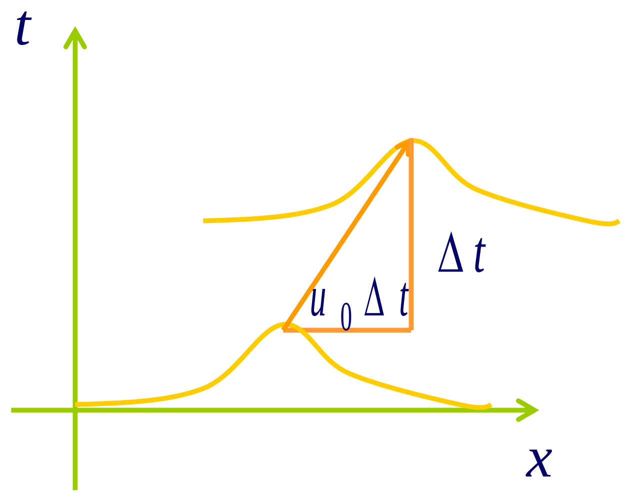
- A konzisztencia önmagában nem elegendő a stabilitáshoz! Önmagában a konvergencia sem

Stabilitási kritériumok

1D lineáris advekciós egyenlet:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \longrightarrow x \in R,\ t \in [0, T]$$

Az ehhez tartozó megoldás: $\phi(x,t) = \phi(x - u_0 \cdot t, 0)$



$u_0 > 0$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \longrightarrow x \in R,\ t \in [0, T]$$

Legyen szabályos rács:

$$\Omega_h = \{(j \cdot \Delta x, n \cdot \Delta t),\ j = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2;\ n = 0, 1, \ldots, T/\Delta t\}$$

Az ehhez tartozó véges differencia-feladat legyen a következő:

$$\frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^n}{\Delta t} + u_0 \frac{\phi_j^n - \phi_{j-1}^n}{\Delta x} = 0$$

Ekkor:

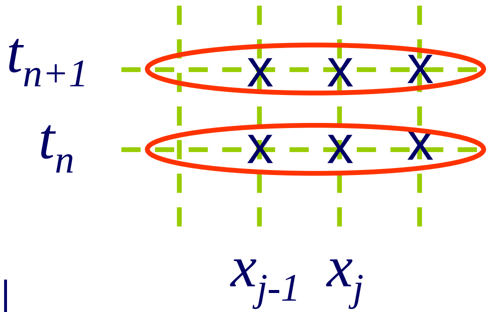
$$\phi_j^{n+1} = (1 - r) \cdot \phi_j^n + r \cdot \phi_{j-1}^n \longrightarrow \boxed{r = u_0 \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad \text{Courant-szám}}$$

Tehát, újra:

$$\phi_j^{n+1} = (1-r)\cdot\phi_j^n + r\cdot\phi_{j-1}^n$$

$$\left|\phi_j^{n+1}\right| \le |1-r|\cdot\left|\phi_j^n\right| + |r|\cdot\left|\phi_{j-1}^n\right| \quad \text{rögzített } n,\ \forall j \text{ esetén.}$$

Legyen $\gamma^n = \max\limits_j \left|\phi_j^n\right|$



Ekkor

$$\left|\gamma^{n+1}\right| \le |1-r|\cdot\left|\gamma^n\right| + |r|\cdot\left|\gamma^n\right|$$

$$\left|\gamma^{n+1}\right| \le \left(|1-r| + |r|\right)\cdot\left|\gamma^n\right|$$

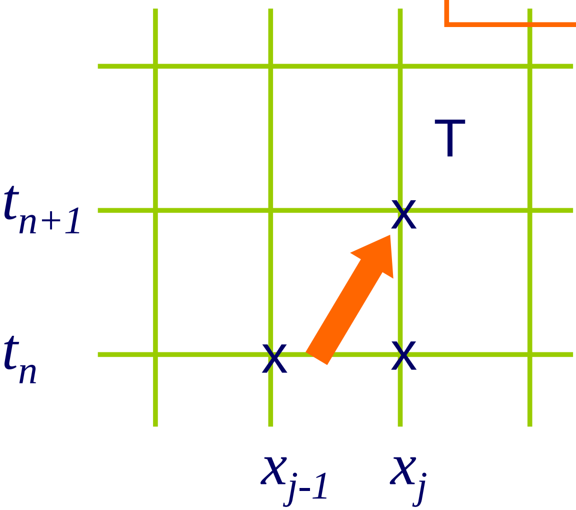
$$\left|\gamma^{n+1}\right| \le \left|\gamma^n\right| \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le r \le 1$$

Ha ez nem teljesül, a <u>megoldás nem lesz korlátos</u> és az idővel (n-nel) növekedhet.

Mit jelent ez a gyakorlatban?

$$0 \le r = u_0 \frac{\Delta t}{\Delta x} \le 1 \rightarrow \boxed{u_0 \le \frac{\Delta x}{\Delta t}}$$

A konvergencia szükséges feltétele

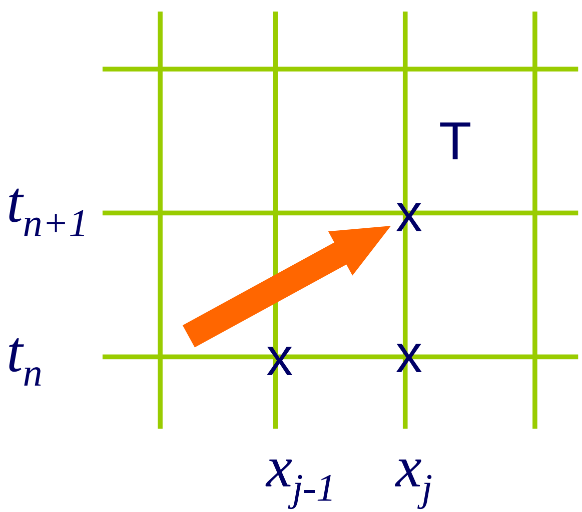


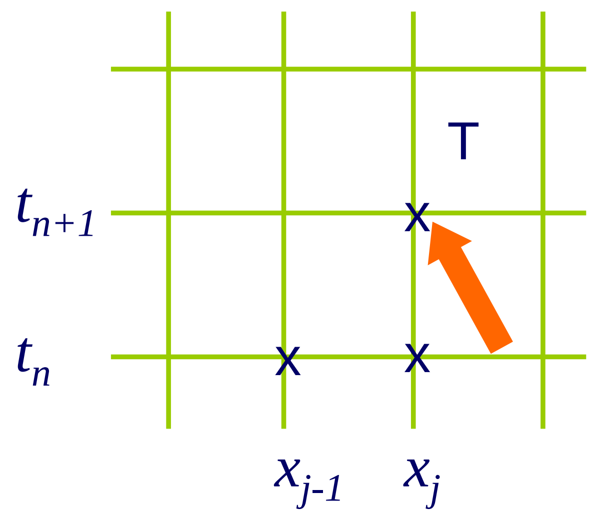
ϕ_j^{n+1} : interpoláció eredménye

$$r = u_0 \frac{\Delta t}{\Delta x} > 1 \rightarrow \boxed{u_0 > \frac{\Delta x}{\Delta t}}$$

$$0 > r = u_0 \frac{\Delta t}{\Delta x} \rightarrow \boxed{u_0 < 0}$$

„extrapoláció” eredménye





Tehát:

$$0 \le u_0 \frac{\Delta t}{\Delta x} \le 1 \quad \rightarrow \quad u_0 > 0, \qquad \Delta t \le \frac{\Delta x}{u_0}$$

Courant-Friedrichs-Lewy (CFL-) kritérium

Ez a lineáris advekció speciális esete volt, tehát u_0 az advekciós sebesség!

Általánosan a kritériumban szereplő sebesség az egyenlet által leírt leggyorsabban terjedő mozgásforma sebessége.

A bemutatott „*direkt módszer*” a stabilitás feltételének meghatározására csak néhány esetben alkalmazható $\rightarrow$ új stabilitásvizsgálati módszer

Neumann (vagy Fourier-sor) módszer

Kiindulás: 1D lineáris advekciós egyenlet

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi(x,t)}{\partial t} + u_0 \dfrac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \\ \phi(x,0) = f(x), \qquad x \in [0, L] \\ \phi(0,t) = \phi(L,t) \\ f(x) = f(x+L) \end{cases}$$

Analitikus megoldás: $\phi(x,t) = f(x - u_0 t)$

A megoldást Fourier-sor alakban keressük: $\phi(x,t)=\sum_k Z_k(t)\cdot e^{ikx}$

Kezdeti feltétel: $\phi(x,0)=\sum_k Z_k(0)\cdot e^{ikx}$

A diszkrét rendszerben:

- Kezdeti feltétel: $\phi_j^0=\sum_k Z_k^0\cdot e^{ikx_j}$
- Megoldás: $\phi_j^n=\sum_k Z_k^n\cdot e^{ikx_j}$

Lineáris eset, a Fourier-sor minden tagja megoldás –
a továbbiakban egyetlen k hullámra vizsgálódunk

A kezdeti feltétel egyetlen hullámot ír le: $\phi(x,0) = f(x) = c_k \cdot e^{ikx}$

Ekkor a folytonos megoldás:

$$\phi(x,t) = f(x - u_0 t) = c_k \cdot e^{ik(x-u_0 t)} = c_k \cdot e^{ikx} \cdot e^{ik(-u_0 t)} = \boxed{\phi(x,0) \cdot e^{ik(-u_0 t)}}$$

A diszkrét rendszerben:

- Kezdeti feltétel: $\phi_j^0 = c_k \cdot e^{ikx_j}$
- Megoldás: $\phi_j^n = (\lambda_k)^n \cdot c_k \cdot e^{ikx_j} = \boxed{(\lambda_k)^n \cdot \phi_j^0}$

$$e^{ik(-u_0 t)} = e^{ik(-u_0 n \Delta t)} = \left[e^{ik(-u_0 \Delta t)}\right]^n \sim (\lambda_k)^n$$

Egy séma

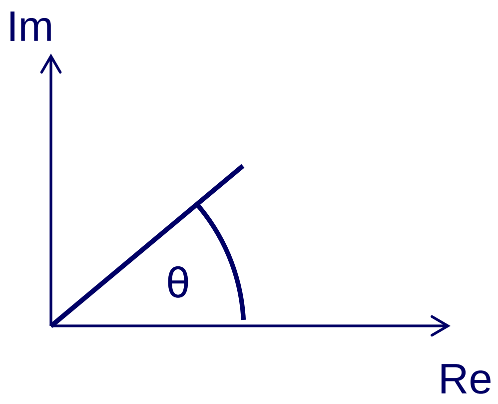
- stabil, ha $|\lambda_k| \le 1$
- fiktív csillapítást vezet be a *k* hullámra, ha $|\lambda_k| < 1$
- neutrális, ha $|\lambda_k| = 1$

csillapítás (disszipáció, numerikus diffúzió)

gerjesztés

Fázissebesség, fázishiba

A folytonos feladatban u_0 fázissebesség: $\phi(x,t) = c_k \cdot e^{ik(x - u_0 t)}$



A sémában: $\lambda_k = |\lambda_k| \cdot e^{i\theta}$

$$\phi_j^n = (\lambda_k)^n \cdot c_k \cdot e^{ikx_j} = |\lambda_k|^n \cdot c_k \cdot e^{ik(x_j + n\theta/k)} \longrightarrow c = -\frac{\theta}{k\Delta t}$$

Fázishiba: $r = \dfrac{c}{u_0}$

lassítás

gyorsítás

Véges differencia sémák stabilitásvizsgálata Neumann-módszerrel – advekciós egyenlet

1. Forward (explicit) időbeli + térben centrált séma:

$$\frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^n}{\Delta t} + u_0 \frac{\phi_{j+1}^n - \phi_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

Feladat: lássuk be, hogy a séma abszolút instabil!

2. Forward (explicit) időbeli + bal oldali térbeli séma

$$\frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^n}{\Delta t} + u_0 \frac{\phi_j^n - \phi_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 \;\rightarrow\; \phi_j^{n+1} = \phi_j^n - \alpha\left(\phi_j^n - \phi_{j-1}^n\right)$$

$$\lambda_k = 1 - \alpha\left(1 - e^{-ik\Delta x}\right) = 1 - \alpha + \alpha\left[\cos(k\Delta x) - i\sin(k\Delta x)\right]$$

$$\left|\lambda_k\right|^2 = 1 + 2\alpha(\alpha - 1)\underbrace{\left[1 - \cos(k\Delta x)\right]}_{\geq 0}$$

A stabilitás feltétele: $\left|\lambda_k\right|^2 \leq 1 \longrightarrow \alpha(\alpha - 1) \leq 0$

Feladat: lássuk be, hogy a fázishiba a következő alakot ölti:

$$r = \frac{1}{q\cdot\alpha} arctg\left[\frac{\alpha\cdot\sin q}{1 - \alpha(1 - \cos q)}\right], \qquad q = k\cdot\Delta x$$

3. Implicit séma: időben forward + térben két centrált séma átlaga

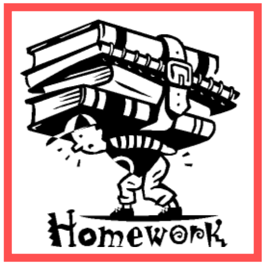
$$\frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^n}{\Delta t} + u_0 \frac{\delta_{2x}\phi_j^n + \delta_{2x}\phi_j^{n+1}}{2} = 0$$

δ_{2x} a térbeli centrált séma operátora:

$$\delta_{2x}\phi_j^n = \frac{\phi_{j+1}^n - \phi_{j-1}^n}{2\Delta x}$$

$$\delta_{2x}\phi_j^{n+1} = \frac{\phi_{j+1}^{n+1} - \phi_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x}$$

Feladat: lássuk be, hogy a séma abszolút stabil és neutrális!



A séma hátránya:

- bonyolult
- jelentős fázishibák léphetnek fel, ugyanis

$$c = \frac{2}{k\Delta t} arctg\left[\frac{u_0 \Delta t}{2\Delta x}\sin(k\Delta x)\right]$$

$$c \le u_0 \text{ és } c \to \frac{\pi}{k\Delta t}, \text{ha } u_0 \to \infty$$

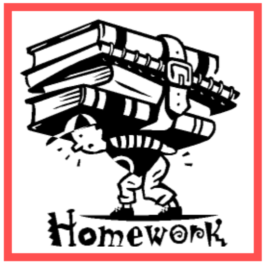
→ Lassítja a hullámokat, azaz az implicit sémák olyan módusok esetén hasznosak, melyek gyorsan terjednek (pl. vertikális hanghullámok), de az időjárás alakításában jelentőségük kicsi

A bonyolultság fokozható: súlyozott átlagok bevezetésével

4. Leapfrog séma: időben + térben centrált explicit séma

$$\frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^{n-1}}{2\Delta t} + u_0 \frac{\phi_{j+1}^n - \phi_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

$$\phi_j^{n+1} = \phi_j^{n-1} - \alpha\left(\phi_{j+1}^n - \phi_{j-1}^n\right)$$



$\phi_j^n = (\lambda_k)^n \cdot c_k \cdot e^{ikx_j}$ behelyettesítése:

$$(\lambda_k)^2 = 1 - \alpha \cdot \lambda_k \cdot 2i \cdot \sin(k\Delta x)$$

$$(\lambda_k)^2 + 2i \cdot p \cdot \lambda_k - 1 = 0$$

$$p = \alpha \cdot \sin(k\Delta x)$$

$$(\lambda_k)_{1,2} = i \cdot p \pm \sqrt{1 - p^2}$$

$\alpha \leq 1 \rightarrow |\lambda_k|^2 = p^2 + 1 - p^2 = 1$ ⟶ <u>neutrálisan stabil</u>

$\alpha > 1 \rightarrow (\lambda_k)_{1,2} = i \cdot \left(p \pm \sqrt{p^2 - 1} \right)$ ⟶ lesznek olyan k értékek, melyekre $p>1$

$$\left(\lambda_k\right)_{1,2} = i \cdot p \pm \sqrt{1 - p^2}$$

Két megoldás: fizikai + számítási (hamis!)

Hogyan lehet megkülönböztetni őket?

Elvárjuk, hogy $\Delta t \to 0$ esetén a közelítő megoldás a pontos megoldáshoz tartson, azaz $\Delta t \to 0 \Rightarrow \lambda \to 1$.

A számítási módusz esetén $\lambda \to$ -1.

Gyengén csatolt páros és páratlan időlépcsők:

$$\phi_j^{n+1} = \phi_j^{n-1} - \alpha\left(\phi_{j+1}^n - \phi_{j-1}^n\right)$$

```
o--------x---------o--------x--------o
|        |         |        |        |
|        |         |        |        |
x--------o--------x---------o--------x
|        |         |        |        |
|        |         |        |        |
o--------x--------o---------x--------o
|        |         |        |        |
|        |         |        |        |
x--------o--------x---------o--------x
```

Például:

$$\frac{d\phi}{dt} = 0$$

Valódi megoldás: ϕ=konstans

Leapfrog séma alkalmazásával $\phi_{n+1} = \phi_{n-1}$ + két kezdeti feltétel: ϕ_0, ϕ_1

- Ha ϕ_1 olyan, hogy a pontos megoldást adja minden n-re: $\phi_{n+1} = \phi_n$
- T.f.h. $\phi_1 = -\phi_0$, ekkor: $\phi_{n+1} = -\phi_n$, azaz a megoldás során a számítási módusz érvényesül

Mivel az egyenlet lineáris, ezért a numerikus megoldás a két módusz kombinációja.

Bonyolultabb egyenleteknél nem mindig lehetséges a számítási módusz teljes elkülönítése, ekkor:

- Euler-lépés beiktatása bizonyos időközönként

- Robert – Asselin szűrő: a szomszédos időlépcsőbeli értékeket kombinálja

$$\overline{\phi^n} = \phi^n + \gamma\left(\phi^{n+1} - 2\phi^n + \phi^{n-1}\right) \to F\left(\phi^{n+1}\right) = \frac{\phi^{n+2} - \overline{\phi^n}}{2\Delta t}$$

$$\gamma \approx 0{,}01$$

Mégis elterjedt séma, mert

- egyszerű
- másodrendű
- stabilitás esetén neutrális (nem csillapít)

Stabilitásvizsgálat Neumann-módszerrel – lineáris gravitációs hullám egyenlete

Eddig: lineáris advekció egyenlete, leggyorsabban terjedő mozgásforma sebessége u_0 advekciós sebesség, az ehhez tartozó stabilitási kritérium:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{u_0}$$

Maximális advekciós sebesség: 100 m/s – 10 km-es rácstávolság esetén ~100 s időlépcső

Gravitációs hullám egyenlet:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + g\,\dfrac{\partial h}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial h}{\partial t} + H\,\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

Folytonos megoldás:

$$u(x,t) = a \cdot \bar{u}_1 \cdot e^{ik(x-ct)} + b \cdot \bar{u}_2 \cdot e^{ik(x+ct)} \quad \leftarrow \quad c = \pm\sqrt{gH}$$

$$h(x,t) = c \cdot \bar{h}_1 \cdot e^{ik(x-ct)} + d \cdot \bar{h}_2 \cdot e^{ik(x+ct)}$$

Tehát a k hullámszámhoz két, ellentétes irányban $\pm\sqrt{gH}$ fázissebességgel haladó hullám tartozik.

(H a légkör átlagos vastagsága)

1. Időbeli + térbeli centrált séma

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} = -g \, \frac{h_{j+1}^n - h_{j-1}^n}{2\Delta x}$$

$$\frac{h_j^{n+1} - h_j^{n-1}}{2\Delta t} = -H \, \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x}$$

$$\left.\begin{aligned} u_j^n &= \hat{u} \cdot (\lambda)^n \cdot e^{ikx_j} \\ h_j^n &= \hat{h} \cdot (\lambda)^n \cdot e^{ikx_j} \end{aligned}\right\}$$ behelyettesítése után:

$$\lambda^{n+1} \cdot \hat{u} \cdot e^{ikx_j} - \lambda^{n-1} \cdot \hat{u} \cdot e^{ikx_j} = -g \, \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\lambda^n \cdot \hat{h} \cdot e^{ik(x_j + \Delta x)} - \lambda^n \cdot \hat{h} \cdot e^{ik(x_j - \Delta x)} \right)$$

$$\lambda^{n+1} \cdot \hat{h} \cdot e^{ikx_j} - \lambda^{n-1} \cdot \hat{h} \cdot e^{ikx_j} = -H \, \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\lambda^n \cdot \hat{u} \cdot e^{ik(x_j + \Delta x)} - \lambda^n \cdot \hat{u} \cdot e^{ik(x_j - \Delta x)} \right)$$

$$\lambda^{n+1}\cdot\hat{u}\cdot e^{ikx_j} - \lambda^{n-1}\cdot\hat{u}\cdot e^{ikx_j} = -g\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\lambda^n\cdot\hat{h}\cdot e^{ik\left(x_j+\Delta x\right)} - \lambda^n\cdot\hat{h}\cdot e^{ik\left(x_j-\Delta x\right)}\right)$$

$$\lambda^{n+1}\cdot\hat{h}\cdot e^{ikx_j} - \lambda^{n-1}\cdot\hat{h}\cdot e^{ikx_j} = -H\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\lambda^n\cdot\hat{u}\cdot e^{ik\left(x_j+\Delta x\right)} - \lambda^n\cdot\hat{u}\cdot e^{ik\left(x_j-\Delta x\right)}\right)$$

Egyszerűsítés után:

$$\hat{u}\cdot\left(\lambda^2-1\right) = -g\frac{\Delta t}{\Delta x}\hat{h}\cdot\lambda\cdot\left(e^{ik\Delta x}-e^{-ik\Delta x}\right) = -g\frac{\Delta t}{\Delta x}\hat{h}\cdot\lambda\cdot 2i\cdot\sin\left(k\Delta x\right)$$

$$\hat{h}\cdot\left(\lambda^2-1\right) = -H\frac{\Delta t}{\Delta x}\hat{u}\cdot\lambda\cdot\left(e^{ik\Delta x}-e^{-ik\Delta x}\right) = -H\frac{\Delta t}{\Delta x}\hat{u}\cdot\lambda\cdot 2i\cdot\sin\left(k\Delta x\right)$$

Ha $\dfrac{\hat{h}}{\hat{u}} = \sqrt{\dfrac{H}{g}}$: $\lambda^2 - 1 = -\sqrt{gH}\dfrac{\Delta t}{\Delta x}\cdot\lambda\cdot 2i\cdot\sin\left(k\Delta x\right)$

$$\lambda^2 + p\cdot\lambda\cdot 2i - 1 = 0 \quad \leftarrow \quad p = \sqrt{gH}\frac{\Delta t}{\Delta x}\cdot\sin\left(k\Delta x\right)$$

Ekkor a stabilitás feltétele – a lineáris advekciós egyenlet mintájára:

$$\sqrt{gH}\,\frac{\Delta t}{\Delta x} \le 1 \rightarrow \boxed{\Delta t \le \frac{\Delta x}{\sqrt{gH}}}$$

Tehát a CFL-kritériumban a gravitációs hullám terjedési sebessége jelenik meg, ami egy szigorúbb feltételt jelent, mint az advekciós sebesség volt.

Ugyanis ha a terjedési sebesség tipikus nagyságrendje: 300 m/s (H~10 km), akkor 10 km-es felbontás esetén az időlépcső ~30 s

2. Forward időbeli + térben centrált séma

$$|\lambda|^2 = 1 + gH\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2(k\Delta x)$$

→ <u>abszolút instabil</u>

3. Implicit séma: két időlépcsőbeli térbeli véges differencia átlaga + időbeli séma

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} = -g\,\frac{\delta_{2x} h_j^n + \delta_{2x} h_j^{n+1}}{2}$$

$$\frac{h_j^{n+1} - h_j^{n-1}}{2\Delta t} = -H\,\frac{\delta_{2x} u_j^n + \delta_{2x} u_j^{n+1}}{2}$$

Abszolút stabil séma, de rendkívül költséges, mert minden időlépcsőben meg kell oldani a

$$gH\left(\Delta t\right)^2 \left(\delta_{2x}\right)^2 h_j^{n+1} - h_j^{n+1} = F\left(h^{n-1}, u^{n-1}\right)$$

lineáris Helmholtz-egyenletet

Advekciót és gravitációs hullám-tagokat tartalmazó egyenlet

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u_0 \dfrac{\partial u}{\partial x} + g \dfrac{\partial h}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial h}{\partial t} + u_0 \dfrac{\partial h}{\partial x} + H \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

Hullámmegoldás:

$$u(x,t) = \bar{u} \cdot e^{ik(x-ct)}$$

$$h(x,t) = \bar{h} \cdot e^{ik(x-ct)}$$

A terjedési sebesség: $c = u_0 \pm \sqrt{gH}$

Például: időben leapfrog + térben centrált séma:

$$\begin{cases} \dfrac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + u_0 \dfrac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} + g \dfrac{h_{j+1}^n - h_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \\ \dfrac{h_j^{n+1} - h_j^{n-1}}{2\Delta t} + u_0 \dfrac{h_{j+1}^n - h_{j-1}^n}{2\Delta x} + H \dfrac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} u_j^n &= \hat{u} \cdot (\lambda)^n \cdot e^{ikx_j} \\ h_j^n &= \hat{h} \cdot (\lambda)^n \cdot e^{ikx_j} \end{aligned} \right\}$$ behelyettesítése után:

$$\hat{u} \cdot \left(\lambda^2 - 1\right) + u_0 \cdot \hat{u} \cdot \lambda \cdot i \cdot \sin(k\Delta x) \frac{2\Delta t}{\Delta x} + g \cdot \hat{h} \cdot \lambda \cdot i \cdot \sin(k\Delta x) \frac{2\Delta t}{\Delta x} = 0$$

$$\hat{h} \cdot \left(\lambda^2 - 1\right) + u_0 \cdot \hat{h} \cdot \lambda \cdot i \cdot \sin(k\Delta x) \frac{2\Delta t}{\Delta x} + H \cdot \hat{u} \cdot \lambda \cdot i \cdot \sin(k\Delta x) \frac{2\Delta t}{\Delta x} = 0$$

Tehát:

$$\hat{u}\cdot\left(\lambda^2-1\right)+u_0\cdot\hat{u}\cdot\lambda\cdot i\cdot\sin\left(k\Delta x\right)\frac{2\Delta t}{\Delta x}+g\cdot\hat{h}\cdot\lambda\cdot i\cdot\sin\left(k\Delta x\right)\frac{2\Delta t}{\Delta x}=0$$

$$\hat{h}\cdot\left(\lambda^2-1\right)+u_0\cdot\hat{h}\cdot\lambda\cdot i\cdot\sin\left(k\Delta x\right)\frac{2\Delta t}{\Delta x}+H\cdot\hat{u}\cdot\lambda\cdot i\cdot\sin\left(k\Delta x\right)\frac{2\Delta t}{\Delta x}=0$$

Ha $\frac{\hat{h}}{\hat{u}}=\sqrt{\frac{H}{g}}$:

$$\lambda^2+\lambda\cdot 2i\cdot\sin\left(k\Delta x\right)\cdot\left(u_0+\sqrt{gH}\right)\frac{\Delta t}{\Delta x}-1=0$$

$$\lambda^2+p\cdot\lambda\cdot 2i-1=0 \quad\leftarrow\quad p=\left(u_0+\sqrt{gH}\right)\cdot\frac{\Delta t}{\Delta x}\cdot\sin\left(k\Delta x\right)$$

Stabilitási kritérium:

$$\boxed{\Delta t\le\frac{\Delta x}{u_0+\sqrt{gH}}}$$

Továbbra is döntően a gravitációs hullám fázissebessége határozza meg az időlépcsőt

Összegzés

Leírt mozgásformák	1D lineáris advekció	Gravitációs hullám	Advekció + gravitációs hullám
Maximális terjedési sebesség	u_0	$\pm\sqrt{gH}$	$u_0 \pm \sqrt{gH}$
Explicit Euler + centrált térbeli séma	abszolút instabil	abszolút instabil	–
Implicit időbeli + centrált térbeli séma	abszolút stabil	abszolút stabil	?
Leapfrog + centrált térbeli séma	CFL	CFL	CFL
CFL kritérium	$\Delta t \leq \dfrac{\Delta x}{u_0}$	$\Delta t \leq \dfrac{\Delta x}{\sqrt{gH}}$	$\Delta t \leq \dfrac{\Delta x}{u_0 + \sqrt{gH}}$

Cél: az időlépcsőre vonatkozó kritérium enyhítése
(= hosszabb időlépés) a stabilitás és a pontosság megtartásával