

Meteorológiai adatasszimiláció 2.rész

2025.11.10.

Kardos-Várkonyi Anikó

varkonyi.a@met.hu

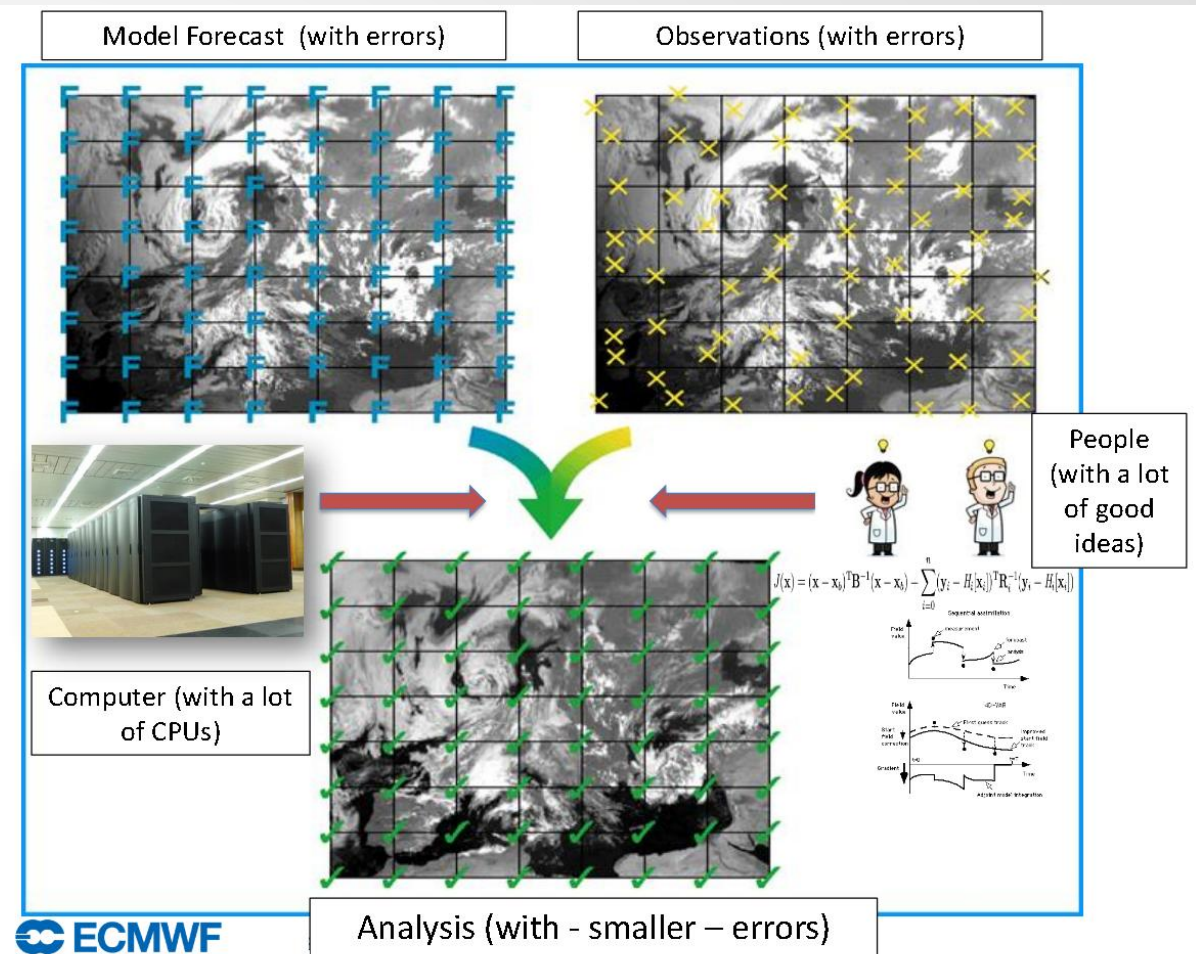
Bevezetés

Mi az adatasszimiláció célja?

Mit nevezünk analízisnek?

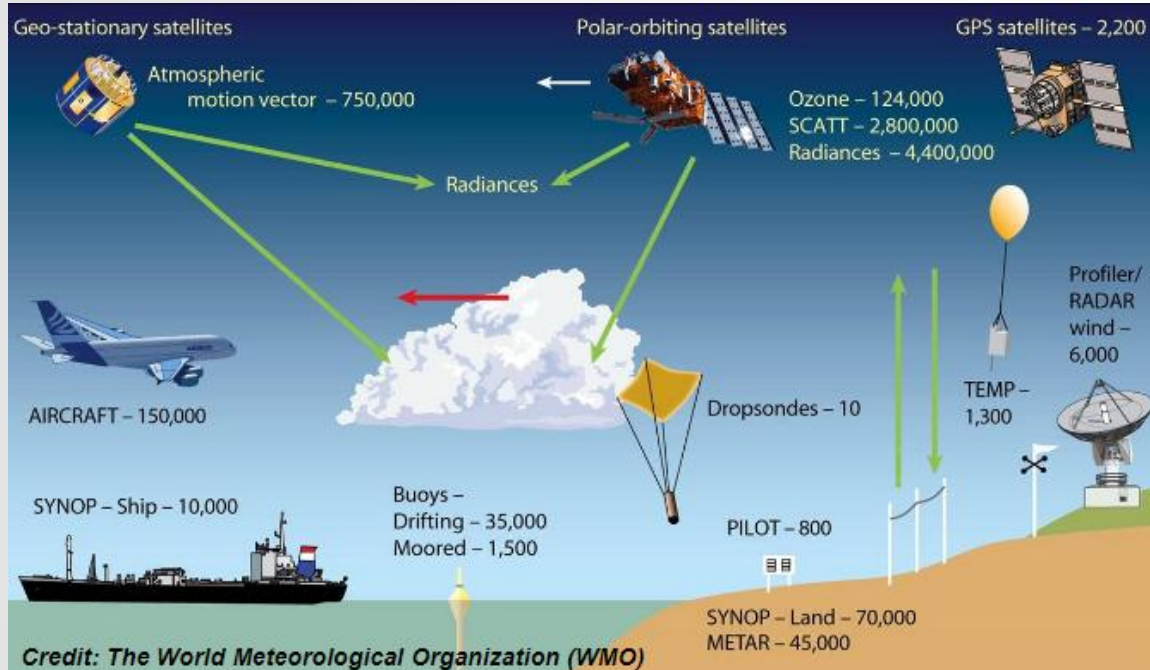
Mik szükségesek az adatasszimilációhoz?

Mik a legnagyobb nehézségek?

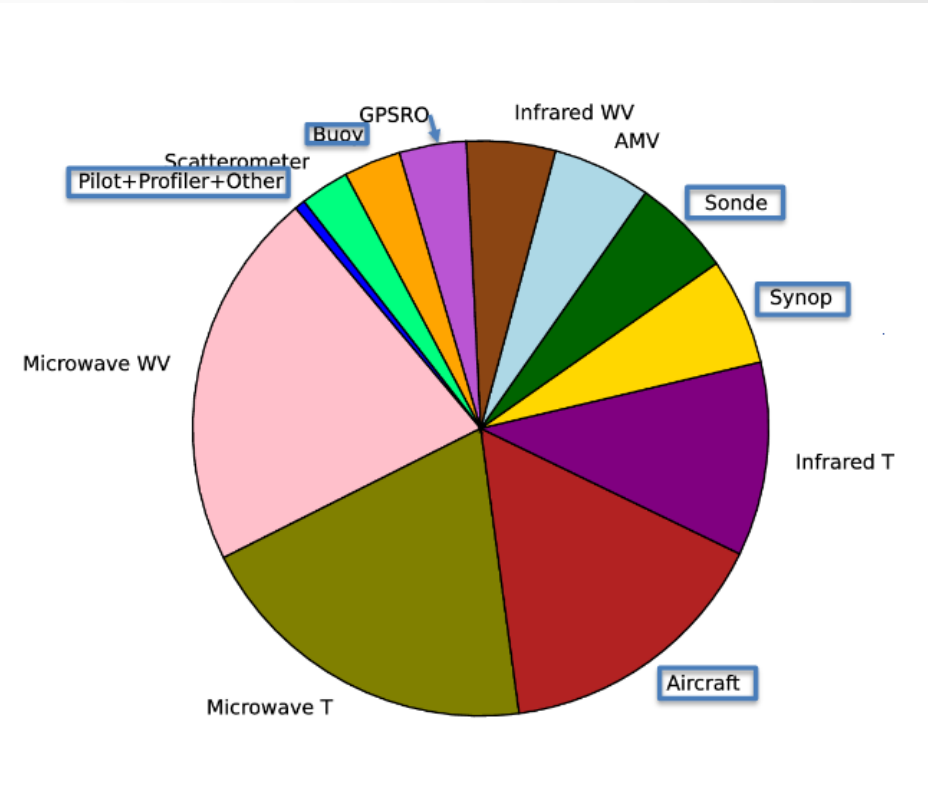


Forrás: Massimo Bonavita, ECMWF NWP training, 2019

Megfigyelések globális rendszere



Forrás: Tony McNally, ECMWF NWP training, 2015

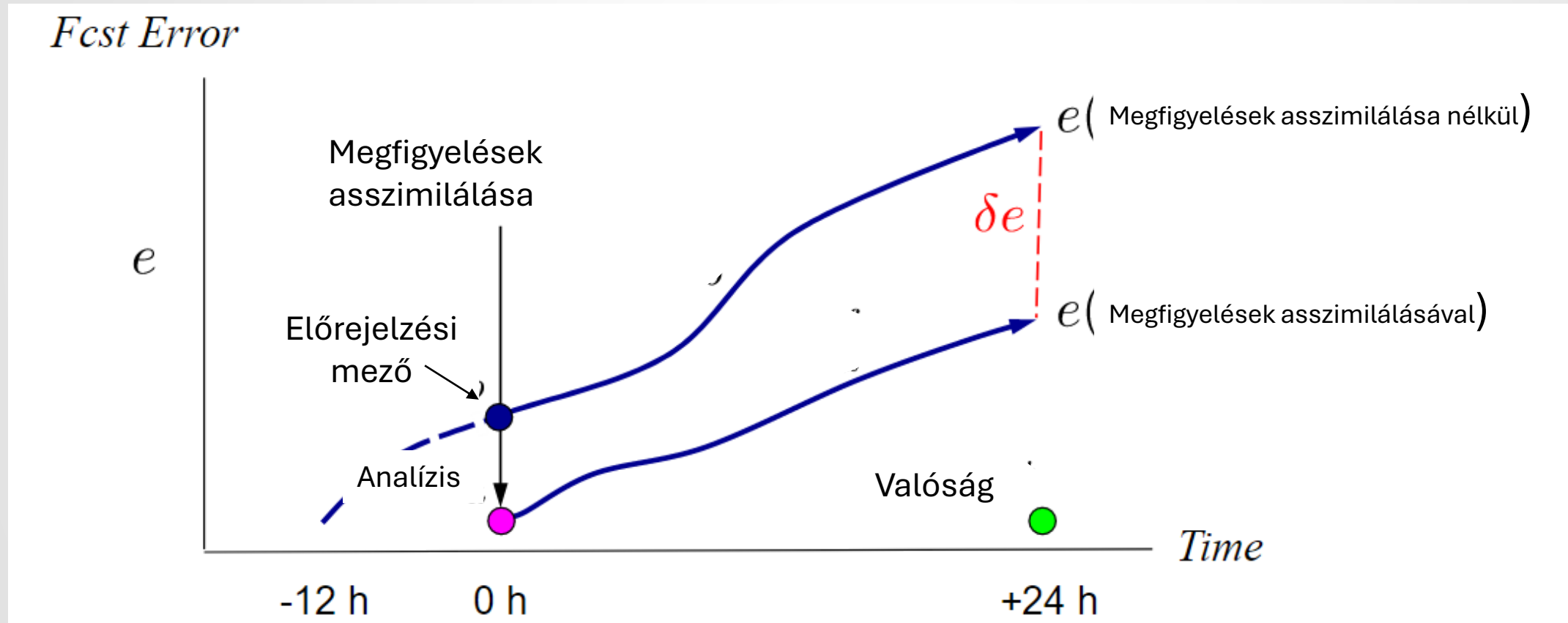


24 órás előrejelzés esetén:

- 70 % : műholdas adatok
- 30 %: in situ megfigyelések

Adatasszimiláció hatékonyságának az ellenőrzése

FSOI - Forecast Sensitivity Observation Impact



Modell-előrejelzés használata a becslésben

- 1 térbeli pont
- 1 változó: x
- x_a becslést adunk x_t -re (a valós állapotra)
- rendelkezésünkre állnak x_b modell-előrejelzés és y megfigyelés ε_b és ε_o hibával terhelve:

$$\mathbf{x}_b = \mathbf{x}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_b$$

$$y = \mathbf{x}_t + \varepsilon_o$$

$$\mathbf{x}_a = \hat{\mathbf{x}}_t = f(x, y)$$

$$E(\varepsilon_b) = E(\varepsilon_o) = 0$$

$$E(\varepsilon_b \varepsilon_o) = 0$$

$$\sigma_b^2 = E(\varepsilon_b^2), \sigma_o^2 = E(\varepsilon_o^2) \text{ ismertek}$$

Idealizált eset

Szeretnénk a terem hőmérsékletét megbecsülni a jelen pillanatban – T_t

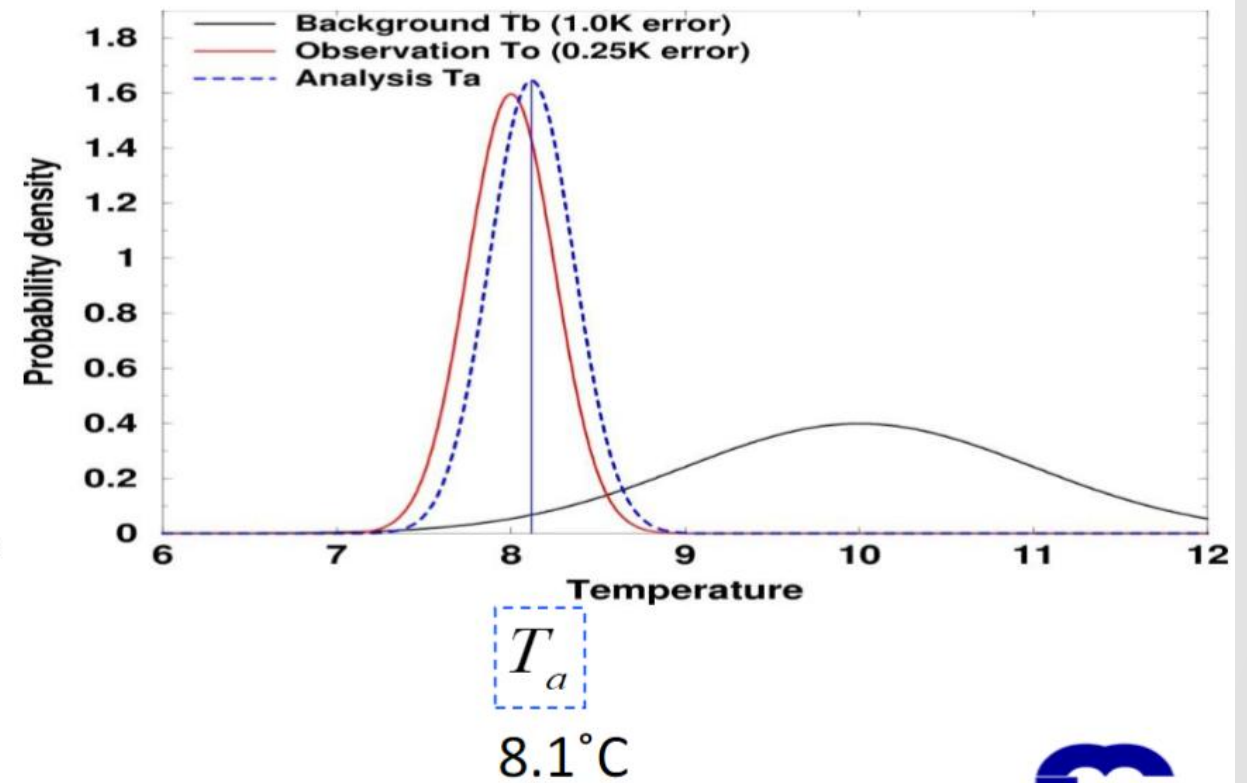
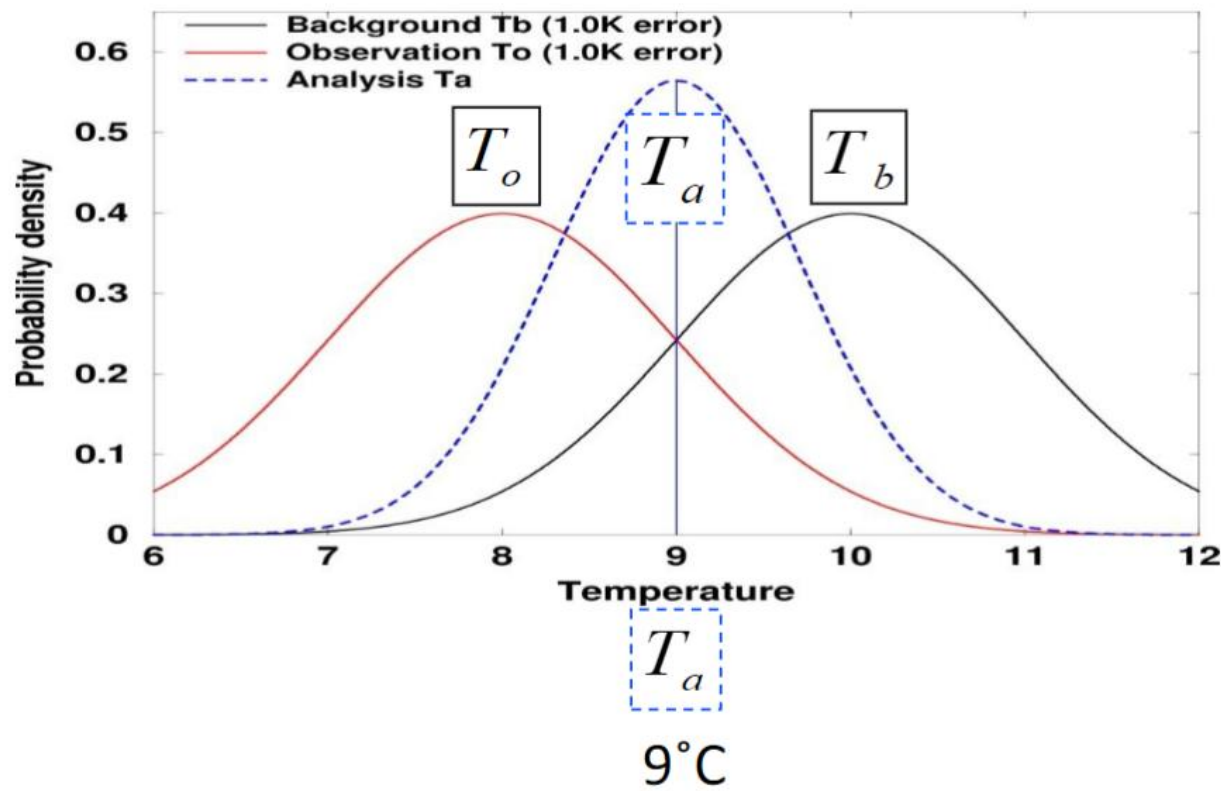
Rendelkezésünkre áll:

1. Hőmérős mérés: T_o
2. Előzetes becslés: T_b
(pl. óra előtt megmértük, a létszám ismeretében meg tudjuk becsülni a változást)

A rendelkezésre álló információk hibája:

$$\varepsilon_o = T_o - T_t \quad \text{és} \quad \varepsilon_b = T_b - T_t$$

Modell-előrejelzés használata a becslésben



Legkisebb négyzetek módszere

$$\begin{aligned}x_a &= k_1 x_b + k_2 y = \\&= x_b + (k_1 - 1)x_b + k_2 y = \\&= x_b - k_2 x_b + k_2 y = \\&= x_b + k_2 (y - x_b)\end{aligned}$$

$$x_a = x_b + \frac{\sigma_b^2}{\sigma_b^2 + \sigma_o^2} (y - x_b)$$

$$k_1 = \frac{\sigma_o^2}{\sigma_b^2 + \sigma_o^2} \qquad k_2 = 1 - k_1 = \frac{\sigma_b^2}{\sigma_b^2 + \sigma_o^2}$$

Maximum likelihood módszer

$$J(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b)^2}{\sigma_b^2} + \frac{1}{2} \frac{(\mathbf{x} - y)^2}{\sigma_o^2}$$

Többdimenziós felírás

Szükséges operátorok

valóság: $\mathbf{X}_t$ valós állapot az analízis időpontjában
analízis: $\mathbf{X}_a$ az adatasszimiláció eredménye (a kezdeti feltétel)
háttér mező: $\mathbf{X}_b$ az analízis időpontjára vonatkozó előrejelzés
megfigyelések: $\mathbf{y}$ az analízis időpontjában aktuális megfigyelések

$\mathbf{X}_t$, $\mathbf{X}_a$ és $\mathbf{X}_b$ $n \sim 10^7$ dimenziós vektorok, $\mathbf{y}$ $p \sim 10^5$ dimenziós vektor



Probléma: az $\mathbf{x}$ és az $\mathbf{y}$ eltérő dimenziói miatt nem összehasonlíthatók

Többdimenziós felírás

Megoldás: megfigyelési operátor bevezetése

$$\mathbf{x} \xrightarrow{\mathcal{H}(\cdot)} \mathcal{H}(\mathbf{x}) \rightarrow \text{Scales} \leftarrow \mathbf{y}$$

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}_t) = \mathbf{y}_t$$

A megfigyelési operátor linearizáltja: $\mathbf{H} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x})$ ($\mathbf{H}_{n \times p}$ mátrix)

A megfigyelési operátor adjungáltja: $\mathbf{H}^T$ ($\mathbf{H}_{n \times p}^T$ mátrix)

Hibák több dimenzióban

analízis hiba: $\boldsymbol{\varepsilon}_a = \mathbf{x}_t - \mathbf{x}_a$ $n \sim 10^7$

háttér hiba: $\boldsymbol{\varepsilon}_b = \mathbf{x}_t - \mathbf{x}_b$ $n \sim 10^7$

megfigyelési hiba: $\boldsymbol{\varepsilon}_o = H(\mathbf{x}_t) - \mathbf{y}$ $p \sim 10^5$

hiba kovariancia mátrixok:

analízis

$$\mathbf{A} = E(\boldsymbol{\varepsilon}_a \boldsymbol{\varepsilon}_a^T)$$

(n x n)

háttér

$$\mathbf{B} = E(\boldsymbol{\varepsilon}_b \boldsymbol{\varepsilon}_b^T)$$

(n x n)

megfigyelés

$$\mathbf{R} = E(\boldsymbol{\varepsilon}_o \boldsymbol{\varepsilon}_o^T)$$

(p x p)

Optimális interpoláció (OI)

Az ECMWF-nél ezt a módszert operatíván 1979 és 1996 között használták

Az adatasszimiláció során az analízis egyenlet (Best Linear Unbiased Estimation – BLUE) megoldásával kapjuk a becsült kezdeti mezőt:

$$\mathbf{x}_a = \mathbf{x}_b + \mathbf{K}(\mathbf{y} - H(\mathbf{x}_b))$$

A megfigyelések a $\mathbf{K}$ súly (gain) mátrix függvényében adnak hozzájárulásokat a first-guesshez.

$$\mathbf{K} = \mathbf{B}\mathbf{H}^T (\mathbf{H}\mathbf{B}\mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1}$$

A súlyfüggvény a $\mathbf{B}$ és $\mathbf{R}$ kovariancia mátrixok (megbízhatóság) kombinációjából áll

1 térbeli pontra felírva a $\mathbf{K}$ mátrixot:

$$\mathbf{H} = \mathbf{I} \quad \mathbf{B} = \sigma_b^2 \quad \mathbf{R} = \sigma_o^2$$

$$\mathbf{K} = \frac{\sigma_b^2}{(\sigma_b^2 + \sigma_o^2)}$$

Visszkapjuk a k_2 együttható képletét

Milyen nagyságrendű az invertálandó mátrix?

- $\mathbf{R}$ mátrix nagyságrendjével megegyező
- $\mathbf{R}$ mátrix mérete a megfigyelések számától függ
- globális léptékben egy 10^5

Mi a probléma ilyen méretű mátrix invertálásával?

ekkora méretű mátrix invertálása túl költséges

csökkenteni kell valamilyen módon az invertálandó mátrix méretét

Optimális interpoláció

Probléma: az invertálandó mátrix dimenziója túl nagy

Feladat: csökkenteni kell a felhasznált megfigyelések számát, így csökken az invertálandó mátrix dimenziója

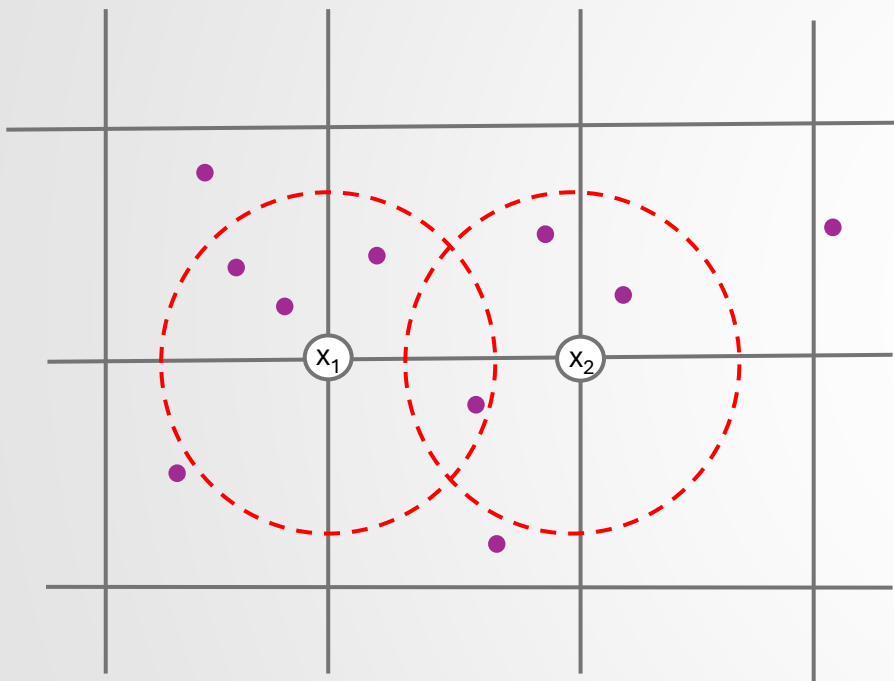
Megoldás: kisebb területen (kevesebb megfigyeléssel) számolunk egyszerre, és a lokális megoldások együttese adja majd a globális megoldást → két-féle megoldás létezik

$$\mathbf{x}_a^{(i)} = \mathbf{x}_b^{(i)} + \mathbf{K}^{(i)} \left[\mathbf{y}^{(i)} - \mathcal{H}^{(i)}(\mathbf{x}_b) \right]$$

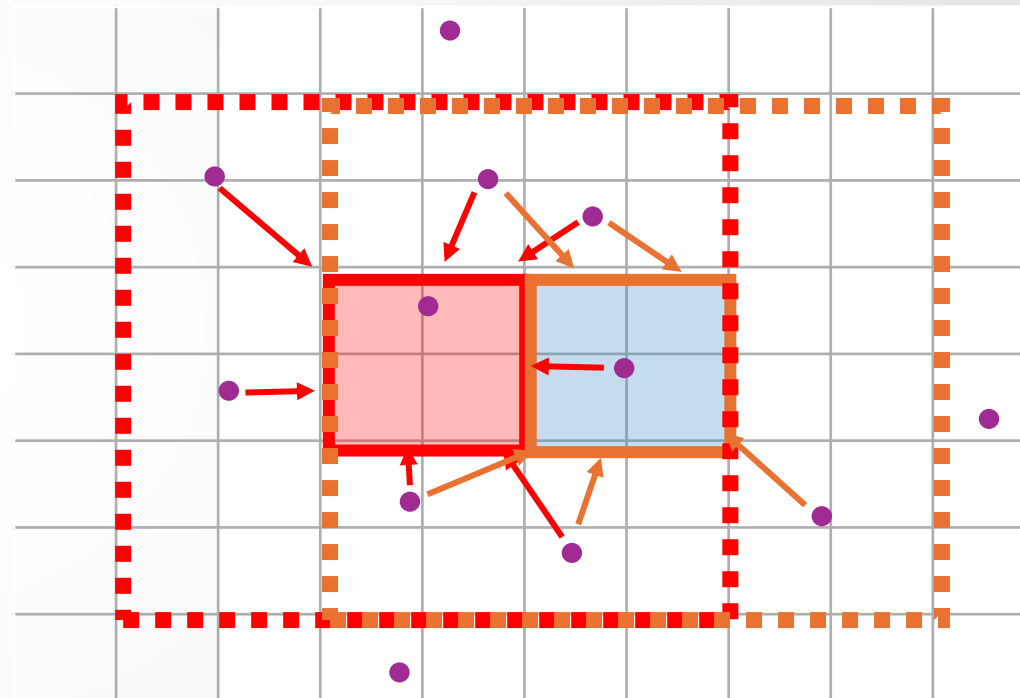
$$\mathbf{x}_a = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_a^{(1)} \\ \mathbf{x}_a^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_a^{(M)} \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_b = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_b^{(1)} \\ \mathbf{x}_b^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_b^{(M)} \end{pmatrix} \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}^{(1)} \\ \mathbf{K}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{K}^{(M)} \end{pmatrix}$$

Optimális interpoláció

Első megoldás: az analízis összes pontjára kiszámítjuk az analízis egyenletet



Második megoldás: boxonként számítjuk ki az analízis egyenletet



Vajon miért nem ezt használják a mai korszerű modellek?

K mátrix egyenletében a H csak lineáris lehet



sok megfigyelés esetén a H nem lehet lineáris (pl. műhold)

a megfigyelések számának csökkentésével csökkenthető a költség



az összes rendelkezésre álló információt fel szeretnénk használni az analízis készítésekor (minél többet)

Variációs módszer több dimenzióban

Lényege: veszteségfüggvény minimalizálása

Variációs veszteségfüggvény:

$$J(\mathbf{x}) = \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b)^T \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b)}_{J_b \text{ háttér tag}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{y} - H(\mathbf{x}))^T \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y} - H(\mathbf{x}))}_{J_o \text{ megfigyelési tag}}$$

A veszteségfüggvény $\mathbf{x}$ szerinti minimumában kapjuk meg az $\mathbf{x}_a$ analízist

A variációs módszer és az optimális interpoláció **lineáris megfigyelési operator** esetén ekvivalensek.

Megvalósítási problémák a variációs módszernél

Probléma: az $\mathbf{x}$ dimenziója nagy (10^7)

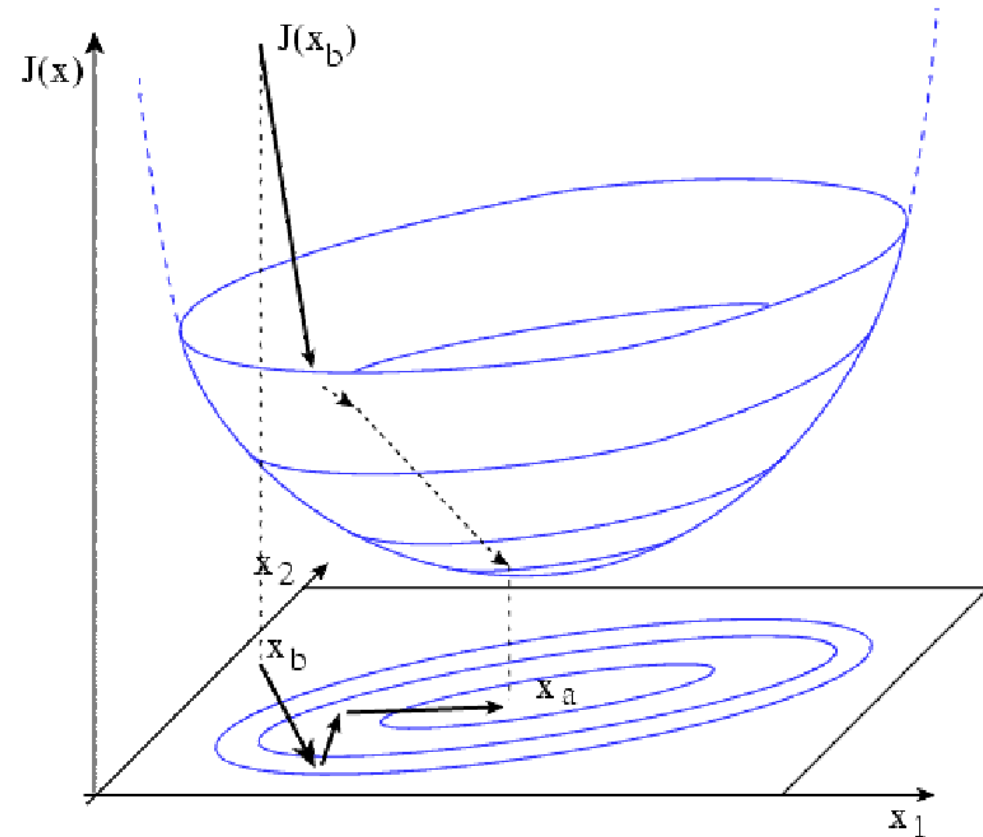
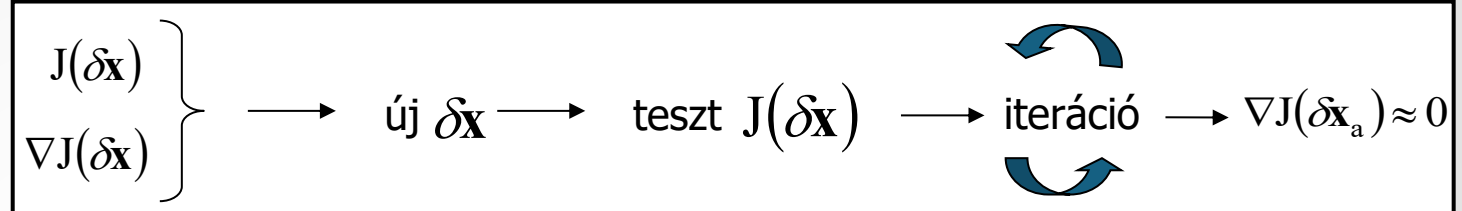
- a gradiens számolása nem triviális
- az $\mathbf{x}$ szerinti gradiens soha sem lesz pontosan nulla
- $\mathbf{x}_a$ -t nem kapjuk meg egy egyszeri gradiens számolással

→ iteratív kereső (minimalizáló) algoritmusok alkalmazása

A first-guess-től vett eltérésre (inkrementumra) írjuk fel a veszteség fv-t:

$$\begin{cases} \delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_b \\ \mathbf{d} = \mathbf{y} - H(\mathbf{x}_b) \end{cases}$$

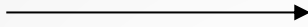
$$J(\delta \mathbf{x}) = \frac{1}{2} \delta \mathbf{x}^T \mathbf{B}^{-1} \delta \mathbf{x} + \frac{1}{2} (\mathbf{d} - \mathbf{H} \delta \mathbf{x})^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{d} - \mathbf{H} \delta \mathbf{x})$$



Variációs módszerek

3DVAR

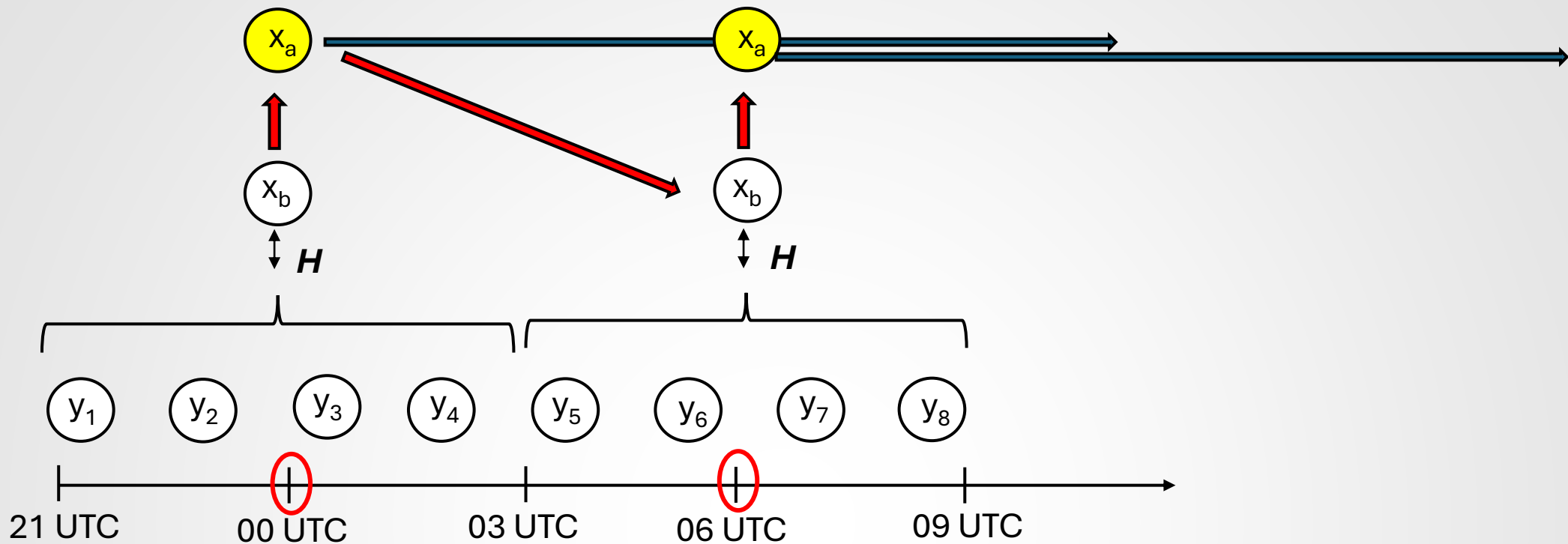
- Egy adott időpillanatra vonatkozó 3D háttér mezőt javítunk az aktuális megfigyelésekkel
- Az analízis egy 3D-s mező: $\mathbf{x}_a$ az állapotvektor egy adott időpillanatban
- A $H(\mathbf{x})$ egy adott időpontbeli interpoláció, illetve transzformáció
- AROME (3 órás 3DVAR), ALADIN (6 órás 3DVAR)



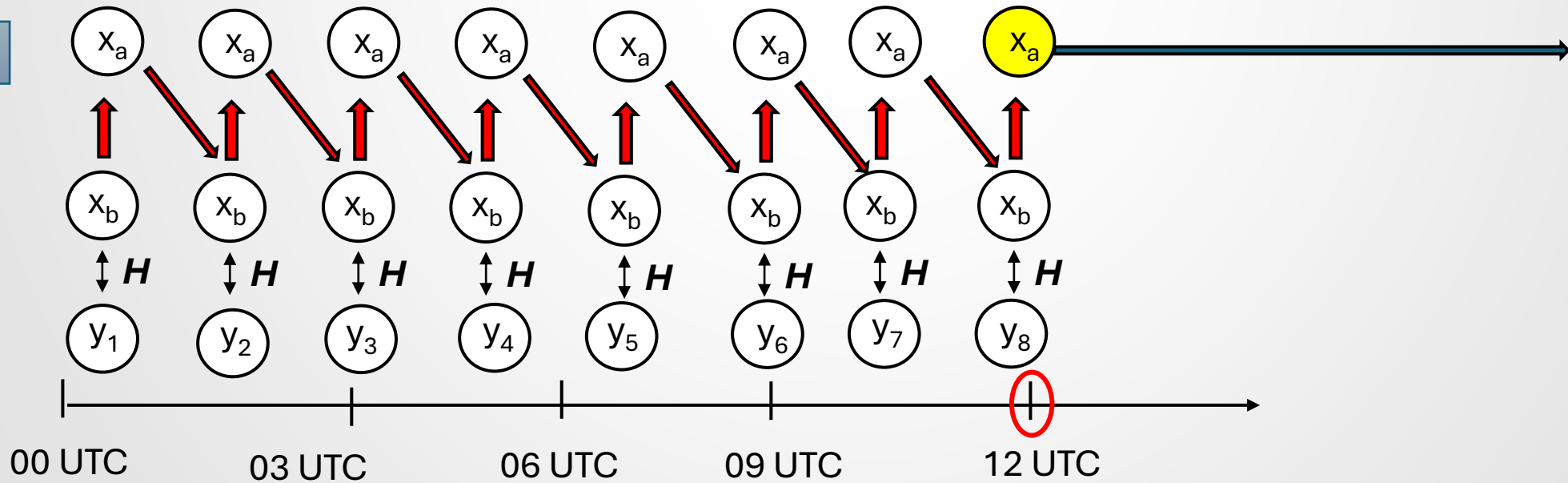
4DVAR

- Egy **időbeli** (4D) „**trajektóriát**” illesztünk egy adott időintervallumban (**asszimilációs ablak**) tett megfigyelésekhez
- Az analízis egy trajektória: $\mathbf{x}_a$ az állapotvektor időbeli sorozata
- A G operátor magába foglalja a $H(\mathbf{x})$ -t és a numerikus modell integrálást is (a veszteségfv.-ben is ez az operátor szerepel a $H(\mathbf{x})$ helyén)
- ECMWF

3D-VAR



4D-VAR



Optimális interpoláció

„lokális”

Csak lineáris megfigyelési operátor esetén ad jó becslést (jelenleg még a felszíni asszimilációban használják)

Variációs módszerek

„globális”

Nem csak lineáris megfigyelési operátor esetén ad megfelelő becslést

- Példa nem-lineáris megfigyelési operátorra: műholdas sugárzási értékek, radar reflektivitás, GPS (az új megfigyelési technikák felhasználása megköveteli a variációs módszer alkalmazását).

A hiba kovariancia mátrixok szerepe

$$\mathbf{x}_a = \mathbf{x}_b + \mathbf{K}(\mathbf{y} - H(\mathbf{x}_b))$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{B}\mathbf{H}^T (\mathbf{H}\mathbf{B}\mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1}$$

A $\mathbf{B}$ és $\mathbf{R}$ mátrixok szerepének tanulmányozásához vegyük az analízis egyenletét a következő egyszerűsített modellben:

- a modellünk álljon i és j rácspontokból
- a háttérmező vektora $\mathbf{x}_b$, amely az alábbi komponensekkel fejezhető ki: $(x_{b,i}, x_{b,j})^T$
- egyetlen y megfigyelésünk van, a j rácspontban
- feltételezzük, hogy a háttérmező szórásnégyzetei mind a két pontban ismertek és ugyanakkorák $\sigma_{b,i}^2 = \sigma_{b,j}^2 = \sigma_b^2$
- továbbá a figyelembe vesszük, hogy a két rácspont közötti kovarianciák is ismertek:
 $\text{COV}_b = \text{COV}_{b(i,j)} = \text{COV}_{b(j,i)}$
- illetve még a megfigyelési hiba szórásnégyzete σ_o^2 is ismert

A hiba kovariancia mátrixok szerepe

Ebben az egyszerű esetben az alábbiak szerint írhatóak fel a $\mathbf{H}$, $\mathbf{B}$ és $\mathbf{R}$ mátrixok:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \sigma_b^2 & cov_b \\ cov_b & \sigma_b^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \sigma_o^2$$

$$\mathbf{x}_a = \mathbf{x}_b + \mathbf{K}(\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}_b) \quad (1)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{B}\mathbf{H}^T(\mathbf{H}\mathbf{B}\mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1} \quad (2)$$



$$\begin{pmatrix} x_{a,i} \\ x_{a,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{b,i} \\ x_{b,j} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{cov_b}{\sigma_b^2 + \sigma_o^2} \\ \frac{\sigma_b^2}{\sigma_b^2 + \sigma_o^2} \end{pmatrix} (y - x_{b,j})$$

(3)

A hiba kovariancia mátrixok szerepe

Jelöljük az analízis és a háttérmező különbségét:

$$\delta x_i = (x_{a,i} - x_{b,i})$$

$$\delta x_j = (x_{a,j} - x_{b,j})$$

Ennek a különbségnek a neve **inkrementum**, amely azt hivatott megmutatni, hogy az adatasszimiláció során milyen „korrekció” történt

Jelöljük a j pontbeli megfigyelés és háttérmező különbségét:

$$\Delta y_j = (y - x_{b,j})$$

(3) –ba helyettesítve

$$\delta x_i = \frac{cov_b}{\sigma_b^2 + \sigma_o^2} \Delta y_j$$

$$\delta x_j = \frac{\sigma_b^2}{\sigma_b^2 + \sigma_o^2} \Delta y_j$$

(4)

(5)

$$\delta x_i = \frac{cov_b}{\cancel{\sigma_b^2 + \sigma_o^2}} \delta x_j \frac{\cancel{\sigma_b^2 + \sigma_o^2}}{\sigma_b^2}$$

(5) –t átrendezve

$$\Delta y_j = \delta x_j \frac{\sigma_b^2 + \sigma_o^2}{\sigma_b^2}$$

(6)

$$\delta x_i = \frac{cov_b}{\sigma_b^2} \delta x_j = corr_b \delta x_j$$

A hiba kovariancia mátrixok szerepe

B-mátrix függ:

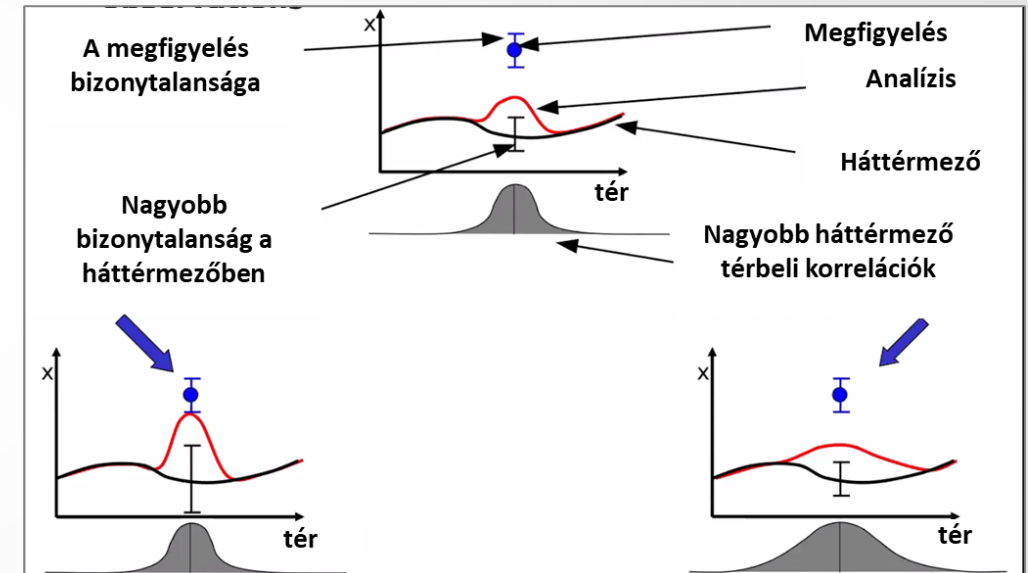
- A modelltől és annak felbontásától
- A földrajzi területtől
- A meteorológiai helyzettől
- A megfigyelőhálózat sűrűségétől

B-mátrix szerepe:

- A megfigyelésekből származó információk kiterjesztése a modellrácsra
- Statisztikailag konzisztens inkrementumok biztosítása a modell szomszédos rácspontjai és szintjei számára
- Annak biztosítása, hogy egy megfigyelés (pl. hőmérséklet) dinamikailag konzisztens inkrementumokat eredményezzen más változóknak (pl. örvényesség, divergencia)

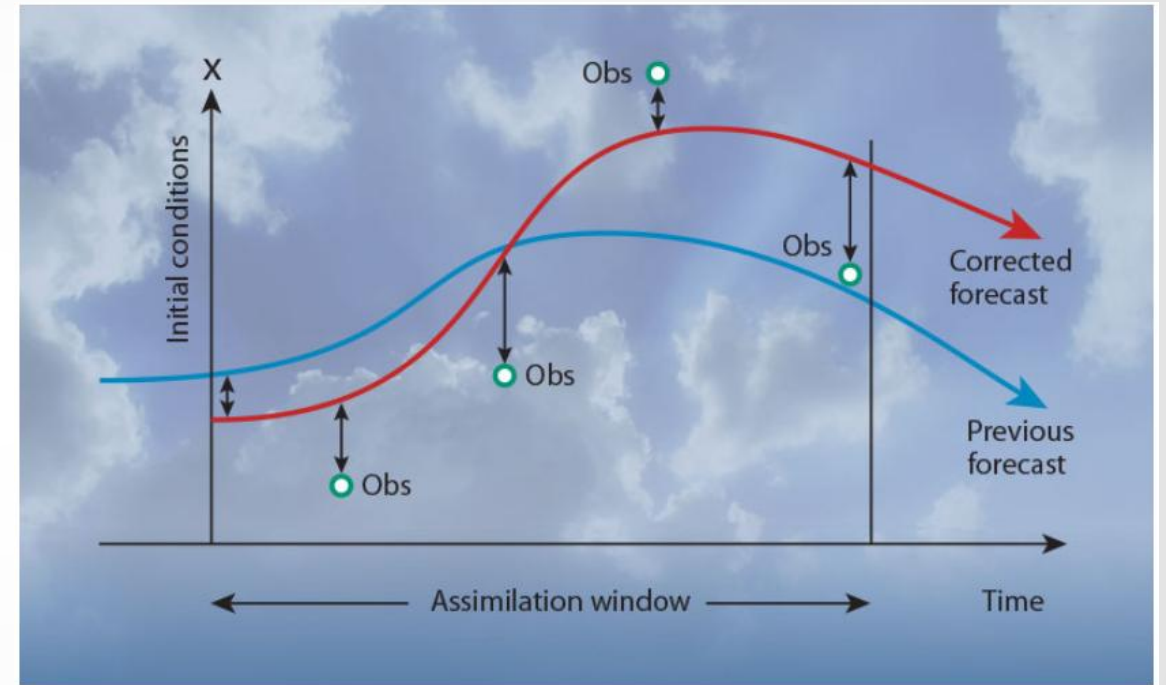
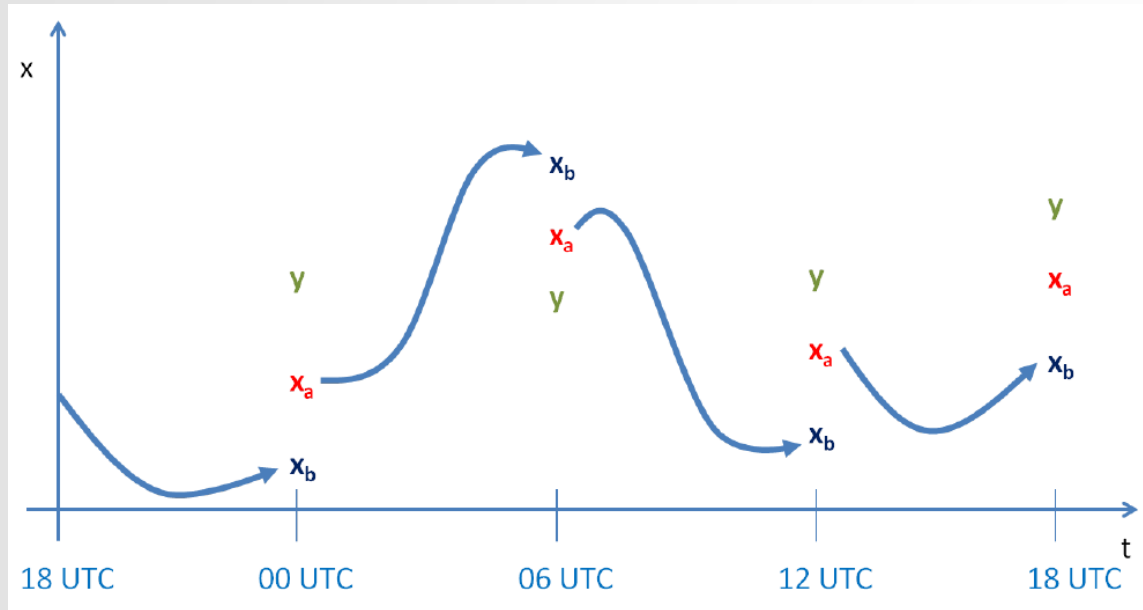
B-mátrix meghatározásának a nehézségei:

- A légkör valós állapotát nem ismerjük → honnan tudjuk mennyire hibás a háttérmező?!
- A B-mátrix hatalmas méretű → kénytelenek vagyunk leegyszerűsíteni ahhoz, hogy számolni lehessen vele



Adatasszimilációs ciklus

A dinamikai modell megfigyelésekkel való „frissítése” statisztikailag optimális módon



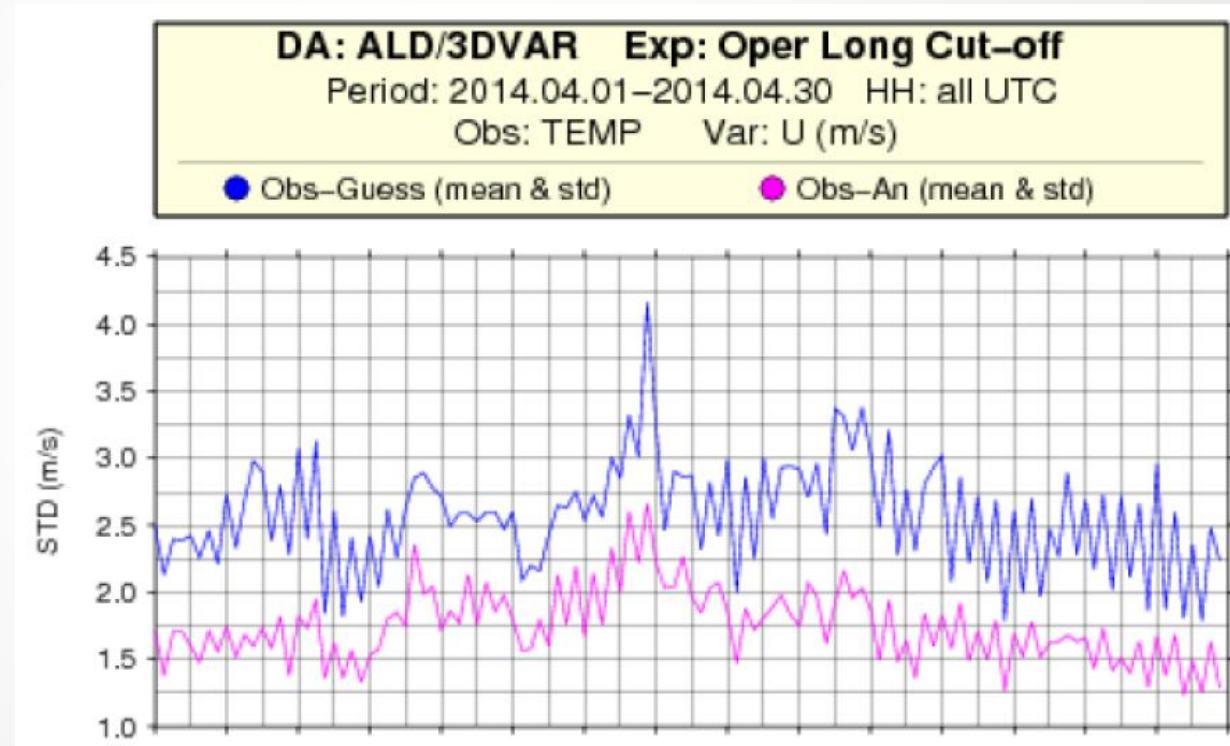
x_b : az analízis időpontjára vonatkozó modell-előrejelzés, background
 y : megfigyelések
 x_a : az analízis, vagyis a valós állapot legjobb becslése x_b és y alapján

A Kalman Filter elmélete

Az előrejelzések sikere függ az időjárási helyzettől



A háttér hiba (ε_b) és kovariancia mátrixa (**B**) időben rendkívül változékonyak!



Kálmán Filter: figyelembe vesszük a háttér hiba időbeli változékonyságát, azaz egy **időben fejlődő B** mátrixot használunk

Mi adja meg B időbeli változását?

$$\begin{aligned}\mathbf{B}^{i+1} &= E\left(\boldsymbol{\varepsilon}_b^{i+1} \boldsymbol{\varepsilon}_b^{i+1T}\right) & i: \text{asszimilációs lépések száma} \\ x_b^{i+1} &= M\left(x_a^i\right) & (1)\end{aligned}$$

Vezessük be a modellhibát: $\boldsymbol{\varepsilon}_M^{i+1} = \mathbf{x}_t^{i+1} - \mathbf{M}(\mathbf{x}_t^i) \rightarrow \mathbf{x}_t^{i+1} = \mathbf{M}(\mathbf{x}_t^i) + \boldsymbol{\varepsilon}_M^{i+1} \quad (2)$

Írjuk fel a háttérhibát (2)-(1):

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_t^{i+1} - \mathbf{x}_b^{i+1} &= \mathbf{M}(\mathbf{x}_t^i) - \mathbf{M}(\mathbf{x}_a^i) + \boldsymbol{\varepsilon}_M^{i+1} \approx \\ &\approx \mathbf{M}(\mathbf{x}_t^i - \mathbf{x}_a^i) + \boldsymbol{\varepsilon}_M^{i+1} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_b^{i+1} &\approx \mathbf{M}(\boldsymbol{\varepsilon}_a^i) + \boldsymbol{\varepsilon}_M^{i+1}\end{aligned}$$

$\mathbf{M}$: a nem-lineáris modell-operátor **tangens lineáris** közelítése $\mathbf{M} = \frac{\partial M}{\partial \mathbf{x}}$

Írjuk fel **B**-t:

$$\begin{aligned}\mathbf{B}^{i+1} &= E\left(\boldsymbol{\varepsilon}_b^{i+1} \boldsymbol{\varepsilon}_b^{i+1T}\right) \approx E\left[\left(\mathbf{M}\boldsymbol{\varepsilon}_a^i + \boldsymbol{\varepsilon}_M^{i+1}\right)\left(\mathbf{M}\boldsymbol{\varepsilon}_a^i + \boldsymbol{\varepsilon}_M^{i+1}\right)^T\right] = \\ &= \mathbf{M}E\left(\boldsymbol{\varepsilon}_a^i \boldsymbol{\varepsilon}_a^{iT}\right)\mathbf{M}^T + E\left(\boldsymbol{\varepsilon}_M^{i+1} \boldsymbol{\varepsilon}_M^{i+1T}\right) = \mathbf{M}\mathbf{A}^i\mathbf{M}^T + \mathbf{Q}^{i+1}\end{aligned}$$

$$\mathbf{B}^{i+1} \approx \mathbf{M}\mathbf{A}^i\mathbf{M}^T + \mathbf{Q}^{i+1}$$

A: analízishiba kovariancia mátrix

Q: modellhiba kovariancia mátrix

Kalman-filter egyenletek

Az analízis egyenlet:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_a^i &= \mathbf{x}_b^i + \mathbf{K}^i (\mathbf{y}^i - H(\mathbf{x}_b^i)) \\ \mathbf{K}^i &= \mathbf{B}^i \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \mathbf{B}^i \mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1} \\ \mathbf{A}^i &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}^i \mathbf{H}) \mathbf{B}^i\end{aligned}$$

Az időbeli fejlődést leíró dinamikai egyenletek:

$$\begin{aligned}x_b^{i+1} &= M(x_a^i) \\ \mathbf{B}^{i+1} &\approx \mathbf{M} \mathbf{A}^i \mathbf{M}^T + \mathbf{Q}^{i+1}\end{aligned}$$



To access this activity, students
go to zzi.sh and insert

ake94796

 Copy class code



Irodalom

Berre, L., 2000: Estimation of synoptic and meso scale forecast error covariances in a limited area model. *Mon Weather Rev* **128**, 644-667.

Bouttier, F. and Courtier, P., 1999: Data Assimilation concepts and methods. *ECMWF Lecture Series (Data assimilation and use of satellite data, http://www.ecmwf.int/newsevents/training/lecture_notes/pdf_files/ASSIM/Ass_cons.pdf)* 72.

Dévényi, D. és Gulyás, O., 1988: Matematikai statisztikai módszerek a meteorológiában, *Tankönyvkiadó*, Budapest, 443 pp.

Gandin, L.S., 1963: Objective analysis of meteorological fields, *Gidrometeorologicheskoe Izdatelstvo*, Leningrad, English translation by Israeli Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1965

Gilbert, J. and Lemarechal, C., 1989: Some numerical experiments with variable-storage quasi-Newton algorithms, *Mathematical Programming* **45**, 407-435.

Kalnay, E., 2003: Atmospheric Modeling, Data Assimilation and Predictability, *Cambridge University Press*, Cambridge, 341 pp.

ECMWF Data Assimilation NWP training, 2019

<https://confluence.ecmwf.int/display/OPTR/Data+Assimilation>