

**A numerikus időjárési modellek felépítése:  
tér- és időskála, adatasszimiláció, diszkretizáció,  
parametrizációk, valószínűségi előrejelzések, éghajlati modellezés**

(Az „Alkalmazott számszerű előrejelzés” című elektronikus jegyzet II. fejezete)

Szépszó Gabriella, Bölöni Gergely, Horányi András, Szűcs Mihály

Budapest, 2013. szeptember

## Tartalomjegyzék

<b>II.1.</b>	<b>BEVEZETÉS (SZÉPSZÓ GABRIELLA)</b> .....	<b>2</b>
<b>II.2.</b>	<b>ADATASSZIMILÁCIÓ ÉS INICIALIZÁCIÓ (BÖLÖNI GERGELY ÉS HORÁNYI ANDRÁS)</b> ...	<b>12</b>
II.2.1.	Adatasszimiláció .....	12
II.2.2.	Inicializáció .....	20
II.2.3.	Feladatok .....	24
<b>II.3.</b>	<b>DISZKRETIZÁCIÓ</b> .....	<b>26</b>
II.3.1.	Véges különbséges közelítés (SZÉPSZÓ GABRIELLA) .....	26
II.3.2.	Spektrális módszerek (HORÁNYI ANDRÁS ÉS SZÉPSZÓ GABRIELLA) .....	37
II.3.3.	Feladatok .....	47
<b>II.4.</b>	<b>PARAMETRIZÁCIÓK (SZÉPSZÓ GABRIELLA)</b> .....	<b>49</b>
II.4.1.	A parametrizálandó folyamatok .....	49
II.4.2.	A numerikus modellekben alkalmazott parametrizációs eljárások .....	51
<b>II.5.</b>	<b>VALÓSZÍNŰSÉGI ELŐREJELZÉSEK (SZŰCS MIHÁLY ÉS HORÁNYI ANDRÁS)</b> .....	<b>59</b>
II.5.1.	A valószínűségi előrejelzések alapjai .....	59
II.5.2.	Ensemble előrejelzések .....	64
<b>II.6.</b>	<b>KLÍMAMODELLEZÉS (SZÉPSZÓ GABRIELLA)</b> .....	<b>70</b>
II.6.1.	Az éghajlati rendszer és modellezése .....	70
II.6.2.	Regionális alkalmazások .....	71
II.6.3.	Az éghajlati szimulációk bizonytalanságai .....	72
II.6.4.	Az éghajlati modellek alkalmazása .....	74
II.6.5.	Az éghajlati szimulációk eredményeinek felhasználása .....	76
<b>II.7.</b>	<b>ÖSSZEFOGLALÁS ÉS KITEKINTÉS (HORÁNYI ANDRÁS ÉS SZÉPSZÓ GABRIELLA)</b> .....	<b>78</b>
	KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS .....	80
	FELHASZNÁLT IRODALOM .....	81

## II.1. Bevezetés

**Szerző: Szépszó Gabriella**

A légköri mozgásrendszerek, s így az időjárás alakításában legfontosabb szerepet játszó hidro- és termodinamikai folyamatok kormányzó egyenleteit (a Newton-féle mozgásegyenleteket, a kontinuitási egyenletet, a termodinamikai egyenletet, valamint az univerzális gáztörvényt) az I. fejezetben ismertettük. A teljes egyenletrendszer leírja az összes légköri folyamatot a mikroskálától a globális léptékig. Ezek között azonban vannak olyan hullám-megoldások is (pl. a hanghullámok), amelyek meteorológiai szempontból nem relevánsak. 1948-ban Charney dolgozta ki a légköri mozgások nagyságrendi analizisének módszerét, amelynek segítségével elkülöníthetővé és kiszűrhetővé váltak azok a gyorsan terjedő mozgásformák, amelyek a meteorológiai folyamatok alakításában már nem vesznek részt (Charney, 1948). Ez azért volt létkérdés, mert ezek a hullámok hatással vannak az alkalmazott numerikus sémák stabilitására: kiszűrésük lehetővé tette nagyobb integrálási időlépcső használatát, s ezzel az egyenletrendszer megoldhatóvá vált a XX. század közepén rendelkezésre álló számítási kapacitással. Így jutottak el tehát az ún. *szűrt numerikus modellekig*, az első olyan dinamikai alapú számszerű előrejelző modellekig, melyek már gyakorlati célokra is alkalmazhatóak voltak (Práger, 1992).

A nagyságrendi analízis lényege, hogy a légköri mozgások karakterisztikus méretük és sebességük alapján eltérő geometriájú és dinamikájú osztályokba sorolhatók, s ezeket figyelembe véve a hidro-termodinamikai egyenletrendszer (HTER) egyszerűsített alakjait nyerhetjük (Práger, 1992). Az egyszerűsítésekben bizonyos mozgásformákat elhanyagolunk a többihez képest és a megmaradó mozgások kölcsönösen igazodnak egymáshoz a közöttük fennálló dinamikai kapcsolatokon keresztül. A kvázi-geosztrofikus közelítés például azt jelenti, hogy minden időpillanatban teljesül a nyomási és a sebességi mező között a geosztrofikus igazodás – nincs vertikális gyorsulás, a vertikális sebességi mező a kontinuitási egyenleten keresztül adaptálódik a horizontális sebességi mezőhöz. A kvázi-sztatikus (vagy hidrosztatikus) közelítés teljesülése esetén pedig a mozgásegyenlet harmadik komponensében a vertikális sebesség megváltozása elhanyagolhatóan kicsi az egyenlet többi tagjához képest, ekkor a  $w$  vertikális sebesség mint prognosztikai változó eltűnik és az egyenlet a statika alapegyenletére, azaz egy diagnosztikai egyenletre egyszerűsödik. Megjegyezzük, hogy a vertikális gyorsulás nulla volta nem jelenti azt, hogy a vertikális sebesség szükségszerűen nulla lenne:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \rightarrow w = \text{konstans} . \quad (\text{II.1.})$$

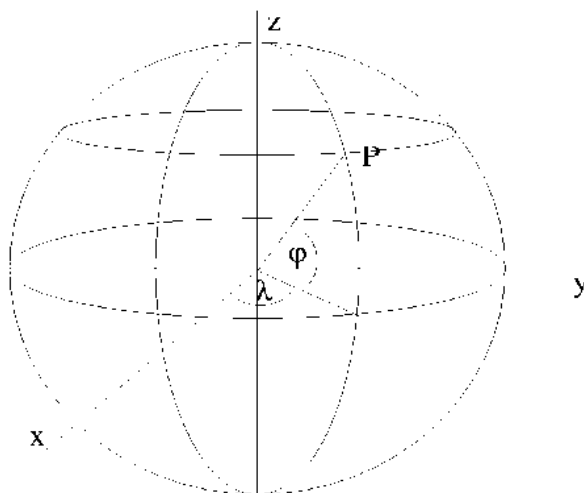
Tapasztalva a szűrt modellek alkalmazhatóságának korlátait, a 60-as évektől kezdve – ugyancsak Charney, illetve *Kibel* javaslatára (Charney, 1955; Kibel, 1957) – visszatértek a **primitív egyenletekhez** és azok numerikus megoldásához. Ennek gyakorlati megvalósítását már a számítástechnikai fejlődés is lehetővé tette. A mai számszerű előrejelző modellek a teljes egyenletrendszer numerikus megoldását tűzik ki célul, s az egyenletekben korábban alkalmazott közelítések közül legfeljebb a hidrosztatikus közelítést tartják meg.

Az (I.1–3.), (I.10.), (I.12–15.) és (I.22.) egyenletek által alkotott hidro-termodinamikai egyenletrendszer változói az áramlási sebesség (melynek három komponense  $u$ ,  $v$  és  $w$ , azaz a zonális, a meridionális és a vertikális sebesség), a hőmérséklet ( $T$ ), a légnyomás ( $p$ ), a sűrűség ( $\rho$ ) és a specifikus nedvesség ( $q$ ). Az állapotváltozók időben és térben változó mennyiségek, amit az egyenletrendszer **prognosztikai egyenletek** segítségével ír le: az egyenletrendszert az állapotegyenlettől eltekintve parciális differenciálegyenletek alkotják, melyek közül a termodinamikai és a különböző kontinuitási egyenletek elsőrendűek, a mozgásegyenletek teljesen

általános alakjukban pedig másodrendű parabolikus egyenletek. Az egyenletrendszer zárttságát (azaz, hogy az ismeretlen változók száma megegyezik az egyenletek számával) az univerzális gáztörvény biztosítja, amely **diagnosztikai kapcsolatot** teremt a nyomás, a sűrűség és a hőmérséklet között. Amennyiben nem alkalmazunk hidrosztatikus közelítést, akkor az egyenletrendszer **prognosztikai változói** a három komponensből álló áramlási sebesség, a hőmérséklet, a nedvesség és a nyomás (vagy annak valamilyen megfelelője). Ha a hidrosztatikus közelítéssel élünk, akkor a prognosztikai változók száma csökken: a vertikális sebesség diagnosztizált mennyiség lesz (azaz a prognosztikai változók segítségével számítjuk ki), illetve a teljes három-dimenziós nyomási mező helyett csak a felszíni nyomás lesz prognosztikai változó, a magasabb szinteken ezt is diagnosztikai úton számítjuk (a hőmérsékleti mező ismeretében, politrop légkör feltételezésével).

A hidro-termodinamikai egyenletrendszer analitikus megoldása nem ismert, ezért az egyenletrendszert időben és térben diszkrétizálni kényszerülünk, a megoldásra pedig numerikus módszerekkel adunk becslést. A térbeli diszkrétizáció során a folytonos meteorológiai változókat egy háromdimenziós rácsra képezzük le. Hogy megértsük a probléma nagyságrendjét, adjunk egy egyszerű becslést az előrejelzési feladat dimenziójára! Tegyük fel, hogy a hidro-termodinamikai egyenletrendszert egy Európa nagy részét lefedő tartományra oldjuk meg. A területet  $320 * 360$  rácspontból álló, 8 km-es felbontású rácshálózattal fedjük le, vertikális irányban pedig 50 szintre osztjuk fel a légkört (ez megfelel a korlátos tartományú időjárás modellekben ma alkalmazott horizontális és vertikális felbontásnak). Ekkor összesen  $320 * 360 * 50 \sim 5,8 * 10^6$  számú rácspontból áll a rácshálózatunk. Hidrosztatikus modell esetében 4 prognosztikai változóval számolva, az előrejelzés elkészítése időlépcsőnként egy  $10^7$  elemű vektor kiszámítását igényli.

Az (I.1–3.), (I.10.), (I.12–15.) és (I.22.) egyenletekkel a hidro-termodinamikai egyenletrendszert a Földhöz rögzített Descartes-féle koordináta-rendszerben írtuk fel. Az előrejelzési feladat típusától, geometriájától függően azonban más koordináta-rendszert is választhatunk. Mivel a légköri folyamatok megközelítőleg a földfelszínnel párhuzamosan zajlanak, ezért leírásukra kézenfekvőnek tűnik a **gömbi (szférikus) rendszer** használata. A szférikus rendszerben adott pont koordinátáit földrajzi szélessége ( $\varphi$ ), földrajzi hosszúsága ( $\lambda$ ) és a Föld középpontjától mért távolsága ( $r$ ) határozza meg a II.1. ábra szerint.



II.1. ábra. A gömbi koordináta rendszerben tetszőleges  $P$  pont koordinátáit a földrajzi szélessége ( $\varphi$ ), a földrajzi hosszúsága ( $\lambda$ ) és a Föld középpontjától mért távolsága ( $r$ ) határozza meg:  $x = r \cos \varphi \cos \lambda$ ,  $y = r \cos \varphi \sin \lambda$ ,  $z = r \sin \varphi$ .

A szférikus koordináta-rendszer  $\mathbf{i}_s, \mathbf{j}_s, \mathbf{k}_s$  egységvektorai minden pontban (rendre) a lokális keleti, északi és zenitirányt jelölik ki. Ez viszont azt jelenti, hogy irányuk pontonként változik. Ezért tetszőleges vektormennyiség időbeli megváltozása során nemcsak a vektor nagysága, de az egységvektorok iránya is változik (az  $s$  index a szférikus rendszerre utal):

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \frac{dX_1}{dt} \mathbf{i}_s + X_1 \frac{d\mathbf{i}_s}{dt} + \frac{dX_2}{dt} \mathbf{j}_s + X_2 \frac{d\mathbf{j}_s}{dt} + \frac{dX_3}{dt} \mathbf{k}_s + X_3 \frac{d\mathbf{k}_s}{dt}, \quad (\text{II.2.})$$

ami meglehetősen nehézkesé teszi a gömbi rendszer használatát. Nézzük meg például a szférikus rendszerben felírt mozgásegyenleteket (Práger, 1992):

$$\begin{aligned} \frac{du_s}{dt} - \frac{1}{r} \operatorname{tg} \varphi \cdot u_s v_s + \frac{1}{r} u_s w_s &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_s} + 2\Omega(v_s \sin \varphi - w_s \cos \varphi) \\ \frac{dv_s}{dt} + \frac{1}{r} \operatorname{tg} \varphi \cdot u_s u_s + \frac{1}{r} v_s w_s &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y_s} - 2\Omega u_s \sin \varphi \\ \frac{dw_s}{dt} - \frac{1}{r} (u_s u_s + v_s v_s) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z_s} - g + 2\Omega u_s \cos \varphi. \end{aligned} \quad (\text{II.3.})$$

Az egyenletek bal oldalán az időbeli deriváltak mögött megjelenő tagok az ún. *metrikus gyorsulások*, amelyek a szférikus rendszerbeli egységvektorok változásaiból eredően jelennek meg. A szokásos jelölésekkel  $\Omega$  a Föld forgásának a szögsebessége, az  $s$  index pedig a szférikus rendszerbeli sebességre utal. Látható, hogy az egyenleteknek a pólusoknál szingularitási pontja van, ugyanis a horizontális mozgásegyenletekben szereplő  $\operatorname{tg} \varphi$  érték itt a végtelenhez tart. Ennek következtében a metrikus gyorsulások mértéke több nagyságrenddel meghaladja a többi tagét, így az előrejelzési feladat megoldása lehetetlenné válik (Práger, 1992).

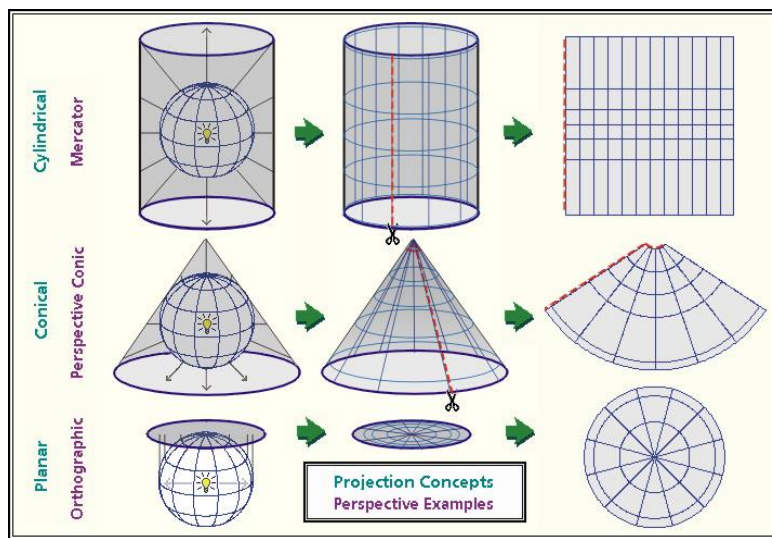
A szférikus rendszer nehézségeinek kiküszöbölésére a gyakorlatban az egyenleteket egy sík tartományba (térképsíkra) képezzük le, és az előrejelzési feladatot a **térképsíkon** Descartes-féle koordináta-rendszer alkalmazásával oldjuk meg. Ez lényegesen egyszerűbb alakú egyenletrendszerhez vezet, ugyanakkor a leképezés során szükségszerűen torzulnak a távolságok, amit az egyenletek átírásánál figyelembe kell venni (ennek menetét részletesen bemutatja Práger, 1992). A térképi leképezésnek folytonosan differenciálhatónak kell lennie, hogy a HTER átvihető legyen a térképsík feletti térrészbe. A különböző tulajdonságok megőrzését tekintve a leképezések lehetnek felszín-, szög-, illetve távolságtartók. A *felszíntartó leképezés* a földfelszíni térrészt vele megegyező területű sík tartományba képezi le, míg *szögtartó* vagy *konform leképezés* esetén két tetszőleges felszíni görbe által bezárt szög marad változatlan. A *távolságtartó* vagy *izometrikus leképezések* egyszerre felszín- és szögtartóak, a teljes gömbfelszín esetében azonban ez együtt nem valósítható meg. Az alábbiakban néhány példát mutatunk térképi leképezésekre (II.2. ábra), azok matematikai jellemzőinek részletes ismertetése nélkül (ezt alaposan tárgyalja Stegena, 1988; Práger, 1992):

- **Polár-sztereografikus térképvetület:** a földfelszín egy részét az Egyenlítővel párhuzamos síkra képezzük le, vetítőpontként az Északi- vagy a Déli-sarkot használva. A vetületet általában csak az egyik félgömb leképezésére használjuk, mert azon túl a távolságok nagy torzulást szenvednek. A hazai szinoptikus gyakorlatban olyan sztereografikus vetületű térképet használunk, mely a 60°-os szélességi kör mentén szögtartó.
- **Mercator-féle hengervetület:** a földfelszíni pontokat a Földet az Egyenlítő vonalában érintő henger palástjára vetítjük vetítőpontként a Föld középpontját használva, majd a konformitás érdekében É–D irányú nyújtást alkalmazunk. A vetülettel a teljes Föld le-

képezhető, s általában az alacsony szélességek folyamatainak leírásánál használjuk, mivel az Egyenlítő mentén a projekció izometrikus.

- Lambert-féle kúpvetület: a földfelszíni pontokat a Földet egy kiválasztott szélességi kör mentén érintő kúp palástjára vetítjük, vetítópontként a Föld középpontját használva, majd a konformitás érdekében É–D irányú nyújtást alkalmazunk. A vetületet gyakran alkalmazzuk kisebb földrajzi területek leképezésénél, mivel az érintő szélességi kör mentén a projekció távolságtartó (attól északra illetve délre nagyít). Az Országos Meteorológiai Szolgálatnál alkalmazott ALADIN és AROME modellekben is Lambert-kúpvetületet használnak olyan érintősík-megválasztással, ami Magyarország területén csak kis torzítást eredményez.

(Mindhárom vetület lehet érintő és metsző is, utóbbi esetben a metszések síkjaiban izometrikusak a projekciók, a metsző síkok között rövidülnek, azon kívül pedig hosszabbodnak a távolságok.)



II.2. ábra. Példák a földfelszín sík tartományba való leképezésére: Mercator-féle hengervetület (felül), Lambert-féle kúpvetület (középen), polár-sztereografikus vetület (alul). Forrás: <http://www.geog.ucsb.edu>.

Az eddigiekben a HTER felírására alkalmazott koordináta-rendszerek horizontális vonatkozásaival foglalkoztunk, s nem tértünk ki a Descartes-féle koordináta-rendszerben alkalmazott vertikális koordinátával kapcsolatos nehézségekre. A HTER egyértelmű megoldásához a léggör „határán” peremfeltételek megadása szükséges. A Descartes-féle ún.  $z$ -rendszerben azonban a léggör függőleges kiterjedése nem adható meg egyértelműen, mert a léggör sűrűsége csak aszimptotikusan tart a 0-hoz (a léggör fokozatosan „fogy el”). Másfelől áramlásmódosító hatása következtében a domborzat nem hanyagolható el a folyamatok leírása során, a  $z$ -rendszerben viszont a domborzat egy  $z = z_0(x, y)$  függvénnyel adható meg, ami az egyenleteket bonyolulttá teszi. A fenti problémák megoldására célszerű a Descartes-féle rendszerben használt  $z$ -koordináta helyett egy olyan  $\zeta$  vertikális koordinátát bevezetni, ami a következő feltételeket teljesíti:

1. A  $\zeta(x, y, z, t)$  függvény folytonosan differenciálható és  $\zeta = \zeta(z)$  kölcsönösen egyértelmű.
2. A  $\zeta$  függvény a  $z > 0$  térrészben korlátos. Ekkor a léggör felső határa könnyen kijelölhető.

3. A  $\zeta$  függvény a  $z = z_0(x, y)$  felületet a  $\zeta = \zeta_0$  konstans felületre képezi le. Ekkor az alsó határfeltétel egyszerű alakban megadható.

Az új vertikális koordináta bevezetése módosítja a hidro-termodinamikai egyenletrendszer alakját, többek között annak köszönhetően, hogy a vertikális sebesség valamint a teljes időbeli deriváltban szereplő vertikális parciális differenciálhányados megváltozik. A továbbiakban vázlatosan bemutatjuk a meteorológiában leggyakrabban használt vertikális koordináta-rendszereket. (Részletes jellemzésükre és a HTER ezekben felvett alakjára legtöbbször nem térünk ki, ezt körültekintően megteszi Práger; 1992.)

- A felszínkövető koordináta-rendszerben az új vertikális koordinátát a  $z^* = z - z_0(x, y)$  függvénykapcsolattal definiáljuk. A  $z^*$ -rendszerben a földfelszín egyszerűen, a  $z = 0$  összefüggéssel kijelölhető, a légkör felső határát viszont továbbra is nehéz benne megadni. A koordináta-rendszer  $z^*$  izovonalai nem egyenesek, követik a domborzat alakját (ezért hívják felszínkövetőknek).
- A nyomási koordináta-rendszerben az új vertikális koordináta a hidrosztatikus nyomás, ugyanis ekkor teljesül a fenti 1. feltétel, miszerint az új vertikális koordináta a magasság egyértelmű függvénye. Ebben a rendszerben a légkör felső határa könnyen, a  $p = 0$  összefüggéssel megadható. A légkör alsó határának kijelölése azonban nehezebb, mint a  $z^*$ -rendszerben, ugyanis az ezt leíró  $p = p_0(x, y, t)$  függvénykapcsolat alapján a felszíni nyomás az időben is változik. Ugyanakkor a nyomási rendszer nagy előnye, hogy benne a kontinuitási egyenlet a következő alakot öltve diagnosztikai egyenletté módosul (a  $p$  index a nyomási rendszerre utal, gyakran alkalmazzuk a  $w_p = \omega$  jelölést is):

$$\frac{\partial u_p}{\partial x_p} + \frac{\partial v_p}{\partial y_p} + \frac{\partial w_p}{\partial p} = 0. \quad (\text{II.4.})$$

A vertikális koordinátaként a hidrosztatikus nyomást használó nyomási rendszernél általánosabb a tömeg koordináta-rendszer, ami nem-hidrosztatikus modellek esetében is alkalmazható.

- Gyakran alkalmazzák a szigma ( $\sigma$ ) koordináta-rendszert is, ami alapértelmezésben az aktuális ( $p$ ) és a felszíni nyomás ( $p_s$ ) hányadosa. Ezzel a választással a végtelen vastagságú légkört szintén egy korlátos térrészbe képezzük le.
- A kvázi-sztatika állapotában lévő légkör folyamatainak leírásánál használható az izentropikus koordináta-rendszer is, ahol a vertikális koordináta szerepét a potenciális hőmérséklet tölti be. A  $\Theta$ -rendszerben a hidro-termodinamikai egyenletek jelentősen egyszerűsödnek, ugyanakkor hátránya, hogy bár a légkört egy vertikálisan korlátos térrészbe képezi, az alsó és felső határfelületek kijelölése itt is komplikált, továbbá csak szigorúan monoton potenciális hőmérsékleti profilokkal (stabilis, vagy labilis légkörrel) dolgozhatunk.
- A numerikus modellezési gyakorlatban legelterjedtebben használt vertikális koordináta-rendszer a hibrid  $\eta$ -rendszer, mely egyesíti a felszínkövető és a nyomási rendszer előnyös tulajdonságait. Az  $\eta$  koordinátát az alábbi összefüggés jelöli ki implicit módon:

$$\pi(x, y, \eta, t) = A(\eta) + B(\eta) \cdot \pi_s(x, y, t), \quad (\text{II.5.})$$

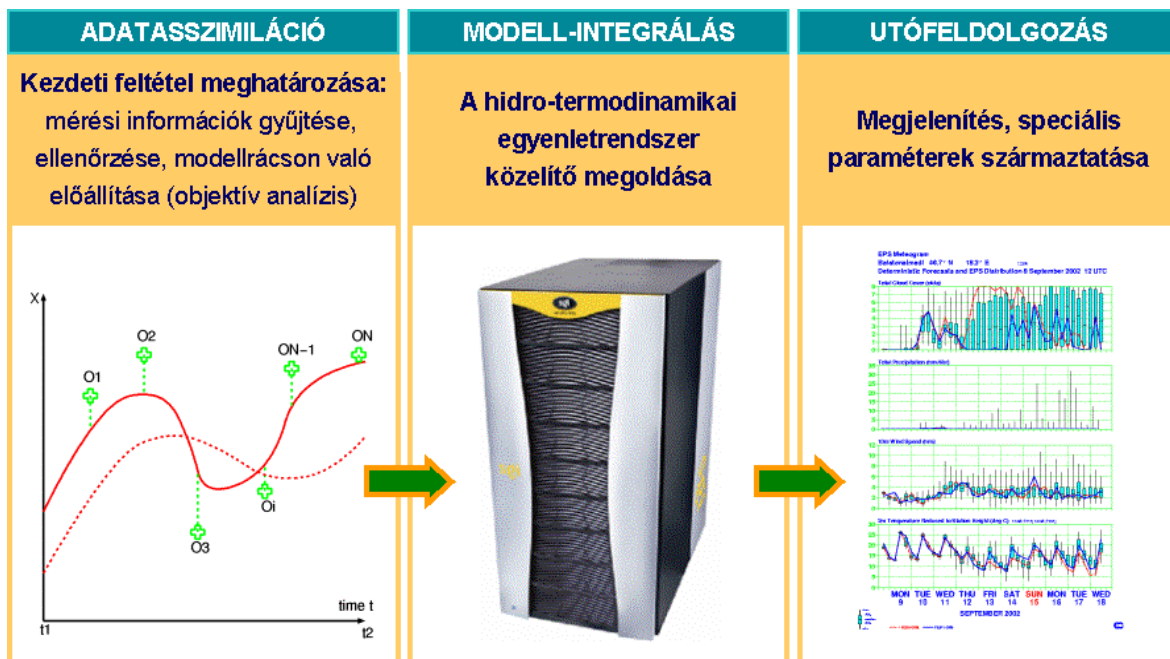
ahol  $\pi(x, y, \eta, t)$  és  $\pi_s(x, y, t)$  a nyomás tetszőleges szinten, illetve a felszínen,  $A(\eta)$  és  $B(\eta)$  pedig együtthatók. Az  $\eta$ -t és így az  $\eta$ -rendszert az  $A$  és  $B$  együtthatók megfelelő

megválasztásával tehetjük alkalmas vertikális koordinátává, illetve „kényelmes” koordináta-rendszerré, melyben a határfelületek egyszerűen megadhatók. Ehhez a következők szükségesek:

1. A légkör alsó határán  $\pi(x, y, \eta_s, t) = \pi_s(x, y, t)$ , azaz  $A(\eta_s) = 0$  és  $B(\eta_s) = 1$ .
2. A légkör felső határán  $\pi(x, y, \eta_t, t) = 0$ , azaz  $A(\eta_t) = 0$  és  $B(\eta_t) = 0$ .
3. A két határ között  $\eta$  monoton nő:  $\frac{\partial \pi}{\partial \eta} = \frac{\partial A}{\partial \eta} + \pi_s \frac{\partial B}{\partial \eta} > 0$ .

Készíthetünk további hibrid koordináta-rendszereket is, pl. a szigma és a nyomási rendszer kombinálásával.

A hidro-termodinamikai egyenletrendszer **vegyes feladat**, azaz az állapothatározók időbeli fejlődésének egyértelmű leírásához **kezdeti és határfeltételek szükségesek**. A kezdeti feltételek pontos meghatározása alapvető fontosságú a numerikus modellek számára, hiszen pontatlan kezdeti feltételek esetén még reményünk sincs a pontos előrejelzésre (Horányi, 2002). Ennek közvetlen oka a légkör kaotikus jellegű viselkedése, melynek egyik megnyilvánulása a kezdeti feltételekre vonatkozó érzékenység (a légkörnek ezt a tulajdonságát bővebben a II.5. fejezetben tárgyaljuk). Az **adatasszimiláció** célja tehát az alkalmazott modell felbontásának és fizikai jellemzőinek megfelelő kezdeti feltételek előállítására (II.3. ábra). Ehhez felhasználjuk a földrajzilag szabálytalanul elhelyezkedő mérési adatokat, amelyeket a numerikus modell korábbi futásából származó, az adott időpontra vonatkozó ún. *first guess* adataival kombinálunk. Az egyes információkat megbízhatóságuk szerint súlyozzuk az objektív analízis eljárás során, azaz a pontosabb, megbízhatóbb adatokat nagyobb súllyal vesszük figyelembe, mint a kevésbé pontosakat. A modell kezdeti mezőinek vissza kell adnia a modell-egyenletekben alkalmazott fizikai összefüggéseket, s nem tartalmazhatnak olyan hullámformákat, instabilitásokat, amelyek nem megoldásai a hidro-termodinamikai egyenletrendszernek (mert különben azok nemkívánatos zajokat generálhatnak). A II.2. fejezetben részletes áttekintést adunk a gyakorlatban használt adatasszimilációs módszerekről.



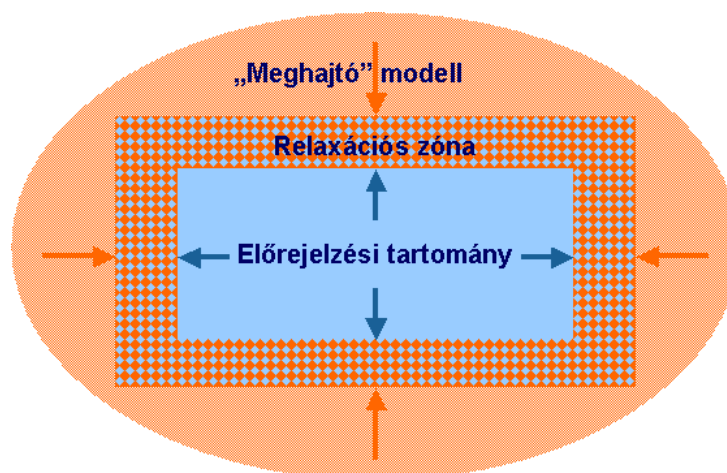
II.3. ábra. A számszerű előrejelzések készítésének alapvető lépései: a kezdeti feltételek meghatározása, a modell numerikus integrálása, az eredmények utó-feldolgozása.



A határfeltételek alsó és felső határfeltételeket jelentenek, továbbá egy kisebb területre vonatkozó, ún. *korlátos tartományú előrejelzés* esetén a tartomány peremén oldalsó határ- vagy peremfeltételeket is szükséges megadni. A tartomány alsó határa fizikai korlátot jelent az áramlásokkal szemben: a földfelszín áthatolhatatlansága nem teszi lehetővé, hogy azon keresztül anyagáramlás történjen. Ez matematikailag azt jelenti, hogy az áramlási sebesség felületre merőleges komponense eltűnik a felület minden pontjában. Ezt a feltételt a merev fal tökéletes körüláramlásának nevezik, s a következő formában adjuk meg (Práger, 1992):

$$\mathbf{n}(\mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (\text{II.6.})$$

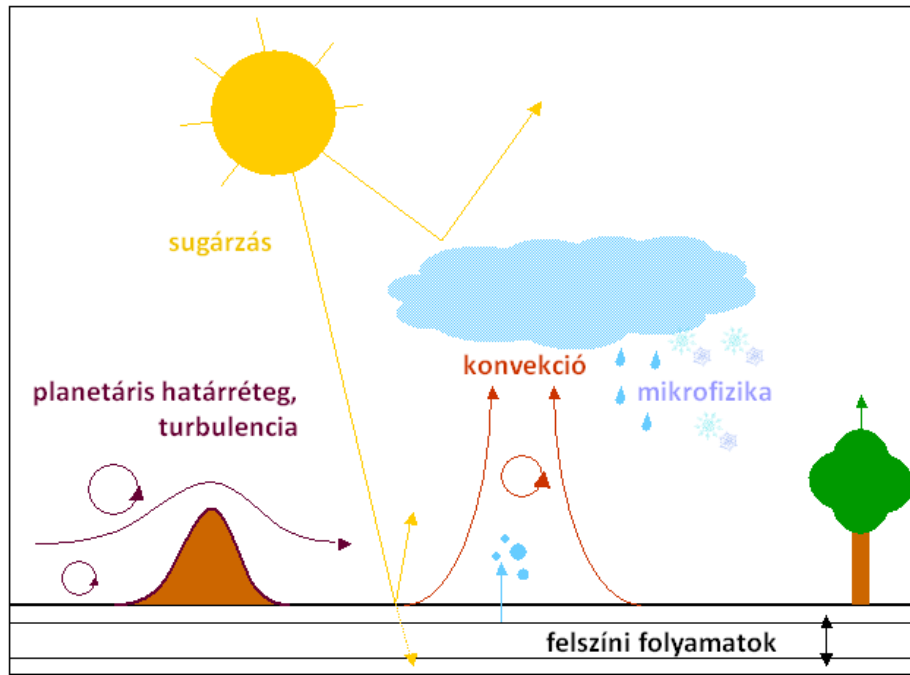
ahol  $\mathbf{n}$  a felület normális vektora,  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(\varphi, \lambda)$  pedig a földfelszín pontjait reprezentálja. A légkör felső határát viszont nem merev felszín jelöli ki: a  $z$ - és a felszínkövető  $z^*$ -rendszerben egy konkrét magassági szint, a nyomási rendszerekben pedig többnyire a nyomás nullává válása határozza meg a felső modellszintet. Ugyanígy a korlátos tartományú előrejelzések esetében sem egy fizikai peremet reprezentálnak a terület oldalsó határai, hiszen a korlátos tartomány a valóságban kapcsolatban áll a környezetével, és a „kívül” zajló folyamatok hatással vannak a „belső” folyamatokra. Ennek figyelembevételére tehát az oldalsó határfeltételeken keresztül történik. Ahhoz, hogy az előrejelzési feladat korrekt kitűzésű legyen, pontosan annyi határfeltételt kell megadni, amennyit a parciális differenciálegyenletek rendje és típusa megkövetel – a szükségesnél kevesebb határfeltétellel a feladat nem lesz egyértelműen megoldható, a túlhatározottság esetén pedig a hullámok visszaverődnek a peremektől, numerikus zajt okozva az előrejelzési mezőben. A hidro-termodinamikai egyenletrendszerrel a korrekt kitűzés nehezen vagy esetenként egyáltalán nem megvalósítható, ezért a meteorológiai modellek többségében egy pragmatikus módszert alkalmaznak: minden határpontban megadnak minden határfeltételt, s a túlhatározottságból eredő nemkívánatos numerikus zajokat szűréssel távolítják el az előrejelzési mezőből. A felső határon ez gyakran olyan ún. *szivacs-zóna* bevezetésével történik, amely az egyenletekben szereplő diffúziós tag hatékonyságának növelésével „elnyeli” a visszaverődő hullámokat (Perkey és Kreitzberg, 1976). Az oldalsó peremek esetében egy néhány rácspontból álló ún. *relaxációs zónát* definiálnak az előrejelzési terület körül (II.4. ábra), amelyben a tartományból valamint a tartományon kívülről érkező információkat „összesimítják” (azaz relaxálják; Davies, 1976).



II.4. ábra. A korlátos tartományú modellekben az előrejelzési tartományon kívül zajló folyamatokat az oldalsó határfeltételeken keresztül egy relaxációs zóna alkalmazásával veszik figyelembe. A néhány rácspont szélességű relaxációs zónában a peremfeltételt adó „meghajtó” (általában globális) modell és a korlátos tartományú modell mezőit egymáshoz simítják.

A teljes, primitív egyenleteken alapuló hidro-termodinamikai egyenletrendszernek, mint már említettük, nem ismert az analitikus megoldása, ezért az előrejelzési feladatot numerikus módszerek alkalmazásával oldjuk meg (II.3. ábra). Ez azt jelenti a gyakorlatban, hogy az egyenleteket **diszkretizáljuk**: az állapothatározókat egy háromdimenziós térbeli rács rács-pontjaiban tekintjük, a térbeli és az időbeli differenciálást numerikus módszerek segítségével végezzük el, az előrejelzési időtávot pedig kisebb időlépcsőkre osztjuk fel, s a diszkretizált egyenleteket lépésenként oldjuk meg. A térbeli differenciál-operátorok közelítésére két módszer-családot alkalmazhatunk, melyeket a II.3. alfejezetben részletesen is bemutatunk: (1) a **Galjorkin (végelem és spektrális) módszerek** esetében a meteorológiai változókat analitikusan integrálható függvények sorösszegeként írjuk fel, míg (2) a **véges különbséges módszereknél** a deriváltakat az állapothatározók rácsponthelyi értékeinek segítségével állítjuk elő. Az időbeli differenciálást explicit vagy implicit véges differencia sémákkal végezzük el, amelyek hatékonyságát (végrehajtási sebességét) meghatározza a bennük alkalmazható időlépcső hossza. Ez a diszkrét feladat **stabilitási** tulajdonságaitól függ: a kezdeti kis hibák az előrejelzési időtáv során nem növekedhetnek „tolerálhatatlan” mértékűre a választott időlépés mellett. A hiba korlátosságához szükséges időlépés hosszát általában a térbeli felbontás és a feladat által leírt leggyorsabb mozgásforma terjedési sebességének aránya határozza meg (ez a korábban már említett CFL-kritérium). Utaltunk rá, hogy a hidro-termodinamikai egyenletrendszer teljes alakjában olyan mozgásformákat is leír, amelyeknek a meteorológiai jelentősége csekély, terjedési sebességük azonban nagyságrendekkel meghaladhatja a meteorológiailag releváns megoldások sebességét. Ezért a primitív egyenletek numerikus megoldásánál kitüntetett jelentősége van a nagy pontosságú és egyben hatékony numerikus módszerek alkalmazásának. A II.3. alfejezetben ezekre mutatunk néhány, az operatív gyakorlatban is sikeresen használt módszert.

A numerikus modellek által alkalmazott háromdimenziós térbeli rács felbontása meghatározza azoknak a folyamatoknak a méretskáláját, amelyeket a modell közvetlenül le tud írni. Vannak azonban a légköri rendszerben olyan kölcsönhatások is, amelyek a modell rácsfelbontásánál kisebb térskálán vagy molekuláris szinten zajlanak, mégis részt vesznek az időjárás alakításában azzal, hogy visszahatnak a nagyobb skálájú folyamatokra. A meteorológiai szempontból lényeges ún. *szub-grid* (azaz a rácsfelbontásnál kisebb) *skálájú* légköri folyamatokra példa a konvekció vagy a turbulencia, a molekuláris szintű folyamatokra pedig a sugárzás, a párolgás, vagy a molekuláris diffúzió (II.5. ábra). A numerikus modellekben tehát ezeket is figyelembe kell venni ahhoz, hogy sikeres előrejelzést tudjunk készíteni. Ez a **parametizációk** alkalmazásával történik: a szub-grid és molekuláris skálájú hatásokat az ismert (explicit módon leírt) tagok segítségével számítjuk ki (Kalnay, 2003). Hogy milyen folyamatokat tudunk közvetlenül modellezni, és melyeket tudunk csak parametizáció útján leírni, a modellben alkalmazott tér- és időbeli felbontástól függ (szemléletesen fogalmazva attól, hogy az adott jelenség „fennmarad, vagy áthullik a modell rácshálózatán”). Ebből a szempontból külön figyelmet érdemelnek a **nem-hidrosztatikus modellek**, amelyek „minőségi ugrást” jelentenek a parametizációk tekintetében. A nagytérségű és a mezoskálájú folyamatok egy részénél jól alkalmazható a hidrosztatikus közelítés, ami néhány km-es horizontális rácsfelbontásnál már nem tartható. Ez azt jelenti, hogy ezen a felbontáson a vertikális sebesség időbeli megváltozása összemérhető a többi gyorsulással, s többé nem hanyagolható el. Ezen a méretskálán tehát a modellek közvetlenül írják le a mély-konvekció folyamatát (a vertikális sebesség prognosztikai változóvá lép elő), s egyúttal fejlettebb parametizációs sémákat használnak a mikrofizikai, a turbulens, a sekély-konvekciós és a felszíni folyamatok leírására is. A II.4. alfejezetben összefoglaló áttekintést adunk a gyakorlatban alkalmazott parametizációs eljárásokról.



II.5. ábra. A numerikus modellekben parametrizációval leírt legfontosabb folyamatok.

A meteorológiai előrejelzések számos **bizonytalansággal** terheltek, ami egyfelől a leírni kívánt folyamatok kaotikus jellemzőiből, másfelől az ezek szimulációjára használt modellek közelítő jellegéből (a kezdeti és határfeltételek meghatározásából, az alkalmazott numerikus és fizikai parametrizációs módszerekből) adódik. Az előrejelzések kommunikációja akkor tekinthető korrektnek, ha a bevalásuk valószínűségéről is tartalmaznak információt. Ennek érdekében az előrejelzések bizonytalanságát számszerűsíteni kell. Ez az ún. **ensemble technika** segítségével tehető meg, amikor nem csupán egyetlen, hanem több előrejelzés együttesét tekintjük és értékeljük ki. Az előrejelzések különböző forrásokból származó bizonytalanságainak meghatározására a gyakorlatban többféle módszert dolgoztak ki, melyeket a II.5. alfejezetben részletesen tárgyalunk.

Az előrejelzés készítésének utolsó szakasza az **utó-feldolgozás**. A modelleredmények automatikusan generált vagy célzott előrejelzési produktumok formájában hasznosulnak a szinoptikus meteorológus számára (pl. a szélenergetika vagy a repülésmeteorológia területén) és a nagyközönség tájékoztatását szolgálják, illetve bemenő információt szolgáltathatnak a további, csatolt modellszámításokhoz (pl. szennyezőanyag terjedés, áramlástan megoldók, ökológiai modellek). A felhasználók igényeinek minél jobb kiszolgálása érdekében a modell eredményeit tradicionális koordináta-rendszerekbe interpoláljuk (például a „természetes” magassági vagy a széles körben használt nyomási felületekre), illetve olyan változókat is előállítunk, amelyek nagyban segítik az előrejelzési eredmények interpretációját (pl. frontparaméterek, előrejelzett felhőzeti és csapadékmezők).

Eddig az időjárás számszerű előrejelzésének gyakorlati problémáiról ejtettünk szót, de nem szabad megfeledkeznünk a sok tekintetben hasonló **klímodellezés** kérdésköréről sem. Az időjárást elsősorban a légköri folyamatok alakítják, s a légkör rendkívüli változékonysága és kaotikus jellege nem teszi lehetővé, hogy viselkedését néhány napnál, hétnél hosszabb időszakra előrejelezzük. Ugyanakkor a földi (éghajlati) rendszer részei az óceánok, a jég- és a szárazföldi felszínek, az élővilág is, melyek **másfajta előrejelezhetőséget** adnak a rendszernek. Ugyanis az éghajlati rendszer ezen összetevői jóval lassabban, éves-évtizedes-évezredes skálán reagálnak az őket ért hatásokra, így együttes leírásukkal meghatározható az éghajlat hosszútávú (állandósult) viselkedése és módosulása egy adott kényszerre. Folyamataikat a

légkörihez hasonló fizikai törvények kormányozzák, s az ezek által alkotott parciális differenciálegyenlet-rendszert ugyanúgy numerikus módszerek segítségével oldjuk meg, mint az időjárás-előrejelzés esetében. A teljes földi rendszer viselkedését az egyes alrendszerekre felírt (óceáni, légköri, stb.) modellek összekapcsolásával létrehozott ún. *kapcsolt* vagy *csatolt éghajlati modellekkel* tudjuk leírni. Ezek megbízhatóan jellemzik az éghajlat nagyskálájú, planetáris folyamatait, s az emberi tevékenység hatását is képesek figyelembe venni. A kisebb skálájú, részletesebb információkhoz azonban már regionális modellek alkalmazására van szükség, melyek a globális modellek eredményeiből kiindulva egy kiválasztott térség folyamatait finomabb felbontással írják le (a korlátos tartományú időjárás-előrejelző modellekhez teljesen hasonló módon). Az éghajlati szimulációk a rövidtávú előrejelzéseknél meglévő bizonytalanságok mellett még az antropogén tevékenység hatásából származó bizonytalanságot is hordozzák, mindezek számszerűsítése tehát kulcsfontosságú az éghajlati modellek eredményeinek közlésénél is. Az éghajlati modellezés sajátosságait, az éghajlati szimulációk bizonytalanságainak természetét és leírását, valamint a modelleredmények és az éghajlati előrejelezhetőség interpretálását a II.6. alfejezetben mutatjuk be.

A fentiekben áttekintettük a numerikus modellek és a numerikus prognosztika legfontosabb részleteit, amelyekről bővebben a következő alfejezetekben lesz szó.

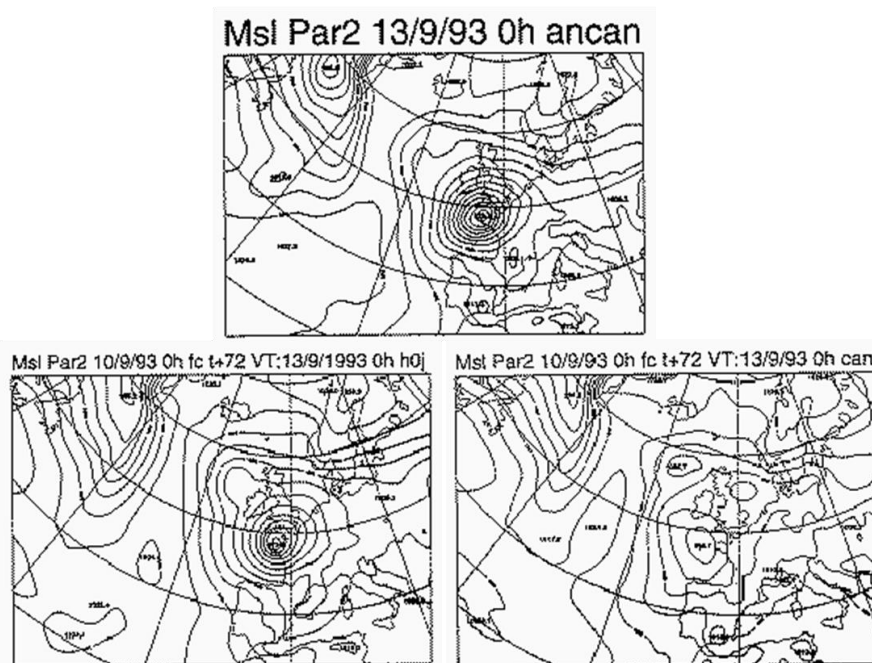
## II.2. Adatasszimiláció és inicializáció

Szerző: Bölöni Gergely és Horányi András

### II.2.1. Adatasszimiláció

#### Az adatasszimiláció célja

A légköri mozgásokat és állapotváltozásokat leíró prognosztikai egyenletrendszer vegyes feladat, azaz olyan parciális differenciálegyenlet-rendszer, amelynek a megoldásához kezdeti- és határfeltételek megadása szükséges. Az adatasszimiláció célja a HTER megoldásához szükséges kezdeti feltételek (analízis) megadása az alkalmazott numerikus modell rácshálózatán. A HTER-ben előforduló nem-lineáris advekción tagok miatt a megoldás (a numerikus előrejelzés) rendkívüli érzékenységet mutat a kezdeti feltételekre (II.6. ábra), ezért kulcsfontosságú ezek minél pontosabb megadása az adatasszimiláció során.



II.6. ábra. Fent: a „valóságot” reprezentáló verifikációs analízis (tengerszinti légnyomás), amely egy mély ciklont rajzol ki Nyugat-Európa fölött. Balra, lent: a verifikációs időpontra vonatkozó előrejelzés (tengerszinti légnyomás) egy „jó” kezdeti feltételből indítva. Jobbra, lent: a verifikációs időpontra vonatkozó előrejelzés (tengerszinti légnyomás) egy „rossz” kezdeti feltételből indítva. Az alsó ábrákhoz tartozó kezdeti feltételek ugyanazon megfigyelések felhasználásával készültek, azonban különböző adatasszimilációs módszerekkel (bal: variációs asszimiláció, jobb: optimális interpoláció, a módszerek magyarázatát lásd később). Amíg a két kiindulási mező csak csekély mértékben tér el egymástól, addig az abból indított előrejelzések már komoly különbségeket mutatnak.

A modell kezdeti feltételeinek minél pontosabb meghatározása érdekében az adatasszimiláció során célunk, hogy minden rendelkezésünkre álló információt (adatforrást) figyelembe vegyünk. Ezek a következők:

1. A légköri megfigyelések térben és időben szabálytalanul elhelyezkedő sokasága (ezek általában megfelelő megbízhatóságú adatok, de nem állnak kellő számban rendelkezésre).

zésre, azaz az adatasszimilációs probléma csupán a megfigyelések figyelembevételével erőteljesen alulhatározott lenne);

2. Az ún. *háttérmező*, ami a kívánt kezdeti időpontra vonatkozó rövidtávú numerikus modell előrejelzés (ez a modell rácspontjaiban áll rendelkezésre, ugyanakkor kevésbé megbízható, mint a megfigyelések, lévén, hogy előrejelzésről van szó);
3. A légköri egyensúlyi folyamatokról alkotott ismereteink (pl. a tömeg- és a szélmező geosztrófikus igazodása).

Az első két információforrást az adatasszimilációs eljárások képesek közvetlenül figyelembe venni, míg a harmadikból csak közvetett módon profitálnak. A légköri egyensúlyi folyamatokkal kapcsolatos ismereteink felhasználására (a 3. információ-forrás) a következő, az inicializációról szóló II.2.2. alfejezetben világítunk rá. Az adatasszimiláció során célunk a fenti információ sokaság matematikailag optimális felhasználása a kezdeti feltételek meghatározásához. Az „optimalitás” szó itt azt jelenti, hogy az egyes információk megbízhatóságuk függvényében járulnak hozzá a kezdeti mezőhöz (pl. pontosabb mérőeszközből származó információ nagyobb, míg a kevésbé pontos műszerekből származó mérések kisebb súlyt kapnak). Az egyes információk (megfigyelések és háttér) megbízhatósága (vagy hibája) sajnos nem ismert egzaktul, ezért ezeket becsülni kényszerülünk. Az adatasszimiláció egyik fontos részterülete a megfigyelések és a háttér megbízhatóságának becslése, a jegyzetben azonban erre csak érintőlegesen térünk ki, és az egyszerűség kedvéért alapvetően ismertnek tekintjük a felhasznált információk megbízhatóságát (hibáját).

## Elméleti alapok

Az adatasszimiláció feladatát a matematikai statisztikára támaszkodva a következőképpen lehet egyszerűen megfogalmazni. Tekintsünk egyetlen térbeli pontot, amelyben az  $x$  változó  $x_t$  valódi értékére szeretnénk  $x_a$  becslést (analízist) adni a rendelkezésünkre álló két megfigyelés,  $y_1$  és  $y_2$  alapján:

$$\hat{x}_t = x_a = F(y_1, y_2). \quad (\text{II.7.})$$

Az adatasszimilációs módszerekkel lényegében arra az egyszerű kérdésre keressük a választ, hogy mi legyen az az  $F$  függvény, amely a lehető legjobb becslést adja  $x_t$ -re a fentiek ismeretében. Az  $F$  függvény meghatározására a két leggyakrabban alkalmazott közelítést mutatjuk be. Ezek 1.) a legkisebb négyzetek módszere és 2.) a maximum likelihood módszer.

### *1.) Legkisebb négyzetek módszere*

Tudjuk, hogy az  $y_1$  és  $y_2$  megfigyelések hibával terheltek:  $y_1 = x_t + \varepsilon_1$  illetve  $y_2 = x_t + \varepsilon_2$ , ahol a mérési hibákat  $\varepsilon_1$ -gyel, illetve  $\varepsilon_2$ -vel jelöljük. Feltesszük, hogy

- a mérések torzítatlanok (nincs szisztematikus hibájuk, azaz hosszabb idő átlagában sem felülbecslést és sem alulbecslést nem mutatnak):  $E(\varepsilon_1) = E(\varepsilon_2) = 0$  ;
- ismerjük a mérési hibák szórásnégyzetét (azaz a hibák nagyságának mérőszámát):  $\sigma_1^2 = E(\varepsilon_1^2)$ ,  $\sigma_2^2 = E(\varepsilon_2^2)$  ;
- a mérési hibák korrelálatlanok (azaz a mérések függetlenek egymástól):  $E(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 0$  ,

ahol  $E$  a várható értéket jelöli.

Keressük az  $x_a$  becslést a megfigyelések lineáris kombinációjaként!

$$x_a = k_1 y_1 + k_2 y_2, \quad (\text{II.8.})$$

azaz ebben az esetben a feladat tulajdonképpen a  $k_1, k_2$  együtthatók meghatározása. További elvárásunk az  $x_a$  becsléssel szemben, hogy torzítatlan legyen (azaz a mérésekhez hasonlóan ne legyen szisztematikus hibája):

$$E(x_a - x_t) = 0, \quad (\text{II.9.})$$

illetve hogy a négyzetes hibája minimális legyen:

$$\sigma_a^2 = E[(x_a - x_t)^2] = \min. \quad (\text{II.10.})$$

A becslés torzítatlanságából és a megfigyelési hibákra tett fenti feltételekből következik, hogy az együtthatók összege egy:  $k_1 + k_2 = 1$ . Ennek az összefüggésnek és a megfigyelésekre tett feltételezések (torzítatlanság és korrelálatlanság) kihasználásával könnyen kifejezhetők a keresett együtthatók a megfigyelések ismert hiba szórásnégyzeteinek függvényében:

$$k_1 = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}; \quad k_2 = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}. \quad (\text{II.11.})$$

A  $k_1, k_2$  súlyokat visszahelyettesítve a becslési hiba szórásnégyzetét megadó fenti egyenletbe adódik, hogy:

$$\frac{1}{\sigma_a^2} = \frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}. \quad (\text{II.12.})$$

Nevezzük el a megfigyelések és az analízis hiba szórásnégyzeteinek reciprokait a fenti egyenletben megbízhatóságnak (hiszen minél nagyobb a megfigyelési hiba, annál kisebb a mérés megbízhatósága). Így a fenti egyenlet rendkívül szemléletesen világít rá az adatasszimiláció lényegére, azaz arra, hogy az analízis megbízhatóságát minden egyes megfigyelés növeli (mivel a megfigyelések megbízhatóságai mind 1-nél kisebb pozitív számok és az analízis megbízhatósága az egyes mérések megbízhatóságainak az összege).

## 2.) Maximum likelihood módszer

Tekintsük az  $x_t$ -t ismert eloszlású valószínűségi változónak, ismert  $f$  sűrűségfüggvénnyel. Tekintsük továbbá az  $y_1, y_2$  megfigyeléseket ugyanilyen eloszlású statisztikai mintának és  $x_a$ -t ( $x_t$  becslését) egy ismeretlen becsülni kívánt paraméternek. Az  $x_a$  becslést ekkor az ún. *likelihood függvény* (minta együttes sűrűségfüggvénye) maximalizálásával kapjuk meg (lásd pl. Dévényi és Gulyás, 1988):

$$x_a \rightarrow \max_{x_a} L(x_a) = \max_{x_a} \prod_{i=1}^2 f(y_i, x_a). \quad (\text{II.13.})$$

Tegyük fel, hogy  $x_t$  és az  $y_1, y_2$  minta normális eloszlású és hogy a megfigyelésekhez tartozó hiba szórásnégyzetek ( $\sigma_1^2$  és  $\sigma_2^2$ ) most is ismertek. Ekkor a likelihood függvényt az alábbi alakban írhatjuk fel:

$$\begin{aligned}
L(x_a) &= \prod_{i=1}^2 f(y_i, x_a, \sigma_i^2) = \\
&= f(y_1, x_a, \sigma_1^2) \cdot f(y_2, x_a, \sigma_2^2) = \\
&= \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} e^{-\left[\frac{1}{2} \frac{(y_1 - x_a)^2}{\sigma_1^2}\right]} \cdot \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi}} e^{-\left[\frac{1}{2} \frac{(y_2 - x_a)^2}{\sigma_2^2}\right]} = \\
&= \frac{1}{\sigma_1 \sigma_2 2\pi} e^{-\left[\frac{1}{2} \frac{(y_1 - x_a)^2}{\sigma_1^2} + \frac{1}{2} \frac{(y_2 - x_a)^2}{\sigma_2^2}\right]}.
\end{aligned} \tag{II.14.}$$

Az exponenciális függvény negatív kitevője miatt a fenti likelihood függvény értéke akkor lesz maximális, ha a kitevő értéke minimális, azaz  $x_a$  értékét az alábbi feladat megoldásával kapjuk:

$$x_a \rightarrow \min_{x_a} \left[ \frac{1}{2} \frac{(y_1 - x_a)^2}{\sigma_1^2} + \frac{1}{2} \frac{(y_2 - x_a)^2}{\sigma_2^2} \right]. \tag{II.15.}$$

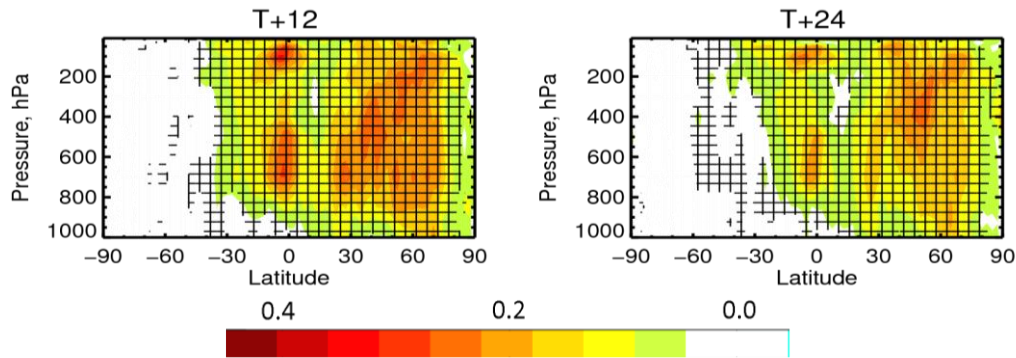
Másodfokú egyenlet lévén, a fenti összefüggés minimumát úgy kapjuk meg, hogy  $x_a$  szerinti deriváltját nullával tesszük egyenlővé:

$$x_a = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} y_1 + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} y_2. \tag{II.16.}$$

Világosan látszik tehát, hogy a maximum likelihood módszerrel is ugyanarra az eredményre jutunk mint a legkisebb négyzetek módszerével. Természetesen a maximum likelihood módszer esetében is igaz tehát, hogy a becslés megbízhatóságát az egyes megfigyelések megbízhatóságának összege adja.

Fontos megjegyezni, hogy a fenti módszereknél tett feltételezések (megfigyelések torzítatlansága, korrelátlansága és normális eloszlása) nem feltétlenül teljesülnek minden megfigyelési típus és meteorológiai változó esetén (például a műholdas megfigyelések adatai nem függetlenek egymástól). A fenti feltételezésekben foglaltak az adatasszimilációs módszerek korlátaiként tekinthetők, és amennyiben a valóság eltér a feltételezésekben foglaltaktól, a statisztikai becslés nem tekinthető megbízhatónak. A gyakorlatban ezért rendkívül fontos a fenti feltételezések vizsgálata, és amennyiben szükséges, a megfigyelések szisztematikus hibáinak szűrése az asszimilációs feladat elvégzése előtt. Szintén fontos, hogy az asszimilációban résztvevő változókat normális eloszlású változókká kell transzformálni (amennyiben az eredeti változók nem tekinthetők normális eloszlásúnak). Természetesen az asszimiláció elvégzése után az így kapott mesterséges változók visszatranszformálандóak az eredeti változókbá. A megfigyelések szisztematikus hibájából adódó problémákat a II.7. ábra szemlélteti.





II.7. ábra. Szél megfigyelések szisztematikus hibájának hatása 12 órás (bal) és 24 órás (jobb) szélesség előrejelzések ( $\text{ms}^{-1}$ ) minőségére. A szisztematikus hibával terhelt és a kontroll előrejelzések négyzetes hibáinak különbsége a földrajzi szélesség–magasság keresztmetszeten (a földrajzi hosszúság szerint átlagolt értékek). Az ábrán jól látható, hogy a megfigyelések szisztematikus hibái nagymértékben rontják az előrejelzések minőségét (sárgás-pirosas árnyalatok; a kereszttek a négyzetes hiba különbségének szignifikanciáját jelölik).

### Adatasszimilációs módszerek alkalmazása a gyakorlatban

A gyakorlatban alkalmazott numerikus modellek esetében a kezdeti (analízis) mezőt 3-dimenziós rácson kell megadnunk, amely a II.1. fejezetben adott becslésnek megfelelően  $10^7$  nagyságrendű pontból áll. A gyakorlatban a megfigyelések száma  $10^5$  nagyságrendű (például felszíni, rádiószondás, repülőgépes, műholdas, radar, GPS, wind-profiler megfigyelések). A megfigyelések relatív ritkasága miatt (a ritkaság a meghatározni kívánt modell rácspontokhoz képest értendő), nélkülözhetetlen a háttérmező (a numerikus modell korábbi időpontból induló előrejelzése az analízis időpontra vonatkozóan) felhasználása az asszimiláció elvégzéséhez. A gyakorlatban használt adatasszimilációs rendszerek esetében tehát az analízis mező a háttérmező megfigyelésekkel való korrekciója révén áll elő. Mint látni fogjuk, a korrekció mértékét a háttérmező és az aktuális megfigyelések megbízhatósága alapján határozzuk meg. Fontos megjegyezni, hogy a megfigyelések általában nem rácspontokban, hanem térben szabálytalanul helyezkednek el, ezért a háttérmező és a megfigyelések értékeinek összehasonlításához legalább egy térbeli interpolációt kell végrehajtanunk, amelyet az ún. *megfigyelési operátor* hivatott elvégezni. Amennyiben a megfigyelés, amelyet asszimilálni kívánunk nem közvetlenül a modell valamely állapotváltozójára vonatkozik, a térbeli interpoláción felül a megfigyelési operátor hivatott leírni a megfigyelt és a modell-változó között fennálló fizikai kapcsolatot is. Ez a kapcsolat gyakran bonyolult és nem-lineáris (pl. a műholdas megfigyelések esetében a sugárzás-átviteli egyenlet, a radar reflektivitás megfigyelések esetében pedig a radar egyenlet írja le a megfigyelt és a modellváltozók közötti kapcsolatot). A fentiek alapján a gyakorlatban elvégzendő adatasszimilációs feladat matematikai leírásához a következő jelöléseket célszerű bevezetnünk:

- $\mathbf{x}_a$  : analízis mező ( $10^7$  méretű vektor);
- $\mathbf{x}_b$  : háttérmező ( $10^7$  méretű vektor);
- $\mathbf{y}$  : megfigyelések ( $10^5$  méretű vektor);
- $\mathbf{H}$  : megfigyelési operátor, amely nem-lineáris (a  $10^7$  méretű  $\mathbf{x}_b$  vektort  $10^5$  méretű vektorra alakítja át, amelyeket a megfigyelési pontokban értelmezünk);
- $\mathbf{H}$  : a  $\mathbf{H}$  megfigyelési operátor lineáris közelítése ( $10^7 \times 10^5$ -es mátrix), azaz  $\mathbf{H}(\mathbf{x}) - \mathbf{H}(\mathbf{x}_b) = \mathbf{H}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b)$  ;
- $\mathbf{B}$  : háttérmező hiba kovariancia mátrixa ( $10^7 \times 10^7$  méretű mátrix);

- **R** : megfigyelések hiba kovariancia mátrixa ( $10^5 \times 10^5$  méretű mátrix, amely korrelálatlan megfigyelési hibák esetében diagonális).

### 1.) Optimális interpoláció

Megmutatható, hogy a fenti jelöléseket felhasználva a legkisebb négyzetek módszerével adott becslés több dimenzióban és háttérmezőt is felhasználva az alábbi formában írható fel (lásd pl. Gandin, 1963, Bouttier és Courtier, 1999):

$$\mathbf{x}_a = \mathbf{x}_b + \mathbf{K} [\mathbf{y} - \mathbf{H}(\mathbf{x}_b)], \quad (\text{II.17.})$$

ahol **K** az ún. *Kalman súlymátrix* (Kálmán Emil Rudolf, 1930-ban született magyar matematikus és mérnök után elnevezve; Kalman, 1960), amely az alábbi alakban írható föl:

$$\mathbf{K} = \mathbf{B}\mathbf{H}^T (\mathbf{H}\mathbf{B}\mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1}. \quad (\text{II.18.})$$

A fenti első egyenlet szemléletesen azt fejezi ki, hogy az analízist a háttérmező pontosításával kapjuk, méghozzá a megfigyelésekből jövő korrekciók (inkrementumok) lineáris kombinációinak hozzáadásával. A lineáris kombináció súlytényezői a **K** ( $10^7 \times 10^5$  méretű mátrix) elemeiből adódnak. A fenti becslést gyakran nevezik BLUE (best linear unbiased estimate)-nak az irodalomban, jelezvén, hogy a **K** mátrix fenti összetételéből kapjuk a legjobb torzítatlan becslést. A szemléletesség kedvéért érdemes egyetlen térbeli pont esetére felírni a **K** mátrixot. Ekkor  $\mathbf{H} = \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{R} = \sigma_o^2$  (megfigyelési hiba szórásnégyzete),  $\mathbf{B} = \sigma_b^2$  (háttér hiba szórásnégyzete), azaz  $\mathbf{K} = \sigma_b^2 / (\sigma_b^2 + \sigma_o^2)$ , amely visszaadja az előző fejezetben kapott  $k_1, k_2$  súlyok alakját (a különbség az, hogy ott két megfigyelés alapján becsültünk, a jelen egyszerűsített példa pedig egy megfigyelt és egy háttér információból való becslést mutat be). Az optimális interpoláció gyakorlati megvalósításánál problémaként merül fel, hogy a nagy dimenziójú,  $10^5 \times 10^5$  méretű  $(\mathbf{H}\mathbf{B}\mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1}$  inverz mátrix kiszámítása meglehetősen költséges. A dimenzió csökkentése céljából az optimális interpolációt a gyakorlatban rácspontonként szokás elvégezni, úgy, hogy csak meghatározott távolságon belüli megfigyeléseket használunk fel az adott rácsponti analízis érték meghatározásához. Így a fent említett invertálandó mátrix  $\sim 10 \times 10$ -es dimenziójúra csökken. A feladat rácspontonkénti megoldásának hátránya, hogy a szomszédos pontok konzisztenciája sérülhet az analízisben (ugyanis az egyes rácspontokban más és más megfigyeléseket használunk az adatasszimiláció során).

### 2.) Variációs asszimiláció

Megmutatható, hogy a maximum likelihood becslés több dimenzióban és háttérmezőt is felhasználva az alábbi skalár függvény minimalizálására vezethető vissza (lásd pl. Bouttier és Courtier, 1999, Kalnay, 2003):

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b)^T \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b) + \frac{1}{2} [\mathbf{y} - \mathbf{H}(\mathbf{x})]^T \mathbf{R}^{-1} [\mathbf{y} - \mathbf{H}(\mathbf{x})]. \quad (\text{II.19.})$$

A fenti függvényt variációs veszteségfüggvénynek nevezzük. A veszteségfüggvény  $\mathbf{x}$  szerinti minimumában kapjuk meg az  $\mathbf{x}_a$  analízist. A veszteségfüggvény első tagja a  $J_b$  háttér tag, amely szemléletesen a keresett analízis háttérmezőtől vett távolságát méri súlyozva a háttérmező hiba kovariancia mátrixával. A veszteségfüggvény második tagja a  $J_o$  megfigyelési tag,

amely szemléletesen a keresett analízis mező megfigyelésektől vett távolságát méri súlyozva a megfigyelési hiba kovariancia mátrixszal.

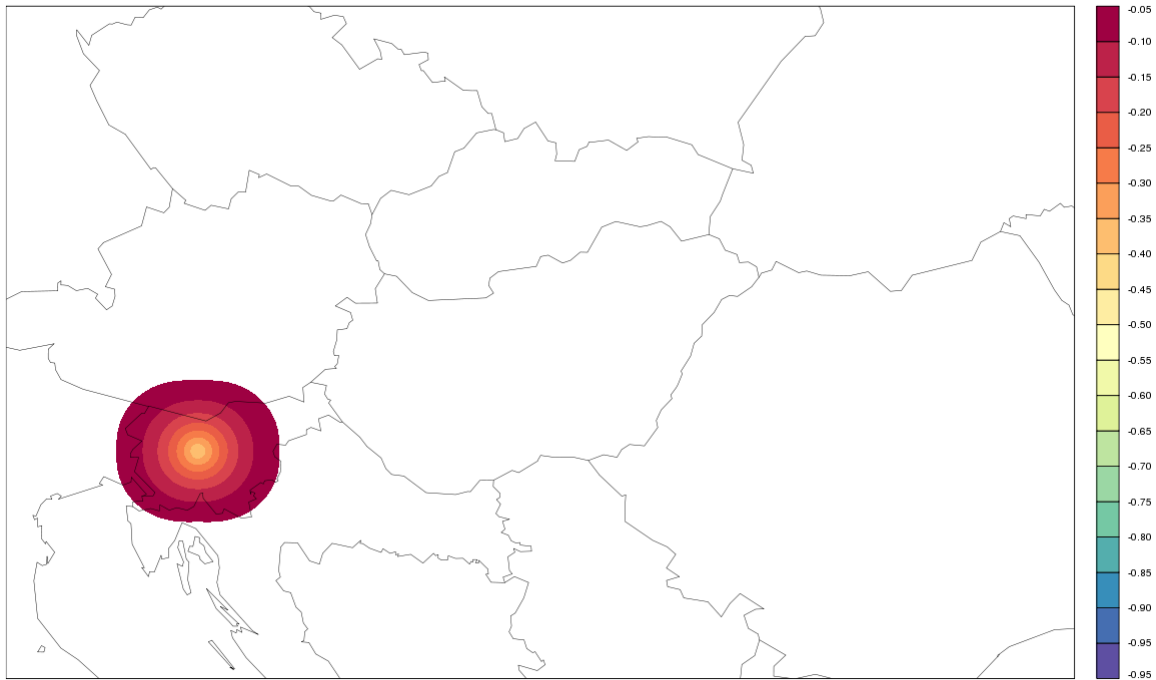
Mint ahogy az előző fejezet egyszerű példájában is megmutattuk a legkisebb négyzetek módszerének és a maximum likelihood módszer ekvivalenciáját, a jelenleg tárgyalt nagy dimenziószámú esetben is megmutatható, hogy lineáris megfigyelési operátor esetén [azaz ha  $\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{H}(\mathbf{x})$ ], a fenti veszteségfüggvény minimalizálása pontosan ugyanazt az eredményt adja, mint az optimális interpoláció, azaz a (II.17–18.) BLUE egyenletet. Az ekvivalencia a fenti veszteségfüggvény  $\mathbf{x}_a$  szerinti gradiensek számításával és annak zérussá tételével látható beformálisan. A gyakorlatban a nagy dimenziószám miatt a veszteségfüggvény zérus-helyének keresése nem kapható meg triviálisan egy gradiens számításból, hanem azt numerikusan közelítjük minimum-kereső algoritmusok alkalmazásával.

A minimum-kereső algoritmusok iteratív módon a gradiens értéke és iránya alapján javasolnak olyan újabb és újabb  $\mathbf{x}$  vektorokat, amelyekre a  $\mathbf{J}(\mathbf{x})$  veszteségfüggvény egészen addig csökken, amíg a gradiens értéke közel nulla nem lesz. A fenti veszteségfüggvény alakjából közvetlenül nem látszik, de belátható, hogy a gradiens számításához szükség van a  $\mathbf{H}$  operátor linearizáltjára ( $\mathbf{H}$ ) és adjungáltjára ( $\mathbf{H}^T$ ) is. A veszteségfüggvény értékének számításakor problémaként merül fel a nagy dimenziójú  $\mathbf{B}^{-1}$  és  $\mathbf{R}^{-1}$  mátrix inverzek számítása is, hasonlóan az optimális interpolációhoz. Az  $\mathbf{R}^{-1}$  számítása a megfigyelések korrelátlanságának feltétele mellett egyszerűvé válik, hiszen ebben az esetben  $\mathbf{R}$  diagonális mátrix a  $\sigma_{oi}^2$  szórásnégyzetekkel a főátlójában, amelyeknek a reciprokát véve kapjuk az inverz mátrixot. A  $\mathbf{B}^{-1}$  explicit számolását a  $\boldsymbol{\chi} = \mathbf{B}^{-1/2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b)$  vektor transzformációval szokás áthidalni, amelynek eredményeképpen a háttér tag az egyszerű  $\boldsymbol{\chi}^T \boldsymbol{\chi}$  alakot ölti. A  $\mathbf{B}^{-1/2}$  mátrixszal való szorzás pedig a gyakorlatban helyettesíthető az ismert háttér hiba szórásnégyzetek és kovarianciák négyzetgyökeit tartalmazó vektorszorzásokkal.

Ha a megfigyelések az analízis időpontjára vonatkoznak, a variációs veszteség függvény minimalizálása egy három-dimenziós analízis mezőt ad meg, ezért a variációs módszert három-dimenziósnek nevezzük (3DVAR). Abban az esetben azonban, ha a megfigyeléseket egy időintervallumon belül szeretnénk figyelembe venni, a veszteségfüggvény minimalizálása a modell egy időbeli trajektóriáját fogja megadni, azaz egy négy-dimenziós mezőt kapunk (4DVAR). Ekkor az  $\mathbf{y} - \mathbf{H}(\mathbf{x})$  inkrementum számításához a numerikus modell időbeli integrálására is szükség van, azaz a  $\mathbf{H}$  operátor magában foglalja az időbeli fejlődést leíró modell operátorát is ( $\mathbf{M}$ ), valamint a gradiens számításához szükség van a numerikus modell linearizáltjára ( $\mathbf{M}$ ) és adjungáltjára ( $\mathbf{M}^T$ ). A modell linearizáltjának és adjungáltjának létrehozása jelentős kódfejlesztést igényel, ugyanis a nem-lineáris modell kódjának soronkénti deriválását, illetve annak transzponálását igényli. Ez a kódfejlesztés igen munkaigényes, hiszen a nemlineáris modell folyamatos fejlesztése mellett a lineáris és adjungált változatokat is folyamatosan aktualizálni kell. Végül de nem utolsósorban érdemes azt is megjegyezni, hogy minden adott numerikus modell és használandó asszimilációs időablak esetén külön vizsgálni kell azt, hogy teljesül-e a linearitás feltétele (érvényes-e a tangens-lineáris közelítés), azaz hogy a  $\mathbf{H}(\mathbf{x}) - \mathbf{H}(\mathbf{x}_b) = \mathbf{H}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b)$  összefüggés jó közelítéssel fennáll-e.

### 3.) Kalman filter

A Kalman filter (vagy Kálmán-szűrő) jelentőségének megértéséhez fontos hangsúlyozni, hogy az asszimilációban a  $\mathbf{B}$  háttér hiba kovariancia mátrix szerepe rendkívül nagy, mégpedig azért mert a benne foglalt térbeli és változók közötti kovarianciák teszik lehetővé a megfigyelésekben rejlő információk kiterjesztését a modell rácsra (II.8. ábra) (Fisher, 2001).



II.8. ábra. Az analízis és a háttérmező különbsége (analízis inkrementum) a hőmérsékletre (K) a kb. 500 hPa-os szinten egy megfigyelés felhasználásával, amely 1 K-nel tér el a háttértől a megfigyelési pontban. Az ábra jól érzékelteti, hogy a Ljubljana fölötti hőmérséklet megfigyelés hatása horizontálisan kiterjed az analízisben a  $\mathbf{B}$  háttér hiba kovariancia mátrix hatására. A kísérlet az AROME nem hidrosztatikus modellel készült 2,5 km-es horizontális rácstávolságot használva.

A fent tárgyalt optimális interpoláció és variációs asszimiláció esetében  $\mathbf{B}$ -t időben konstans ismert mátrixnak tekintettük. A valóságban azonban a háttér hibák (rövidtávú előrejelzési hibák) mértéke és struktúrája meglehetősen függ az időjárási helyzettől (hiszen a modellek bizonyos helyzetekben jobb, más helyzetekben rosszabb előrejelzéseket produkálnak). A Kalman filter elmélet a háttér hiba kovariancia mátrix időfüggésének leírását célozza meg a (II.17–18.) BLUE egyenleteket kiegészítve a  $\mathbf{B}$  mátrix időbeli fejlődését leíró egyenlettel (lásd pl. Kalman, 1960; Kalnay, 2003). Legyen az analízis hiba kovariancia mátrixa  $\mathbf{A}$  és a modell hiba kovariancia mátrixa  $\mathbf{Q}$  (modell hiba alatt HTER diszkrétizációjából és a fizikai parametrizációk bizonytalanságából adódó hibát értjük). Jelöljük az analízis időbeli indexét  $k$ -val. A Kalman filter egyenleteket ekkor a következőképpen írhatjuk fel:

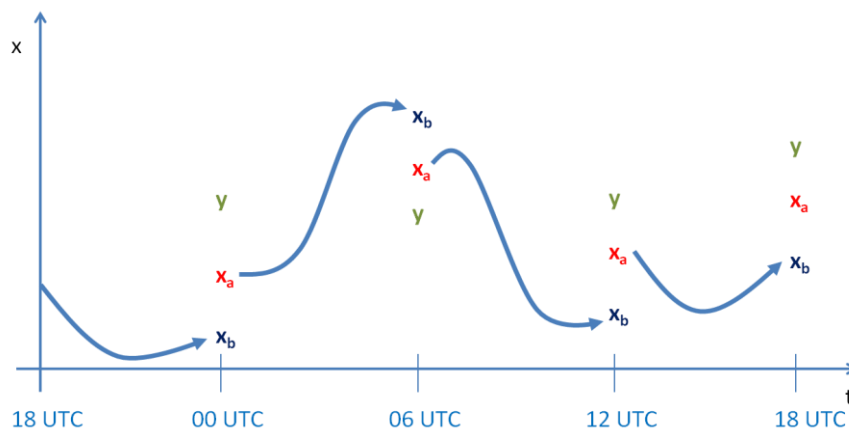
- az analízis számítása a  $k$  időpontban:  $\mathbf{x}_a^k = \mathbf{x}_b^k + \mathbf{K}^k [\mathbf{y}^k - \mathbf{H}(\mathbf{x}_b^k)]$  a  $\mathbf{K}^k = \mathbf{B}^k \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \mathbf{B}^k \mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1}$  súlymátrixot használva;
- az analízis hiba kovariancia mátrix számítása:  $\mathbf{A}^k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}^k \mathbf{H})$  ;
- a numerikus modell integrálása  $k$ -ból  $k + 1$  időpontba:  $\mathbf{x}_b^{k+1} = \mathbf{M}(\mathbf{x}_a^k)$  ;
- a háttér hiba kovariancia mátrix időbeli fejlődésének ( $k$ -ból  $k + 1$  időpontba) leírása:  $\mathbf{B}^{k+1} = \mathbf{M} \mathbf{A}^k \mathbf{M}^T + \mathbf{Q}$  .

A fenti egyenletek megoldása után a  $k + 1$ -edik időpontban ismert megfigyelések mellett minden információnk rendelkezésre áll a BLUE becslés kiszámításához, beleértve a  $k + 1$ -edik időpontra jellemző háttér hiba kovariancia mátrixot is. Fontos azonban megjegyezni, hogy a Kalman filter elmélet alkalmazása az operatív gyakorlatban nem lehetséges, mivel az  $\mathbf{M} \mathbf{A}^k \mathbf{M}^T$  számítása  $10^7 \times 10^7$  integrálást igényel a numerikus modell linearizáltjával, illetve

adjungáltjával, amelynek gyors (operatív gyakorlatban igényelt) számítására nincs lehetőség a jelenleg alkalmazott számítógépek kapacitása mellett. Mindazonáltal, az ensemble módszerek alkalmazásával lehetőség nyílik arra, hogy a **B** mátrix időbeli fejlődését leíró egyenletet ne explicit módon, hanem egyszerűsítve, dimenziócsökkentéssel oldjuk meg. Ezeket az egyszerűsített módszereket ensemble Kalman filtereknek nevezzük [erre a témakörre nem áll módunkban részletesebben kitérni a jegyzet keretein belül, de az érdeklődők például Evensen (2007) könyvéből tájékozódhatnak].

### Adatasszimilációs ciklus

Az analízisek és időbeli modellintegrálások (háttér előrejelzések) egymásutánját adatasszimilációs ciklusnak nevezzük. Az adatasszimilációs ciklus úgy is felfogható, mint a modell folytonos trajektóriájának a megfigyelésekhez való illesztése, amelyből tetszőleges időpontban (de leginkább azokban a szinoptikus időpontokban, amikor a legtöbb megfigyelés rendelkezésre áll) indíthatunk hosszabb távú, a gyakorlatban is felhasználható előrejelzéseket. Az adatasszimilációs ciklus lényegét az alábbi II.9. ábra szemlélteti sematikusán.



II.9. ábra. Az adatasszimilációs ciklus illusztrációja. Az analízis mindig a megfigyelés és a háttér közé esik. Az analízisből rövid-távú modell előrejelzésekkel kapjuk a háttérbecslést a következő analízis időpontra.

Az ábrán látszik, hogy a háttér előrejelzések az analízisből indulnak, amely mindig a megfigyelés és az előző háttér közé esik, hiszen mint azt az előző fejezetekben láttuk, az adatasszimilációs módszerek a megfigyelésekkel korrigálják a háttérmezőt. Az adatasszimilációs ciklus jelentősége abban áll, hogy segítségével a háttérmező egy adott analízis időpontban az összes korábbi, a ciklusban figyelembe vett, megfigyelés információtartalmával is bírni fog, azaz a ciklus ismerni fogja a légkör korábbi „történetét” (vagy legalábbis annak becslését), illetve más szavakkal azt is mondhatjuk, hogy minden egyes múltbeli megfigyelés hatással van minden egyes jövőre vonatkozó előrejelzésre.

### **II.2.2. Inicializáció**

#### Az inicializáció célja

Az időjárás előrejelzésben alkalmazott numerikus modellek megalkotásakor általában valamilyen egyszerűsítő közelítéssel élünk a HTER-re nézve (pl. a ma még gyakran használt hidrosztatikus közelítés, vagy a múltban előszeretettel használt kvázi-geosztrofikus és sekélyvíz közelítések). Ha magukat a prognosztikai egyenleteket nem is egyszerűsítjük le drasztikusan

(nem-hidrosztatikus modellek), a numerikus megoldáshoz szükséges diszkretizáció során mindenképpen információ veszteséggel kell számolnunk. Más szóval képtelenek vagyunk a valós légkör minden egyes folyamatát a modell rácson leírni. Mint ahogy azt az előző fejezetben megfogalmaztuk, az adatasszimiláció során megfigyelt információkkal tápláljuk a numerikus modellt a kezdeti feltételeken keresztül. Fontos tény, hogy a meteorológiai megfigyelési rendszerek „belemérhetnek” olyan légköri folyamatokba is, amelyeket a fent említett egyszerűsítések miatt az alkalmazott numerikus modell nem képes leírni (az egyenletek egyszerűsítése vagy a térbeli felbontás elégtelensége miatt). Amennyiben ilyen megfigyelést asszimilálunk, az zajhoz vezet a kezdeti mezőben, illetve a modell-egyenletek integrálása során.

Az, hogy mely megfigyelések vezetnek zajhoz és melyek hordoznak hasznos információt (jelet), az adott numerikus modell egyszerűsítéseitől (az alkalmazott közelítésektől) és a rácsfelbontástól függ. Egy ~10 km-es horizontális rácsfelbontású hidrosztatikus modellben például egy zivatarban elvégzett szél megfigyelés zajként fog jelentkezni, hiszen ebben az esetben sem az egyenletek, sem a rácsfelbontás nem engedi meg a zivatarcellák explicit leírását a modellben, azaz a méréshez hasonló nagy vertikális sebességeket. Ebben a példában a kezdeti mezőben jelentkező zaj főként a szél- és tömeg-mező kiegyensúlyozatlanságából adódik az adott hidrosztatikus közelítés mellett. A légköri hullám-mozgásokat (Práger, 1992) alapul véve úgy is fogalmazhatunk, hogy a fenti esetben olyan a zivatarokra jellemző nagy frekvenciájú gravitációs hullámokat is figyelembe veszünk a kezdeti mezőben, amelyek leírására az adott numerikus modell nem képes. Az ilyen hullámok csak zajként lehetnek tehát jelen az integrálás során, torzítva a megoldást.

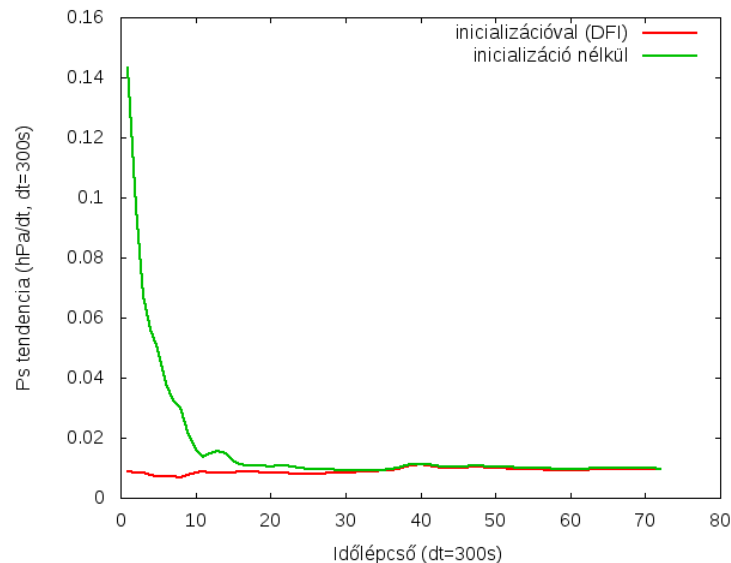
Az asszimilált megfigyelések gyakran a modellben parametrizált fizikai (termodinamikai) változókkal sem konzisztensek. A fenti példát alapul véve, egy hidrosztatikus modellben, amelyben a mély-konvekciót parametrizáljuk, egy a kezdeti mezőben előforduló nagy vertikális sebesség irreálisan nagy kondenzációt és csapadékképződést okozhat a kezdeti időlépcsőkben, ezzel elrontva az előrejelzést. A kezdeti zajnak betudható, a fizikai parametrizációkból származó instabilitásokat „spin-up”-nak vagy felpörgésnek nevezzük. Spin-upot okozhat a modellekben az is, ha a prognosztikus csapadékelemek hiányoznak a kezdeti mezőből (ezek asszimilációja igen nehézkes és ezért a legtöbb modell kezdeti feltételeiben ezek nem adottak), hiszen ekkor néhány időlépcsőnyi integrálásra van szükség, hogy a parametrizációs séma létrehozza ezeket.

Korlátos tartományú modellek esetén (vagyis amikor a modell nem az egész Földre, hanem csak egy jól behatárolt kisebb területre fókuszál) gyakori, hogy a kezdeti mezőt nem adatasszimiláció útján, hanem egy gyengébb felbontású meghajtó modell kezdeti feltételeinek interpolációjával határozzuk meg. Az interpoláció a meghajtó modell felbontása alatt óhatatlanul zajt generál, hiszen ez alatt a felbontás alatti térskálákról a meghajtó modellünk semmiféle információval nem rendelkezik.

Az inicializáció célja, hogy a kezdeti mezőben valamilyen módon megkülönböztesse a modell számára hasznos információt (a jelet), illetve a zajt, majd az utóbbit kiszűrje. Ez a zajszűrés meglehetősen fontos, hiszen szélsőséges esetben a kezdeti zaj hatására a modell numerikus megoldása instabillá válhat, azaz a valóságban elő nem forduló értékeket jelezhetünk előre. Általában a hatékony numerikus sémák alkalmazásának köszönhetően a numerikus instabilitások nem végzetesek inicializáció alkalmazása nélkül sem (a modell lefut), viszont az eredmény torzulhat, főként az integrálás kezdeti szakaszában (II.10. ábra).

A ma alkalmazott hidrosztatikus modellekben az inicializációs feladat tulajdonképpen a gyorsan terjedő gravitációs hullámok kiszűrésére szűkül le, hiszen ennek a hullám-mozgásnak a leírására a hidrosztatikus közelítés nem ad módot. Az egyre nagyobb felbontású nem-hidrosztatikus modellek esetében az inicializációra egyre kevésbé van szükség, hiszen ezek a modellek a gravitációs hullám-mozgásokat is képesek leírni, azaz ha van is zaj a kezdeti mezőben, azt egyre nehezebb elválasztani az értékes információtól. Ezekben a modellek-

ben az inicializáció fő célja a spin-up kiküszöbölése vagy lerövidítése, ami annál is inkább elengedhetetlen, mert ezek a nagy felbontású modellek legtöbbször az ultra-rövidtávú előrejelzési időszakokra koncentrálnak, azaz kulcskérdés, hogy az előrejelzés eredményes legyen már a modellintegrálás első óráiban is.



II.10. ábra. Az inicializáció hatása. A teljes modell tartományra kiátlagolt felszíni nyomás tendencia jó indikátora a gravitációs hullámok által keltett zajnak. Az inicializáció szűri ezt a zajt, amely leginkább a modellintegrálás kezdeti szakaszára jellemző. A fenti ábra az ALADIN/CHAPEAU modell hidrosztatikus változatának futtatásával készült 8 km-es horizontális ráctávolsággal és interpolált kezdeti feltételeket használva az ECMWF (European Centre for Medium-Range Weather Forecasts) globális modelljéből.

### Alkalmazott inicializációs módszerek

Az alkalmazott inicializációs módszerek közül az 1970-es években elterjedt normál módus inicializációt (NMI) (Leith, 1980) és az 1990-es években teret hódító digitális filter inicializációt (DFI) (Lynch és Huang, 1992) mutatjuk be tömören.

#### *1.) Normál módus inicializáció*

A Normál módus inicializáció az alkalmazott modell fő hullám-megoldásainak (normál módusainak) lassú (kis frekvenciájú) és gyors (nagy frekvenciájú) hullámokra való felosztásán alapszik, amelyekből természetesen csak a lassú, az adott modell-egyenletek által leírt hullámokat kívánjuk megtartani a kezdeti mezőben. A normál módusok és frekvenciájuk kiszámításához az adott egyenlet-rendszer linearizálása szükséges, hiszen a normál módusok által reprezentált tiszta hullám-mozgások csak periodikus, lineáris rendszerekben vannak jelen (ezek vizsgálatával reméljük azonban, hogy a teljes, nem-lineáris egyenletrendszert is tudjuk jellemezni, feltételezve, hogy a nem-lineáris mozgásformák a linearizált rendszerben előforduló hullám-mozgások szuperpozíciói) (Práger, 1992). A linearizálást a kis perturbációk módszerével végezhetjük el, és a linearizált egyenletrendszert a következő alakban írhatjuk fel:

$$\frac{dx'}{dt} = \mathbf{L}x', \quad (\text{II.20.})$$

ahol  $\mathbf{x}'$  az állapotvektor kis perturbációja (egy feltételezett alapállapottól vett kis eltérése),  $\mathbf{L}$  pedig egy konstans mátrix, amely a linearizált modell operátora. Feltesszük, hogy a normál módusok az alábbi hullám-függvény alakban írhatóak fel:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{X}e^{-i\omega t}, \quad (\text{II.21.})$$

ahol  $X$  az amplitúdó és  $\omega$  a frekvencia. A fenti normál módus alakot komponensenként visszahelyettesítve a linearizált egyenletbe és kiírva az  $\mathbf{L}$  mátrix elemeit, egy lineáris egyenletrendszerhez jutunk, amelyet megoldhatunk az  $\omega$  frekvenciára (Temperton, 1987; Kalnay, 2003). A normál módus inicializáció alkalmazásával így kapjuk meg a diszperziós relációt, vagyis az adott modell normál módusaihoz tartozó léggöri hullám-mozgások frekvenciáját (pl. Rossby- és gravitációs-hullámok frekvenciái). Az inicializáció a gyors, az adott modellben túl nagy frekvenciájú módusok amplitúdójának lenullázásával történik meg a kezdeti mezőben.

## 2.) Digitális filter inicializáció

A digitális filter alkalmazásánál a zajt valamilyen határértéknél nagyobb frekvenciájú léggöri hullámokkal azonosítjuk. A zaj szűrése ilyen módon egy alul-áteresztő (alacsony frekvenciákat megtartó és nagy frekvenciákat elimináló) digitális szűrő alkalmazásával valósulhat meg. A digitális szűrő alkalmazásakor a modell-változók időbeli sorozatát képezzük, majd a sorozat elemeit súlyozzuk (lineáris kombinációjukat képezzük):

$$x^* = \sum_{n=-N}^N h_n x_n. \quad (\text{II.22.})$$

A változók időbeli sorozatát ( $x_n$ ) a modell hátra-, majd előre-integrálásával állítjuk elő úgy, hogy a sorozat a kezdeti időpontra nézve centrált legyen. A hátrafele-integrálásnál ( $t = -N\Delta t$ -ig) a fizikai parametrizációkat nem tudjuk alkalmazni a termo-dinamikai folyamatok irreverzibilitása miatt, azonban az előre-integrálás a teljes fizikai parametrizációs csomag alkalmazásával történhet ( $t = +N\Delta t$ -ig). A kezdeti időpontra vonatkozó inicializált mezőt ( $x^*$ ) a  $h_n$  együtthatók megfelelő megválasztásával nyerjük. Az együtthatók meghatározására Huang és Lynch (1992) valamint Lynch és Huang (1992) a következő formulát javasolja:

$$h_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(\theta) \cdot e^{in\theta} d\theta \quad H(\theta) = \begin{cases} 1, & |\theta| \leq |\theta_c| \\ 0, & |\theta| > |\theta_c| \end{cases}, \quad (\text{II.23.})$$

ahol  $\theta$  a frekvencia és  $\theta_c$  az alkalmazott frekvencia határérték, amely fölött szűrünk. A fenti integrálást elvégezve kapjuk a  $h_n$  súlyokra a következő egyszerű alakot:

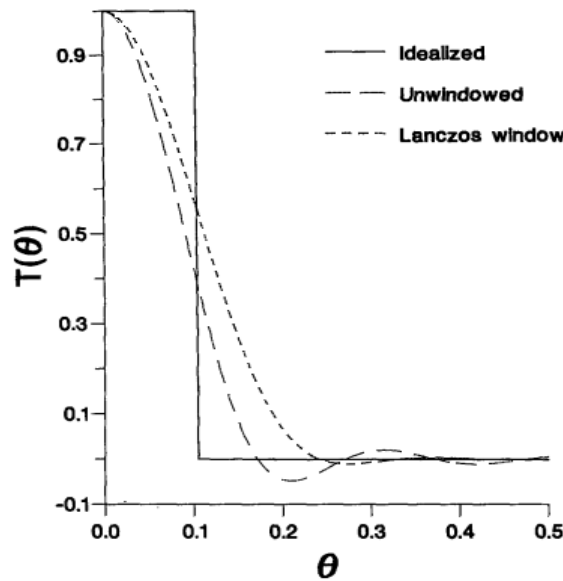
$$h_n = \frac{\sin(n\theta_c)}{n\pi}. \quad (\text{II.24.})$$

A  $h_n$  együtthatók Fourier-sorát képezve kapjuk meg az ún. *válaszfüggvényt*:



$$H(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_n \cdot e^{-in\theta}, \quad (\text{II.25.})$$

amely visszaadja az idealizált alul-áteresztő szűrő fent megfogalmazott tulajdonságát, miszerint  $\theta_c$  alatt az értéke 1, a felett pedig 0. A gyakorlatban a Fourier-sor számításakor csonkítást alkalmazunk (csak véges intervallumban számoljuk ki a fenti összeget, mint ahogyan adott véges hosszúságú időablakban hozzuk létre az  $x_n$  adatsort is, amelyen a szűrést végezzük). A csonkítás következménye, hogy az alul-áteresztő szűrőnk nem lesz többé ideális, azaz a nagy frekvenciák felé haladva a  $\theta_c$  környezetében, egy sima átmenettel veszi fel a válaszfüggvény a 0 értéket az 1 helyett (II.11. ábra).



II.11. ábra. A digitális szűrő (DFI) válasz függvénye idealizált, illetve valós esetben. A Lanczos ablak (Lynch és Huang, 1992) alkalmazásával jobb eredmény érhető el a DFI alkalmazásakor, ennek részleteire azonban a jegyzetben nem térünk ki.

### II.2.3. Feladatok

**Feladat 1:** Egyetlen térbeli pontban szeretnénk becsülni az  $x_t$  paramétert két megfigyelés,  $y_1$  és  $y_2$  alapján, amelyek normális eloszlású mintát alkotnak. Tudjuk, hogy a megfigyelések hibái torzítatlanok és korrelálatlanok, valamint ismerjük szórásnégyzetüket:  $\sigma_1^2$  és  $\sigma_2^2$ . Adjuk meg a becslés alakját a legkisebb négyzetek módszerével vagy a maximum likelihood becsléssel. Mutassa meg, hogyan jutott el a becslés alakjához.

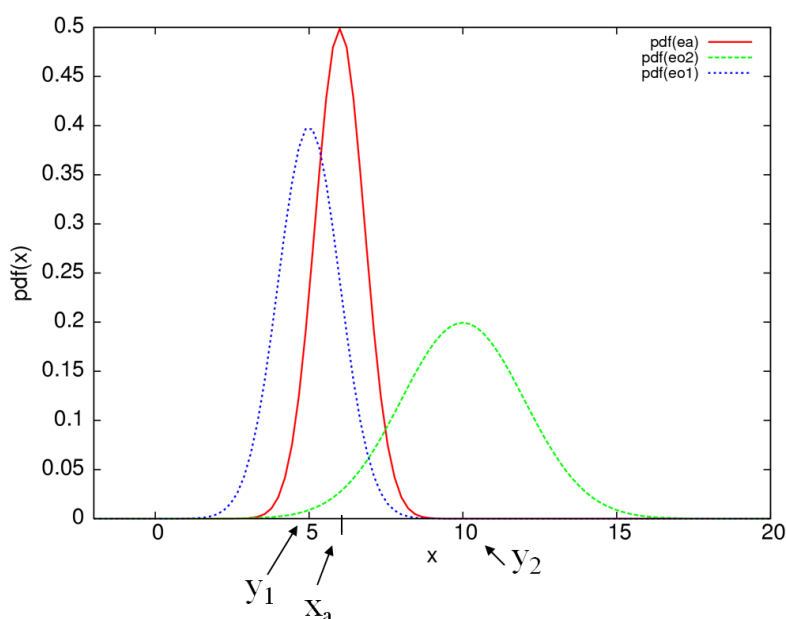
**Megoldás 1:** 
$$x_a = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} y_1 + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} y_2.$$

**Feladat 2:** Egyetlen térbeli pontban szeretnénk becsülni az  $x_t$  paramétert két megfigyelés,  $y_1 = 5$  és  $y_2 = 10$  alapján, amelyek normális eloszlású mintát alkotnak. Tudjuk, hogy a megfigyelések hibái torzítatlanok és korrelálatlanok, valamint ismerjük szórásnégyzetüket:  $\sigma_1^2 = 1$  és  $\sigma_2^2 = 2$ . Adjuk meg a becslést, illetve hibájának szórásnégyzetét. Ábrázoljuk a megfigyelésekhez tartozó sűrűségfüggvényeket, illetve a becslés sűrűségfüggvényét.

**Megoldás 2:**  $x_a = 6$ ,  $\sigma_a^2 = 0,8$ ; az ábrázoláshoz olyan programot kell írni (legegyszerűbb GnuPlot-ban), amely ábrázolja a normális eloszláshoz tartozó sűrűségfüggvényt:

$$N(x, m, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\left[\frac{1}{2} \frac{(x-m)^2}{\sigma^2}\right]}.$$

A sűrűségfüggvény alakjában várható érték ( $m$ ) helyére az adott megfigyelés (vagy az analízis) értékét, míg a szórás és szórásnégyzet helyére az adott megfigyelés (vagy az analízis) szórását, illetve szórásnégyzetét kell behelyettesíteni. Az eredmény:



**Feladat 3:** Vezessük le a Kalman filter elméletben megadott  $\mathbf{B}^{k+1} = \mathbf{M}\mathbf{A}^k\mathbf{M}^T + \mathbf{Q}$  egyenletet a háttér hiba kovariancia mátrix időfejlődésére, az alábbi definíciókat és feltételezéseket felhasználva:

- legyen  $\mathbf{M}$  lineáris modell, amelyre  $\mathbf{x}_b^{k+1} = \mathbf{M} \mathbf{x}_a^k$ ;
- háttér hiba definíciója:  $\boldsymbol{\varepsilon}_b^{k+1} = \mathbf{x}_t^{k+1} - \mathbf{x}_b^{k+1}$ ;
- analízis hiba definíciója:  $\boldsymbol{\varepsilon}_a^k = \mathbf{x}_t^k - \mathbf{x}_a^k$ ;
- modell hiba definíciója:  $\boldsymbol{\varepsilon}_M^{k+1} = \mathbf{x}_t^{k+1} - \mathbf{M} \mathbf{x}_t^k$ ;
- a modell hiba és az analízis hiba korrelálatlanok (a fenti definíciókból adódik);
- háttér hiba kovariancia mátrix definíciója:  $\mathbf{B}^{k+1} = E [\boldsymbol{\varepsilon}_b^{k+1}, (\boldsymbol{\varepsilon}_b^{k+1})^T]$ ;
- analízis hiba kovariancia mátrix definíciója  $\mathbf{A}^k = E [\boldsymbol{\varepsilon}_a^k, (\boldsymbol{\varepsilon}_a^k)^T]$ ;
- a modell hiba kovariancia mátrix definíciója:  $\mathbf{Q}^{k+1} = E [\boldsymbol{\varepsilon}_M^{k+1}, (\boldsymbol{\varepsilon}_M^{k+1})^T]$ .

**Megoldás 3:** Fejezzük ki a háttér hibát, a modell hibát ( $\boldsymbol{\varepsilon}_M^{k+1} = \mathbf{x}_t^{k+1} - \mathbf{M} \mathbf{x}_t^k$ ) leíró és az időbeli fejlődést ( $\mathbf{x}_b^{k+1} = \mathbf{M} \mathbf{x}_a^k$ ) leíró egyenletekkel. Ebből adódik, hogy:  $\boldsymbol{\varepsilon}_b^{k+1} = \mathbf{M} \boldsymbol{\varepsilon}_a^k + \boldsymbol{\varepsilon}_M^{k+1}$ , azaz a háttér hiba az analízis hiba időbeli fejlődéséből és a modellhibából tevődik össze. A háttér hiba ezen alakját behelyettesítve a háttér hiba kovariancia mátrix definíciójába, megkapjuk a keresett egyenletet.

## II.3. Diszkretizáció

Az előrejelzési feladat analitikus megoldása nem ismert, ezért a hidro-termodinamikai egyenletrendszer numerikus módszerek segítségével oldjuk meg. A folytonos egyenleteket diszkretizáljuk, azaz egy háromdimenziós rács rácspontjaiban tekintjük a meteorológiai állapothatározókat, s az előrejelzést (a modellintegrálást) az időtáv időlépcsőkre osztásával, lépésenként készítjük el. A diszkretizációval kapcsolatban az egyik legfontosabb kérdés, hogy az egyenletekben szereplő térbeli és időbeli differenciálást milyen numerikus módszerekkel végezzük el. A differenciál-operátorok közelítésére két módszer-családot alkalmazhatunk: (i) a **véges különbséges módszereknél** a deriváltakat az állapothatározók adott időpontbeli illetve rácspontbeli értékeinek segítségével állítjuk elő, míg (ii) a **Galjorkin módszer-család** (Haltiner és Williams, 1980) esetében a meteorológiai változókat olyan ún. *bázis függvények* segítségével írjuk fel, amelyek révén a differenciálás analitikusan elvégezhető. A Galjorkin-módszerek két típusa a véges elem és a spektrális módszer, és többnyire globális modellekben alkalmazzák őket, míg a véges különbséges módszert elsősorban korlátos tartományú modellekben használják. A jegyzet jelen fejezetében először a véges különbséges módszerek, majd a spektrális technika részleteibe nyújtunk betekintést.

### II.3.1. Véges különbséges közelítés

**Szerző: Szépszó Gabriella**

#### A vizsgált parciális differenciálegyenletek

Elsőként áttekintjük a lineáris parciális differenciálegyenletek típusait. Ugyan az előrejelzési feladat alapját bonyolultabb, nem-lineáris parciális differenciálegyenlet-rendszer képezi, mégis lényeges ismerni az egyszerűsített lineáris egyenletek megoldására alkalmazott módszereket, mert hasonlóakat használunk az összetett problémákon is. Kiindulásként tekintsük a vertikális irányban homogén, összenyomhatatlan, súrlódásmentes, forgó folyadék egyenleteit (Vreugdenhil, 1994):

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -g \frac{\partial h}{\partial x} + f \cdot v \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -g \frac{\partial h}{\partial y} - f \cdot u \\ \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} &= -h \cdot D,\end{aligned}\tag{II.26.}$$

ahol  $u(x, y, t)$  és  $v(x, y, t)$  a horizontális áramlási sebesség komponensei,  $h(x, y, t)$  a hullám magassága,  $g$  a gravitációs gyorsulás,  $f$  a Coriolis-paraméter és  $D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$  a horizontális

divergencia. A fenti egyenletek olyan folyadék mozgását írják le, melynek vertikális kiterjedése elhanyagolható a horizontális méretéhez képest, ezért ezeket **sekélyvíz-egyenleteknek** nevezik. A sekélyvíz közelítés jól használható a nagyterségű légköri folyamatok leírásánál, pl. a Rossby-hullámok esetében. Példáinkban a fenti egyenletek egyszerűsített, lineáris változatain fogjuk bevezetni és vizsgálni a véges különbséges módszereket, mégpedig:

- Az egydimenziós lineáris advekción egyenleten, amelyben az advekción sebesség konstans ( $c$ ):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0; \quad (\text{II.27.})$$

- Az egydimenziós lineáris gravitációs hullám-egyenleten, amelyben  $H$  a folyadék átlagos vastagsága (az óceán esetében 4 km, a légkör esetében 10 km):

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial t} + H \frac{\partial u}{\partial x} = 0; \end{cases} \quad (\text{II.28.})$$

- Az advekción és a gravitációs hullám-tagokat egyaránt tartalmazó feladaton:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial t} + c \frac{\partial h}{\partial x} + H \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (\text{II.29.})$$

Az egyenletekben kétfajta differenciál-operátor szerepel, az idő és a hely szerinti derivált, s ezek sajátosságai – mint az alábbiakban látni fogjuk – a diszkrétizálásukra alkalmazott véges differencia sémák jellegében is megmutatkoznak.

#### Véges differencia sémák az időbeli és térbeli deriváltak közelítésére

A diszkrétizációhoz először is definiáljunk egy **rácsot**, az egyszerűség kedvéért ekvidisztáns  $\Delta x$  rácsfelbontással, továbbá osszuk fel az időtávot  $\Delta t$  hosszúságú időlépésekre. A folytonos feladathoz konstruálunk egy olyan feladatot, melyet ezen a diszkrét téren értelmezünk (a továbbiakban ezt hívjuk diszkrét vagy véges differencia feladatnak). Ahogyan már említettük, a véges különbséges diszkrétizáció során adott változó időbeli és térbeli deriváltjait a változó különböző szempontok szerint kiválasztott időlépcsőkben illetve rácspontokban felvett értékei alapján számítjuk. Az egyenletekben szereplő **térbeli differenciál-operátoroknak** az adott  $j$  rácspontra vonatkozó diszkrétizációjára a leghatékonyabban a következő módszereket alkalmazzuk:

- Bal oldali séma:

$$u_{x,j}^- = \frac{u_j - u_{j-1}}{\Delta x}; \quad (\text{II.30.})$$

- Jobb oldali séma:

$$u_{x,j}^+ = \frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta x}; \quad (\text{II.31.})$$

- Középponti vagy centrált séma:

$$u_{x,j}^o = \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x}. \quad (\text{II.32.})$$

A sémák értelemszerűen arról kapták a nevüket, hogy a  $j$ -edik pontbeli derivált kiszámításához mely pozíciójú rácspontokat használjuk fel.

A numerikus megoldással kapcsolatban elvárjuk, hogy a diszkrétizált operátorok elegendően nagy pontossággal közelítsék a folytonos operátort. A diszkrét és folytonos feladat közelségét a **konzisztencia** adja meg: a véges differencia feladat konzisztens a folytonos feladattal, ha  $\Delta x \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0$  mellett a két feladat különbségéből adódó **maradéktag tart a 0-hoz** (ezt csonkítási hibának is nevezik, de ne keverjük össze a spektrális módszernél alkalmazott csonkítással). A konzisztencia rendjét a csonkítási hiba vezető tagjának fokszáma adja meg, s ez minél magasabb, annál pontosabban közelíti az adott véges differencia séma a folytonos problémát. Ha elvégezzük a konzisztencia vizsgálatát (ld. az alfejezet végén az 1. feladatot), akkor megállapíthatjuk, hogy a középponti séma magasabb (másod-) rendű pontossággal közelíti a folytonos differenciál-operátort, mint a bal és jobb oldali sémák.

Az időbeli deriválás esetében tekintsük a következő feladatot:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + f(u, t) = 0 \\ u(t = 0) = u_0. \end{cases} \quad (\text{II.33.})$$

A fenti ún. **Cauchy-probléma** (azaz a differenciálegyenlet és a kezdeti feltétel együttese) esetében a feladat tulajdonképpen  $u(t)$  előrejelzése a kiindulási állapot ismeretében. Az egyenletben szereplő differenciál-operátor közelítésére explicit vagy implicit sémákat használhatunk. **Az explicit sémák az adott időlépcsőbeli  $u$  meghatározásához csak ismert időlépcsőbeli értékeket használnak fel, míg az implicit sémák a még nem ismert időlépcsőkből is felhasználnak értékeket.** Az alábbiakban néhány egyszerű véges differencia sémát mutatunk az időbeli derivált diszkrétizációjára (ahol  $n$  az  $n$ -edik időlépést jelöli):

- A legegyszerűbb az explicit Euler- vagy Euler-forward séma, aminél a forward elnevezés arra utal, hogy a séma a következő időlépcsőbeli értéket az ismert értékekből, tehát időben előre határozza meg:

$$u_{n+1} = u_n - f(u_n, t_n) \cdot \Delta t; \quad (\text{II.34.})$$

- Implicit Euler-séma vagy Euler-backward séma:

$$u_{n+1} = u_n - f(u_{n+1}, t_{n+1}) \cdot \Delta t; \quad (\text{II.35.})$$

- Leapfrog-séma:

$$u_{n+1} = u_{n-1} - f(u_n, t_n) \cdot 2\Delta t; \quad (\text{II.36.})$$

- Másodrendű implicit séma:

$$u_{n+1} = u_n - [f(u_n, t_n) + f(u_{n+1}, t_{n+1})] \cdot \frac{\Delta t}{2}. \quad (\text{II.37.})$$

A felsorolt véges differencia módszerek közül a két Euler-séma elsőrendű, míg a leapfrog- és az utolsó, implicit módszer másodrendű (tehát nagyobb) pontosságot biztosít. Az Euler-forward és a leapfrog-módszer explicit sémák, (II.35.) és (II.37.) esetében viszont  $u_{n+1}$  meghatározásához felhasználjuk az  $f$ -nek az  $(n + 1)$ -edik időlépésben felvett értékét. Ahhoz, hogy  $u_{n+1}$ -et ilyen módon ki tudjuk számítani, operátor-invertálást vagy iterációt kell alkalmazni. Ez  $f$  alakjától függően bonyolulttá is teheti az implicit sémák használatát, alkalmazásuk esetenként mégis előnyös lehet a számítási hatékonyság szempontjából (erre később még visszatérünk).

A leapfrog módszer az  $(n + 1)$ -edik időlépésbeli  $u$  meghatározásához nemcsak az  $n$ -edik, de a két lépéssel korábbi  $(n - 1)$ -edik időlépésből is felhasznál információkat, azaz a módszer egy három-időszintes séma. Erre utal az elnevezése is: az aktuális  $u$  kiszámításához a kettővel korábbi időlépcsőből használja fel az  $u$  értékét és a megelőző időlépcsőbeli értéket csak az  $f$ -en keresztül veszi figyelembe („átugorja” a megelőző időlépcsőbeli  $u$ -t), így a páros és páratlan időlépcsőbeli értékek gyengén vannak csatolva. Ebből következően a leapfrog-sémát csak a második időlépés után lehet teljes egészében alkalmazni, s az első időszint értékeit más numerikus séma segítségével kell meghatározni – erre használhatunk például egy lépéses Euler-módszert (a leapfrog séma ezen tulajdonságából eredő következményeket később tárgyaljuk).

### Konvergencia és stabilitás

A numerikus megoldással kapcsolatban nemcsak azt várjuk el, hogy a diszkrétizált egyenletek elegendően nagy pontossággal közelítsék a folytonos feladatot, de azt is, hogy ( $U$ ) megoldásuk konvergáljon a(z) ( $u$ ) folytonos megoldáshoz. **Konvergencia** esetén  $\Delta x \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0$  mellett a diszkrét feladat megoldása tart a folytonos feladat megoldásához bármely  $j$  rácspontban és  $t > 0$  időpontban, azaz

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0, \\ j\Delta x \rightarrow x, n\Delta t \rightarrow t}} U(j\Delta x, n\Delta t) = u(x, t). \quad (\text{II.38.})$$

A konvergenciának tehát az előrejelzési időtáv minden időpontjában fenn kell állnia (azaz például a hatórás előrejelzések esetében csakúgy, mint a kétnapos prognózisoknál).

A konvergencia matematikai feltételének teljesülését nehéz belátni, ezért helyette legtöbbször a **stabilitás** teljesülését vizsgáljuk. Stabil feladatról akkor beszélünk, ha a feladat megoldása „folytonosan függ” a kiindulási feltételektől, azaz kis eltérés (hiba) a kezdeti feltételben nem vezet lényegesen eltérő megoldásra. Világos, hogy a stabilitás külön értelmezhető a folytonos és a diszkrét feladatban – előbbinél fizikai stabilitásról, utóbbinál számítási stabilitásról beszélünk. A meteorológiai problémák esetében, ahol az állapothatározók korlátos értékészletű függvények, a stabilitást a **hiba korlátosságán** keresztül vizsgáljuk. Adott pontbeli és időlépésbeli  $U_{j,n}$  megoldás stabilitásához szükséges, hogy rögzített  $\Delta x$  rácsteljesítés mellett és  $\Delta t \rightarrow 0$  esetén az

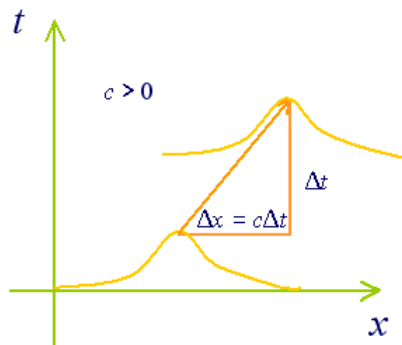
$$\varepsilon_n = U(j\Delta x, n\Delta t) - u(x, t); \quad n\Delta t = t, j\Delta x = x \quad (\text{II.39.})$$

alakban definiált hiba nem nő az idővel, azaz  $\varepsilon_n \leq \varepsilon_{n+1}$ . Az alkalmazott véges különbséges módszer pedig akkor stabil, ha bármely kezdeti feltételhez tartozó megoldás kielégíti a fenti feltételt (Mesinger és Arakawa, 1976). Lényeges, hogy ez csak a **stabilitás szükséges feltétele**, elégséges feltételt ugyanis nehéz megadni, s csupán néhány speciális esetben lehetséges.

A stabilitás és a konvergencia között a **Lax-Richtmyer tétel** (1956) teremt kapcsolatot, amely kimondja, hogy **egy konzisztens véges differencia sémával megadott feladat akkor és csak akkor konvergens, ha stabil**. Azaz a konzisztencia és a konvergencia együttes fennállása esetén a séma stabil, illetve a konzisztens és stabil séma egyben konvergens is. A tétel gyakorlati szempontból bír jelentőséggel, mert külön-külön a konzisztencia és a stabilitás fenti feltételének vizsgálata egyszerűbb, mint közvetlenül a konvergencia teljesülését ellenőrizni.

### A stabilitás vizsgálata

A stabilitás feltételét egy gyakorlati példán keresztül szemléltetjük. Tekintsük a (II.27.) egydimenziós lineáris advekción egyenletet. Ennek analitikus megoldása  $\phi(x - ct, 0)$ , amely a kezdeti feltételben megadott hullám  $c$  sebességgel való haladását írja le (II.12. ábra).



II.12. ábra. Az egydimenziós lineáris advekción egyenlet megoldásának sematikus rajza: a kezdeti feltétellel meghatározott hullám  $c > 0$  sebességgel  $x$ -irányba való áthelyeződése egy időlépcső alatt.

Diszkrétizáljuk a feladatot úgy, hogy az időbeli deriválásra explicit Euler-, a térbeli differenciálásra pedig bal oldali sémát alkalmazunk  $\Delta x$  rácsebontás és  $\Delta t$  időlépés mellett:

$$\frac{\phi_{j,n+1} - \phi_{j,n}}{\Delta t} + c \frac{\phi_{j,n} - \phi_{j-1,n}}{\Delta x} = 0. \quad (\text{II.40.})$$

Vezessük be az  $r = c \frac{\Delta t}{\Delta x}$  Courant-számnak nevezett mennyiséget, s rendezzük át az egyenletet az időlépcsők szerint:

$$\phi_{j,n+1} = \phi_{j,n} + r(\phi_{j-1,n} - \phi_{j,n}). \quad (\text{II.41.})$$

A fenti összefüggés alapján a séma a  $\phi$  következő időlépcsőbeli értékét adott rácspontban a  $\phi$  előző lépésbeli értékeiből állítja elő, az aktuális ( $\phi_{j,n}$ ) és a tőle balra lévő ( $\phi_{j-1,n}$ ) rácspont felhasználásával.

Vizsgáljuk meg a Courant-szám értékét! Ha  $r$  0 és 1 közé esik ( $0 \leq r \leq 1$ ), akkor a megoldás interpoláció eredményeként áll elő (II.13. ábra) és a séma pontosan úgy működik, ahogyan az advekción folyamata. Ellenben ha  $r < 0$  vagy  $r > 1$ , akkor a séma extrapoláció se-

gítségével állítja elő a megoldást  $\phi_{j,n}$  és  $\phi_{j-1,n}$  értékéből (tehát az említett két pont értékével ír le egy a tartomány másik részéről érkező információt; II.13. ábra). Az extrapolációval az a probléma, hogy az így nyert megoldás nem korlátos, ugyanis a háromszög-egyenlőtlenség alapján a (II.41.) egyenletre teljesül az alábbi:

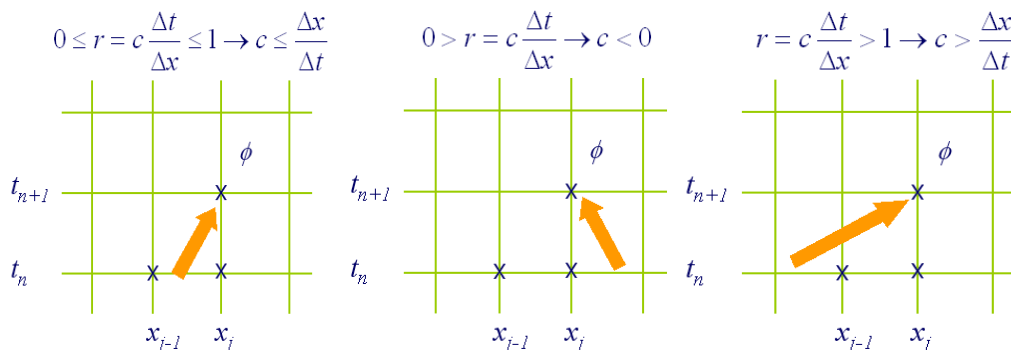
$$\begin{aligned} |\phi_{j,n+1}| &= |\phi_{j,n} + r(\phi_{j-1,n} - \phi_{j,n})| \leq |1-r| \cdot |\phi_{j,n}| + |r| \cdot |\phi_{j-1,n}|, \\ \phi_{j,n+1} &\leq (|1-r| + |r|) \cdot \phi_{j,n}. \end{aligned} \quad (\text{II.42.})$$

Abban az esetben, ha a  $\phi_{j,n}$  együtthatója 1-nél nagyobb, a megoldás minden időlépésben növekszik és nem marad stabil – a diszkrét feladat néhány időlépés után „felrobban”. Az együttható akkor nem nagyobb 1-nél, ha  $0 \leq r = c \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$  teljesül. Ha a koordináta-rendszert úgy választjuk, hogy benne a  $c$  sebesség pozitív irányú, akkor ez egyenértékű a

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{c} \quad (\text{II.43.})$$

feltétellel.

A feltétel általánosítható más feladatokra is, s általános alakjában Courant–Friedrichs–Lewy vagy **CFL-kritériumnak** (Courant et al., 1928) nevezik. Kimondja, hogy a diszkrétizált feladat stabilitásához **az időlépcsőt nem választhatjuk korlátlan hosszúságúra, ennek határt szab az alkalmazott térbeli felbontás és a feladat által leírt mozgásformák leggyorsabb terjedési sebessége.** (Ismét kiemeljük, hogy a stabilitásnak ez szükséges, de nem elégséges feltétele.) Richardson 1920-as években végrehajtott kísérlete, az első kézzel végzett „numerikus” előrejelzés többek között azért végződött kudarccal, mert ez a kritérium akkor még nem volt ismert, s a számítások során Richardson túl hosszú időlépcsőt alkalmazott. A CFL-feltételnek a számítási hatékonyság szempontjából van jelentősége, a meteorológiai előrejelzések készítésénél a számítási műveletek és az adatok rendkívüli mennyisége miatt ugyanis az alkalmazott numerikus módszerek hatékonysága is lényeges szempont. Minél nagyobb időlépcsőt tudunk használni, az integrálási műveleteket annál kevesebb lépésben kell megismételni, s az előrejelzést annál gyorsabban tudjuk előállítani. Célunk tehát az, hogy az előrejelzési feladatot olyan numerikus sémák segítségével oldjuk meg, melyek adott felbontás mellett a lehető legnagyobb időlépcső használatát engedik meg.



II.13. ábra. Az egydimenziós lineáris advekciós egyenletben szereplő  $c$  advekciós sebesség, valamint a diszkrétizációhoz használt  $\Delta x$  rácsfelbontás és  $\Delta t$  időlépés kapcsolatának sematikus rajza: az  $r$  Courant-szám értékétől függően az  $(n + 1)$ -edik időszinten a megoldás interpolációval (1. panel) vagy extrapolációval (2. és 3. panel) áll elő (Kalnay, 2003 nyomán).



A numerikus stabilitást az előzőekben az ún. *direkt* vagy *maximum-kritérium módszer* segítségével vizsgáltuk, ami viszont szemléletessége ellenére csak korlátozottan használható. Helyette kiterjedten alkalmazzák a **Neumann-módszert** lineáris (vagy linearizált) problémák esetében. A módszert az advekción egyenlet példáján keresztül mutatjuk be. Tekintsük tehát a (II.27.) feladatot a hozzá tartozó kezdeti feltétellel. A lineáris differenciálegyenletek megoldása kifejezhető függvénysorok segítségével, a Neumann-módszer alkalmazásánál a kezdeti feltételt és a megoldást Fourier-sor alakban keressük. Kihasználjuk még, hogy lineáris feladat esetében a Fourier-sor minden tagja megoldás, így elegendő egyetlen (jelen esetben a  $k$ -adik) Fourier-komponenst tekinteni. Ugyanezt a módszert követjük a folytonos feladathoz konstruált véges differencia feladat esetében is. Ez alapján a diszkrét feladat kezdeti feltétele tetszőleges  $j$  rácspontban, valamint megoldása az  $n$ -edik időlépésben az alábbi módon írható fel:

$$\begin{aligned}\phi(x_j, t=0) &= \phi_{j,0} = c_k \cdot e^{ikx_j}, \\ \phi(x_j, t_n) &= \phi_{j,n} = \lambda_k^n \cdot c_k \cdot e^{ikx_j},\end{aligned}\tag{II.44.}$$

ahol  $k$  és  $c_k$  az adott hullám-módushoz tartozó hullámszám illetve együttható,  $\lambda_k$  pedig a  $k$  hullámszámhoz tartozó és a numerikus sémától függő komplexértékű, amplitúdó-jellegű mennyiség. A fenti összefüggésben tehát a numerikus megoldás úgy áll elő, hogy a kezdeti feltétel minden időlépésben egy amplitúdó-jellegű mennyiséggel szorozódik. Ahhoz, hogy a megoldás korlátos maradjon, szükséges, hogy  $|\lambda_k|$  ne legyen nagyobb 1-nél – ez a stabilitás (és a konvergencia) szükséges feltétele. Amennyiben  $|\lambda_k| > 1$ , úgy a kezdeti feltételt leíró hullám minden időlépésben gerjesztődik és a diszkrét feladat nem lesz stabil. Ha  $|\lambda_k| < 1$ , akkor a véges differencia séma fiktív csillapítást vezet be, azaz a kezdeti feltételhez tartozó hullám-megoldás az idővel folyamatosan csillapodik, szélsőséges esetben bizonyos hullámok teljesen el is tűnhetnek (ez bizonyos nagyfrekvenciás, nemkívánatos hullám-megoldásoknál előnyös lehet). Ideálisan  $|\lambda_k|$  pontosan 1-gyel egyenlő, ekkor a véges differencia séma nem változtatja meg a kezdeti feltételt leíró hullám amplitúdóját (neutrális).

Megjegyezzük, hogy a Neumann-módszernél is általánosabban alkalmazható az energia-módszer, például nem-lineáris problémák numerikus stabilitásának vizsgálatára. A módszert azonban a jegyzet keretében nem tárgyaljuk, az érdeklődőknek Durran (1999) írását ajánljuk.

#### A stabilitási feltétel különböző meteorológiai problémákra

Térjünk most vissza a CFL-kritérium általános alakjához, amihez tekintsük a lineáris gravitációs hullám (II.28.) egyenletét. A feladat átírható a következő alakban:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u \\ h \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -g \\ -H & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} u \\ h \end{pmatrix},\tag{II.45.}$$

ahol a jobb oldalon szereplő mátrix sajátértéke (a determináns alapján)  $\pm \sqrt{gH}$ , azaz a  $k$  hullámszámhoz két, ellentétes irányban  $\sqrt{gH}$  fázissebességgel haladó hullám tartozik. A feladatban tehát a legnagyobb terjedési sebesség a gravitációs hullám  $\sqrt{gH}$  alakú terjedési sebessége. A Neumann-módszer segítségével belátható (a Neumann-módszer alkalmazására az

alfejezet végén a 2. feladat szolgált példát), hogy a feladat diszkretizációjára a fenti sémát alkalmazva a stabilitási kritérium:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\sqrt{gH}}. \quad (\text{II.46.})$$

Becsüljük meg a napjaink numerikus modelljeiben alkalmazható időlépcsők nagyságát! A tropopauza átlagos magasságát ( $H$ -t) 10 km-nek, a gravitációs gyorsulás ( $g$ ) átlagos értékét  $10 \text{ ms}^{-2}$ -nak véve, ez a sebesség  $300 \text{ ms}^{-1}$  nagyságúnak adódik, s így a 10 km-es rácsfelbontásnál alkalmazható időlépcső nem nagyon haladhatja meg a 30 másodpercet. Ezzel szemben az advekciónál szereplő advekciónál sebesség még a nagy magasságokban sem nagyobb  $100 \text{ ms}^{-1}$ -nál, ekkor az integrálási időlépés 10 km-es felbontás mellett 100 s is lehet. Látható tehát, hogy a most kapott (II.46.) stabilitási kritérium szigorúbb korlátot jelent az időlépcső hosszára, mint amit az advekciónál egyenlet esetében kaptunk.

Megvizsgálva az előrejelzési feladatot realisabban közelítő, advekciónál és gravitációs hullám tagokat egyaránt tartalmazó (II.29.) feladatot is, hasonló módon belátható, hogy a fenti explicit sémát alkalmazva az időlépcsőnek az alábbi kritériumot kell kielégíteni:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{c + \sqrt{gH}}. \quad (\text{II.47.})$$

Tehát az adott felbontás esetén alkalmazható időlépcső hosszára az advekciónál és a gravitációs hullám terjedési sebességének összege szab korlátot. Mivel a korábbiakban láttuk, hogy az utóbbi lényegesen nagyobb az előbbinél, ezért kijelenthetjük, hogy a stabilitás szükséges feltételénél gyakorlatilag a gravitációs hullámok terjedési sebessége a meghatározó.

Hasonló eredményre vezet, ha az időbeli és térbeli deriváltak közelítésére leapfrog illetve centrált véges differencia módszereket alkalmazunk. A **leapfrog-séma** esetében egy további jelenséggel kell számolnunk, nevezetesen azzal, hogy a Neumann-módszerrel  $\lambda_k$ -ra két megoldás adódik. Az egyik a folytonos feladat fizikailag értelmes megoldásához tartozó ún. *fizikai módus*, a másik viszont abból ered, hogy két kezdeti feltételt kell megadni a séma indításakor, s így jelenik meg a fizikai értelemmel nem bíró, ún. *számítási módus*. Mivel a **teljes numerikus megoldás a fizikai és a számítási módus (lineáris) kombinációjaként áll elő**, nagy jelentősége van annak, hogy a számítási módus hogyan fejlődik az idővel. A fiktív móduszhoz általában negatív előjel társul, aminek következtében minden időlépcsőben előjelet vált, ezért célszerű valamilyen módszerrel kiszűrni. A szűrő megoldások a leapfrog-sémában egyébként gyengén csatolt páros és páratlan időlépcsők összekapcsolását szolgálják, a gyakorlatban a legelterjedtebb az Asselin-filter (1972).

Megállapíthatjuk tehát, hogy a tisztán explicit sémák segítségével az előrejelzési feladatot csak olyan időlépcső alkalmazásával tudjuk a stabilitás megőrzésével megoldani, amelyek kielégítik a fenti feltételt. Ez azonban, ahogy a nagyságrendi becslés során láttuk, nem kedvez a számítógépes megvalósítás hatékonyságának, mert a teljes primitív egyenletrendszer esetén csak korlátozott hosszúságú időlépést enged meg. Célunk tehát olyan nagy pontosságú diszkretizációs módszerek alkalmazása, melyekkel a numerikus stabilitás gyakorlatilag tetszőlegesen hosszú integrálási időlépcső használata mellett sem sérül. Hogy ehhez milyen irányba kell elindulni, arra a fázishiba jelensége fog magyarázatot adni.

A hullám-megoldás amplitúdóján kívül a véges differencia séma a folytonos feladatban jellemző  $c$  fázissebességet is módosíthatja, ezt hívjuk **fázishibának**, amit a diszkrét feladatbeli  $c'$  és a folytonos feladatbeli  $c$  fázissebességek arányaként definiálunk. Amennyiben  $c' > c$ , a véges differencia séma gyorsítja a folytonos feladatbeli  $k$  hullámot; ha  $c' < c$ , akkor a

séma lassítja a  $k$  hullámot; s ha  $c' = c$ , akkor a séma nem változtatja meg a hullám fázissebességét. Bár az utóbbi eset tűnik ideálisnak, mégis alkalmasan megválasztott véges differencia séma esetében bizonyos hullámok „lassúbbá torzítása” előnyös is lehet. Ennek illusztrálására tekintsük például a (II.28.) feladatot, amelynek a meteorológiai szempontból kevésbé releváns gyorsan terjedő gravitációs hullámok is megoldásai. Az előzőekben láttuk, hogyha erre explicit véges differencia sémát alkalmazunk, amely a hullámok fázissebességét lényegesen nem változtatja meg, akkor meglehetősen szigorú feltételt kell a numerikus stabilitás teljesítéséhez kielégíteni, amiben a vezető tag a feladat által leírt leggyorsabban terjedő mozgásforma (jelen esetben a gravitációs hullámok) fázissebessége. Implicit séma alkalmazásával azonban kedvezőbb feltétel nyerhető vagy éppen feltétel nélküli stabilitással tudunk dolgozni, mégpedig azért, hogy az implicit módszer ezeknek a nagyfrekvenciás hullámoknak a fázissebességét csökkenti. A megoldás fizikai értelmezésénél ez nem okoz problémát, mert ahogyan már említettük, ezek a hullámok a meteorológiai folyamatok szempontjából nem lényegesek, viszont a gyorsan terjedő hullámok lassításával stabilizálható a feladat ezekért felelős része.

### Hatékony numerikus sémák

Az előző alfejezetben különböző véges differencia sémák numerikus stabilitását tekintettük át. Láttuk, hogy az explicit sémák alkalmazásával a stabilitás csak akkor teljesülhet, ha eleget teszünk a CFL-kritériumnak. Az implicit sémák esetében tetszőlegesen hosszú időlépcső választható, mégpedig azért, mert ezek a feladatban érvényes fázissebességet lassítják, s ezáltal a gyorsan terjedő hullám-megoldásokra is stabil megoldást biztosítanak. Az általuk okozott fázishiba ugyanakkor nem minden hullám esetében kívánatos, ezért, valamint bonyolult megvalósításuk miatt a meteorológiai gyakorlatban nem alkalmaznak tisztán implicit sémákat.

### *Szemi-implicit módszer*

Alkalmazzunk most a (II.29.) feladatra ún. *szemi-implicit* diszkretizációt, ami az advekción tagok esetében megtartja az explicit sémát, a gravitációs hullám tagokat viszont implicit módon kezeli (Robert, 1981). Például az előbbi tagok esetében az explicit középponti sémát használjuk, az utóbbi tagok esetében pedig centrál sémák átlagát vesszük két időszintre:

$$\begin{cases} \frac{u_{j,n+1} - u_{j,n-1}}{2\Delta t} + c \frac{u_{j+1,n} - u_{j-1,n}}{2\Delta x} + g \frac{\frac{h_{j+1,n} - h_{j-1,n}}{2\Delta x} + \frac{h_{j+1,n+1} - h_{j-1,n+1}}{2\Delta x}}{2} = 0 \\ \frac{h_{j,n+1} - h_{j,n-1}}{2\Delta t} + c \frac{h_{j+1,n} - h_{j-1,n}}{2\Delta x} + H \frac{\frac{u_{j+1,n} - u_{j-1,n}}{2\Delta x} + \frac{u_{j+1,n+1} - u_{j-1,n+1}}{2\Delta x}}{2} = 0. \end{cases} \quad (\text{II.48.})$$

A Neumann-módszer segítségével belátható, hogy a szemi-implicit módszer alkalmazása esetén a következő adódik:

$$c^2 \cdot \Delta t^2 \leq \Delta x^2 + gH \cdot \Delta t^2, \quad (\text{II.49.})$$

ez pedig minden esetben teljesül, amikor az advekcións egyenletnél kapott stabilitási feltétel érvényes, azaz amikor:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{c}. \quad (\text{II.50.})$$

Tehát a szemi-implicit módszer alkalmazásával elértük, hogy ne a feladat által leírt leggyorsabban terjedő mozgásforma, a gravitációs hullámok terjedési sebessége legyen a meghatározó az időlépcső megválasztásánál, hanem az annál jóval kisebb advekción sebesség, lehetővé téve a nagyobb időlépésekben történő stabil modellintegrálást.

A szemi-implicit séma szépsége abban áll, hogy az implicit kezelést az egyenlet lineáris részére alkalmazza, s ezek a tagok felelősek egyben azokért a hullám-megoldásokért, melyek gyorsan terjednek, de jelentőségük meteorológiai szempontból kicsi. Az implicit módszer ezeket a hullámokat lelassítja, ezáltal stabilizálja a feladat lineáris részét, de érintetlenül hagyja a meteorológiailag releváns, lassúbb mozgásformákat. Általánosan a szemi-implicit módszer a következő alakban írható fel egy  $\Psi$  vektor-mennyiségre:

$$\frac{\partial \Psi^0}{\partial t} = \mathbf{L} \left( \frac{\Psi^+ + \Psi^-}{2} \right) + \mathbf{N}(\Psi^0), \quad (\text{II.51.})$$

ahol a teljes nem-lineáris modellt linearizáljuk egy referencia-állapot körül és az  $\mathbf{L}$  operátor a modell linearizált része, az  $\mathbf{N}$  operátor a nem-lineáris maradéktag, a 0, +, – indexek pedig az aktuális, a későbbi és a korábbi időlépcsőket reprezentálják, jelölve, hogy **a szemi-implicit módszerben a linearizált tagokra implicit, a nem-lineáris tagokra explicit kezelést alkalmazunk**. Hátránya az eljárásnak, hogy a linearizáláshoz használt referencia-állapot (izoterm, nyugvó légkör) gyakran távol esik a valós légköri állapottól. A nem-lineáris egyenletrendszer teljes implicit kezelése (ami biztosíthatná a feltétel nélküli stabilitást) nem lehetséges (és reális), mert ez egy nem-lineáris operátor invertálását igényelné. Ezért hogy az advekción sebesség által meghatározott stabilitási feltételt tovább tudjuk enyhíteni, a szemi-implicit sémát ötvözni kell egy másik hatékony módszerrel.

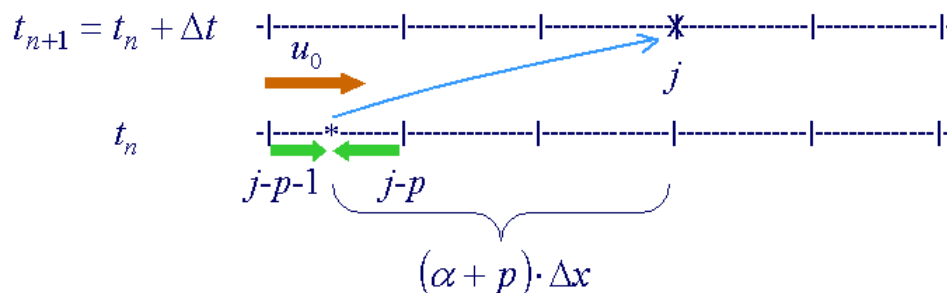
### *Szemi-Lagrange módszer*

A hidro-termodinamikai egyenletrendszerben a legdominánsabb nem-lineáris tag a nem-lineáris advekción, s ennek kezelésére hívjuk segítségül a Lagrange-módszert. A Lagrange-szemléletben nem egy térben rögzített koordináta-rendszer pontjaiban tekintjük az állapotváltozók változását, hanem a részecskékhez (légelemekhez) rögzített lokális koordináta-rendszerekkel dolgozunk: a részecskék trajektóriáját követjük, ami mentén magukkal viszik kiindulási tulajdonságaikat. Adott  $\phi$  tulajdonság trajektória-menti megmaradását fejezi ki az egydimenziós lineáris advekción egyenlet alábbi Lagrange-alakja:

$$\frac{d\phi}{dt} = 0, \text{ ahol } \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x}. \quad (\text{II.52.})$$

Tehát az állapotváltozók adott időpontban vett térbeli eloszlásának és pályájának ismeretében meghatározható jövőbeli eloszlásuk. A numerikus számítások során azonban szeretnénk az Euler-szemléletnek azt a kényelmes tulajdonságát megtartani, hogy a légköri változókat egy szabályos rács rácspontjaiban tekintjük (egyrészt mert egyéb műveleteket is rácson kell elvégezni, másrészt mert ezáltal egyenletes térbeli lefedettség biztosítható). Ez a tiszta Lagrange-módszer segítségével nem lehetséges, hiszen azok a részecskék, melyek kiinduláskor még szabályosan helyezkedtek el, egy időlépés után már szabálytalan és térben inhomogén elrendeződést ölthetnek. Ezért az ún. **szemi-Lagrange módszerben minden időlépésben egy backward (visszafelé) trajektória számításával, majd térbeli interpoláció alkalmazásával állítjuk elő az állapotváltozók értékét az általunk kívánt rácspontokban** (II.14. ábra). Világos, hogy így az időbeli integrálás során nem ugyanazokat a részecskét követjük, hanem

a rácspontok elhelyezkedése alapján **minden időlépésben egy új részecskehalmazt definiálunk**.



II.14. ábra. A szemi-Lagrange módszer sematikus rajza.

A trajektória kiindulási pontját (az ábrán \* jelöli) az advekcíós sebesség ismeretében tudjuk meghatározni, amit az egyszerűség kedvéért most tekintsünk állandónak: a részecske ekkor  $\Delta t$  idő alatt  $c$  sebességgel advektálódik, minek során  $(\alpha + p) \cdot \Delta x$  távolságot tesz meg. A korábbi időszintről való indulás nem feltétlenül rácspontból történik, ezért a megtett utat két részre oszthatjuk: a  $\Delta t$  idő alatt bejárt rácspontok számát  $p$ -vel jelöljük, ahol  $p$  egész szám, a maradék út pedig a rácstávolság  $\alpha$ -szorosa, ahol  $\alpha$  értelemszerűen 0 és 1 közé eső törtszám, azaz:

$$(p + \alpha) \cdot \Delta x = c \cdot \Delta t. \quad (\text{II.53.})$$

Az  $(n + 1)$ -edik időlépésben a  $\phi$  állapotváltozó értéke a konzervativitás miatt meg fog egyezni a  $\phi$   $n$ -edik időlépésben és \* pontban felvett értékével. Mivel az  $n$ -edik időszinten a  $\phi$  eloszlását csak a rácspontokban ismerjük, ezért a \*-gal jelölt pontban az értéket térbeli interpolációval tudjuk előállítani. Az egyszerűség kedvéért tekintsük most a legegyszerűbb lineáris interpolációt:

$$\phi_{j,n+1} = \phi_{*,n} = (1 - \alpha) \cdot \phi_{j-p,n} + \alpha \cdot \phi_{j-p-1,n}. \quad (\text{II.54.})$$

A Neumann-módszer segítségével belátható, hogy

$$|\lambda_k|^2 = 1 - 2\alpha \cdot (1 - \alpha) \cdot (1 - \cos k\Delta x), \quad (\text{II.55.})$$

ahol a korábbiak szerint  $k$  az adott hullám-módushoz tartozó hullámszám,  $\lambda_k$  a  $k$  hullámszámhoz tartozó és a numerikus sémától függő komplexértékű, amplitúdó-jellegű mennyiség. Ez alapján a séma stabilitásának kritériuma az, hogy  $\alpha$ -ra fennálljon az  $0 \leq \alpha \leq 1$  feltétel. Ez azonban a séma konstrukciójából eredően teljesül, így **a séma feltétel nélkül stabil**. A szemi-Lagrange módszer alkalmazásakor tehát nem kell tekintettel lennünk a CFL-kritériumra, a kritérium által megengedettnél hosszabb időlépcsőt is választhatunk. Ez az időlépcső azonban továbbra sem lehet tetszőlegesen nagy, figyelembe kell venni a **Lipschitz-feltételt**, mely szerint **a trajektóriák egy időlépcső alatt nem metszhetik egymást** – ellenkező esetben nem lehetséges a részecskék pályáját egyértelműen meghatározni (Smolarkiewicz és Pudykiewicz, 1992). Mindazonáltal numerikus kísérletekkel igazolták, hogy mezoskálájú modellek esetén a szemi-Lagrange séma az időlépcső mintegy hatszoros növelését teszi lehetővé az euleri sémákkal szemben, továbbá a szemi-implicit sémával való kombinálása esetén az integrálás

hatékonysága további hatszorosával növelhető (Staniforth és Côté, 1991). Hatékonyságuk miatt a szemi-Lagrange és a szemi-implicit módszereket, illetve kombinációjukat szívesen alkalmazzák az operatív időjárás-előrejelző modellekben, pl. az Országos Meteorológiai Szolgálatnál futtatott ALADIN és AROME modellekben is. Az ALADIN modellben a szemi-Lagrange séma 8 km-es horizontális felbontás mellett 300 másodperces időlépcső alkalmazását teszi lehetővé, ami gyors modellintegrálást eredményez, különösen ha összevetjük azzal, hogy a WRF modell euleri advekciokezelése hasonló, 7 km-es felbontáson csak 40 s hosszú időlépcsőt enged meg (André, 2012). Meg kell említeni, hogy vannak olyan kis időskálán zajló fizikai folyamatok, amelyek pontos leírásához nem elegendő egy hosszabb időlépcső. Például a csapadékképződés során a csapadékelemek néhány perc alatt kieshetnek az egységnyi rácsérfogatból, ezért ennek pontosabb leírásához a dinamikai időlépcsőt felosztják kisebb lépésekre.

A fentiekben a szemi-Lagrange séma alapelvét mutattuk be, a gyakorlati megvalósítás során általában a módszer bonyolultabb, két-időszintes változatát alkalmazzuk. A szemi-Lagrange sémával előállított megoldást összehasonlítva a folytonos megoldással, megállapítható, hogy a módszer olyan csillapítást vezet be, ami bizonyos esetekben a legrövidebb hullámok teljes kioltáshoz is vezethet (Dévényi et al., 1998). Ez a fiktív csillapítás a hosszabb szimulációknál (pl. éghajlati kísérlet esetében) tönkretelheti a megoldást, ezért elsősorban klímamodellezési célokra kifejlesztették a séma ún. *nem-interpolációs változatát* (Ritchie, 1986). Ekkor a trajektóriát lényegében egy a legközelebbi rácspontba mutató és egy „maradék” vektor összegére bontják fel, és csak a rácspontok közötti advekción kezelik szemi-Lagrange módszerrel. Ezen túlmenően a szemi-Lagrange séma nem változtat a megoldás terjedési sebességén, ha a kiindulási pont éppen rácspontba esik, ha a részecske egy időlépés alatt nagy távolságot tesz meg, illetve a hosszúhullámok esetében. A fázishiba és a fiktív csillapítás mértéke a számítási költség növekedése árán javítható, ha lineáris interpoláció helyett magasabbrendű, pl. köbös spline interpolációt alkalmazunk (Dévényi et al., 1998).

Az elmúlt években a modellek felbontásának finomabbá válásával a fizikai parametizációk számításigénye némileg megnövekedett: míg a 90-es években hozzávetőlegesen a modellintegrálás 30 %-át tették ki a parametizációs számítások (Gustafsson és McDonald, 1996), addig ma ez már meghaladja a 40 %-ot (Miller et al., 2010). Ugyanakkor a modellintegrálásnak még mindig jelentős része fordítódik a dinamikai számítások végrehajtására, ezért továbbra is fontos a hatékony numerikus sémák használata és fejlesztése.

### II.3.2. Spektrális módszerek

**Szerző: Horányi András és Szépszó Gabriella**

#### A spektrális módszerek alapjai

A spektrális módszerek alkalmazása során a HTER-ben szereplő prognosztikai változókat (amelyik tipikusan a felszíni légnyomás, hőmérséklet, nedvesség és a szélsősebesség két komponense) egy függvényrendszer elemei segítségével írjuk fel. A módszer leírásához tekintsük a következő egyenletet:

$$\mathbf{L}(u) = f(x), \quad (\text{II.56.})$$

ahol  $\mathbf{L}$  egy differenciál-operátor,  $u$  a függő változó (a fentebb említett prognosztikai változók bármelyike) és  $f(x)$  adott kényszer függvény (tipikusan a HTER jobb oldalán szereplő kifejezések). Az  $u(x)$  ismeretlen változót a  $\varphi_j(x)$  lineárisan független ortogonális bázis függvények lineáris kombinációjával közelítjük:

$$u(x) \approx \sum_{j=1}^{\infty} u_j \varphi_j(x), \quad (\text{II.57.})$$

ahol  $u_j$  a  $j$ -edik bázis függvényhez tartozó együttható. A gyakorlatban természetesen csak véges összegezést tudunk elvégezni:

$$u(x) \approx \sum_{j=1}^N u_j \varphi_j(x). \quad (\text{II.58.})$$

A feladat megoldásához a konkrét feladathoz jól illeszkedő függvényrendszert célszerű választani. A spektrális módszer esetében, mint már említettük, a **bázis függvények ortogonális rendszert alkotnak** (ilyen például a trigonometrikus függvények rendszere). Az ilyen függvényeket szokás globális bázis függvényeknek is nevezni, megkülönböztetésül a Galjorkin-módszerek másik típusánál, a véges elem módszernél alkalmazott, kis területen értelmezett alacsony fokszámú polinomokból álló lokális (Kalnay, 2003) bázis függvényektől (például az ún. *kalap függvények*; Strang és Fix, 1973). A spektrális módszer végrehajtása során célunk az  $u_j$  együtthatók meghatározása. Ezen együtthatók egyértelmű meghatározásához egy további feltételt is ki kell szabnunk (ezt nevezzük Galjorkin-feltételnek; Durran, 1999), amely szerint a közelítés hibájának ortogonálisnak kell lennie minden egyes bázis függvényre. Az ortogonalitás feltételét a következőképpen írhatjuk fel:

$$\int_a^b e_N \varphi_i dx = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (\text{II.59.})$$

$$\text{ahol } e_N = \mathbf{L} \left( \sum_{j=1}^N u_j \varphi_j \right) - f(x) \text{ vagy } e_N = \mathbf{L} \left( \sum_{j=1}^N u_j \varphi_j \right) - \mathbf{L}(u). \quad (\text{II.60.})$$

A hibát a (II.59.) ortogonalitási feltételben kifejtve az alábbi egyenletrendszerhez jutunk:

$$\int_a^b \varphi_i \mathbf{L} \left( \sum_{j=1}^N u_j \varphi_j \right) dx - \int_a^b \varphi_i f(x) dx = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (\text{II.61.})$$

Ez az összefüggés  $N$  darab ismeretlent (az  $u_j$  együtthatókat) tartalmazó,  $N$  tagból álló algebrai egyenletrendszer. A spektrális módszer végrehajtása során ezt az egyenletrendszert oldjuk meg az ismeretlen  $u_j$  együtthatókra. A spektrális módszer alkalmazása során elvben minden műveletet az így származtatott együtthatók segítségével az együtthatók terében, azaz az ún. *spektrális térben* végzünk el. A későbbiekben láthatjuk, hogy a spektrális módszer gyakorlati alkalmazása esetén ez nem feltétlenül van így.

A spektrális módszerben a bázis függvények optimális megválasztását az előrejelzési feladat geometriája, valamint a határfeltételek határozzák meg. Téglalap alakú tartomány és periodikus határfeltételek esetében kézenfekvő a komplex Fourier bázis függvények alkalmazása (ilyet alkalmaznak pl. a globális modellekben a szélességi körök mentén); nem-periodikus határfeltétellel bíró tartományok esetében használhatók a Csebisev-polinomok, míg a Legendre-függvények szférikus rendszerekben terjedtek el (pl. a globális modellekben a hosszúsági körök irányában alkalmazzák őket).

### Egy egyszerű példa

A spektrális módszer gyakorlati részleteinek megvilágításához tekintsük az alábbi egyszerű példát:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = f(x), \quad 0 \leq x \leq \pi. \quad (\text{II.62.})$$

Ekkor  $\mathbf{L} = \frac{d^2}{dx^2}$ .

Periodikus határfeltételeket adunk meg:

$$u(0) = u(\pi) = 0. \quad (\text{II.63.})$$

Fourier bázis függvényeket alkalmazunk, a következő alakban:

$$\varphi_j = \sin jx, \quad j = 1, \dots, N. \quad (\text{II.64.})$$

Ezek a bázis függvények a  $0 \leq x \leq \pi$  intervallumon ortogonálisak és kielégítik a határfeltételeket is. A (II.62.) egyenlet bal oldalának közelítése alkalmazva a bázis függvények második deriváltját:

$$\mathbf{L} \left( \sum_{j=1}^N u_j \varphi_j \right) = \sum_{j=1}^N (-j^2) u_j \varphi_j. \quad (\text{II.65.})$$

A közelítés hibájának és a bázis függvények ortogonalitásának feltételét ennek alapján a következő egyenlet fejezi ki:

$$-\sum_{j=1}^N j^2 u_j \int_0^{\pi} \varphi_i \varphi_j dx = \int_0^{\pi} \varphi_i f(x) dx, \quad i = 1, \dots, N. \quad (\text{II.66.})$$

A (II.66.) egyenletben megjelennek a bázis függvények szorzatai, amelyek a bázis függvények konkrét alakját figyelembe véve az alábbi módon fejthetők ki:

$$\int_0^{\pi} \sin ix \sin jx dx = 1/2 \int_0^{\pi} [\cos(i-j)x - \cos(i+j)x] dx = (\pi/2) \delta_{ij}, \quad (\text{II.67.})$$

ahol  $\delta_{ij}$  a *Kronecker delta* ( $\delta_{ij} = 1$ , ha  $i = j$  és  $\delta_{ij} = 0$ , ha  $i \neq j$ ). Az ortogonalitási feltétel alapján kapott egyenlet megoldása így az

$$u_i = -\frac{2}{i^2 \pi} \int_0^{\pi} \varphi_i f(x) dx \quad (\text{II.68.})$$

alakot veszi fel a keresett együtthatókra. Az együtthatók tehát a kényszer függvény véges Fourier-transzformációjával arányosak.



## Transzformációs módszer

A spektrális módszerek egyik legfontosabb részlete, hogy nem minden művelet oldható meg hatékonyan az „ $u_j$  együtthatók terében” (azaz a spektrális térben), hanem a számolások egy részét a rácspontok terében kell végrehajtanunk (azaz abban a fizikai térben, ahol a modell változóit rácson reprezentáljuk). Ez a gyakorlatban annyit jelent, hogy a spektrálisnak nevezett meteorológiai modellek tulajdonképpen csak pszeudo-spektrálisak, hisz nem minden számolást valósítunk meg a spektrális együtthatók révén. Az e mögött rejlő gyakorlati részleteket az alábbiakban mutatjuk be röviden.

Tekintsük a barotróp örvényességi egyenletet, és alkalmazzuk a spektrális módszert a megoldására. A barotróp örvényességi egyenletet a következő alakban írhatjuk fel (Charney et al., 1950):

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi + (\mathbf{k} \times \nabla \psi) \cdot \nabla (\nabla^2 \psi) + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad (\text{II.69.})$$

ahol  $\psi(x, y, t)$  az áramfüggvény. Tételezzük fel, hogy a mezők a sík mindkét ( $x$  és  $y$ ) irányában periodikusak, és teljesül, hogy

$$\psi\left(x + \frac{2\pi}{k}, y + \frac{2\pi}{l}, t\right) = \psi(x, y, t), \quad (\text{II.70.})$$

ahol  $k$  és  $l$  hullámszámok. Ortogonális bázis függvényekként a mindkét irányban periodikus harmonikus függvényeket alkalmazzuk az alábbi formában:

$$\varphi_{mn}(x, y) = e^{i(mkx + nly)}. \quad (\text{II.71.})$$

Az áramfüggvény a bázis függvények segítségével a következő módon közelíthető:

$$\psi(x, y, t) \approx \sum_m \sum_n C_{mn}(t) e^{i(mkx + nly)}, \quad (\text{II.72.})$$

ahol az összegzés természetesen véges. Megjegyezzük, hogy ahhoz, hogy a  $\psi$  mennyiség valós legyen, az együtthatókra teljesülnie kell a  $C_{mn} = C_{-m-n}^*$  feltételnek, ahol (\*) a komplex konjugálásra utal.

Vezessük be az  $\mathbf{M} = mk\mathbf{i} + nl\mathbf{j}$  hullámszám vektort, valamint az  $\mathbf{R} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$  hely vektort. A  $\psi$  közelítése ekkor

$$\psi(x, y, t) \approx \sum_M C_M(t) e^{i\mathbf{M}\mathbf{R}}. \quad (\text{II.73.})$$

A barotróp örvényességi egyenletben megjelenő tagok a bázis függvények segítségével az alábbi alakban írhatóak fel:

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \psi &= - \sum_{\mathbf{M}} (\mathbf{M} \cdot \mathbf{M}) C_{\mathbf{M}}(t) e^{i\mathbf{M} \cdot \mathbf{R}} ; \\
\nabla \psi &\approx \sum_{\mathbf{H}} i\mathbf{H} C_{\mathbf{H}} e^{i\mathbf{H} \cdot \mathbf{R}} ; \\
\nabla(\nabla^2 \psi) &\approx - \sum_{\mathbf{L}} i\mathbf{L}(\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}) C_{\mathbf{L}} e^{i\mathbf{L} \cdot \mathbf{R}} .
\end{aligned} \tag{II.74.}$$

A  $\mathbf{H}$  és  $\mathbf{L}$  hullámszám vektorok azért kerültek bevezetésre, mert a későbbiekben az egyes mennyiségeket összeszorozzuk és átrendezzük, és olyankor mindig teljes összegeket kell összeszorozni. Ezek után a fenti kifejezéseket behelyettesítjük a barotróp örvényességi egyenletbe és felírjuk az egyenlet teljesülésének hibáját ( $e_N$ ):

$$\begin{aligned}
e_N &= - \sum_{\mathbf{M}} (\mathbf{M} \cdot \mathbf{M}) \frac{d}{dt} C_{\mathbf{M}} e^{i\mathbf{M} \cdot \mathbf{R}} + \\
&+ \sum_{\mathbf{L}} \sum_{\mathbf{H}} (\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}) \mathbf{k} \cdot (\mathbf{H} \times \mathbf{L}) C_{\mathbf{H}} C_{\mathbf{L}} e^{i(\mathbf{H}+\mathbf{L}) \cdot \mathbf{R}} + i\beta \sum_{\mathbf{M}} \mathbf{M}_x C_{\mathbf{M}} e^{i\mathbf{M} \cdot \mathbf{R}} .
\end{aligned} \tag{II.75.}$$

A spektrális módszer ortogonalitási feltétele a hiba bázis függvényekre való ortogonalitását írja fel. Mivel az ortogonalitási feltétele a skalárszorzat eltűnése, és komplex függvények esetén a  $\psi$  és  $\varphi$  függvények skaláris szorzata definíció szerint  $\int \psi \varphi^* d\mathbf{r}$ , az  $e_N$  hibafüggvényt a bázisvektorokkal beszorozva nyerjük az ortogonalitási feltételre vonatkozó egyenleteket. Szorozzuk meg tehát az előző egyenletet  $e^{-i\mathbf{M} \cdot \mathbf{R}}$ -rel, majd integráljuk azt a periodikus tartományon és vegyük figyelembe az  $e_N$  hiba minden egyes bázis függvényre vett ortogonalitását:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi/k} \int_0^{2\pi/l} \left\{ - \sum_{\mathbf{L}} (\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}) \frac{d}{dt} C_{\mathbf{L}} e^{i(\mathbf{L}-\mathbf{M}) \cdot \mathbf{R}} + i\beta \sum_{\mathbf{L}} \mathbf{L}_x C_{\mathbf{L}} e^{i(\mathbf{L}-\mathbf{M}) \cdot \mathbf{R}} \right\} dx dy + \\
&+ \int_0^{2\pi/k} \int_0^{2\pi/l} \left\{ \sum_{\mathbf{L}} \sum_{\mathbf{H}} (\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}) \mathbf{k} \cdot (\mathbf{H} \times \mathbf{L}) C_{\mathbf{H}} C_{\mathbf{L}} e^{i(\mathbf{H}+\mathbf{L}-\mathbf{M}) \cdot \mathbf{R}} \right\} dx dy = 0
\end{aligned} \tag{II.76.}$$

minden egyes  $\mathbf{M}$ -re az eredeti összegzésnek megfelelően. A periodikus határfeltétel miatt az exponenciális függvények minden határozott integrálja eltűnik, kivéve azt az esetet, amikor a kitevő zérussal egyenlő. Ennek alapján minden  $\mathbf{M}$ -re a következő közöséges differenciál-egyenlethez jutunk:

$$\frac{dC_{\mathbf{M}}}{dt} = \frac{imk\beta C_{\mathbf{M}}}{\mathbf{M} \cdot \mathbf{M}} + \sum_{\mathbf{H}} \frac{(\mathbf{M} - \mathbf{H}) \cdot (\mathbf{M} - \mathbf{H}) \mathbf{k} \cdot [\mathbf{H} \times (\mathbf{M} - \mathbf{H})]}{\mathbf{M} \cdot \mathbf{M}} C_{\mathbf{M}-\mathbf{H}} C_{\mathbf{H}} . \tag{II.77.}$$

A számolásnál az első két tagban az  $\mathbf{L} = \mathbf{M}$  esetben, míg az utolsó tagban az  $\mathbf{L} = \mathbf{M} - \mathbf{H}$  esetben léteztek nem nulla tagok.

Vegyük észre, hogy az egyenlet utolsó tagja az eredeti egyenletben megjelenő nem-lineáris advekción tag miatt fellépő különböző hullámok közti kölcsönhatásokat írja le (kölcsönhatási tagnak is szokták nevezni). Ez annyit jelent, hogy az  $\mathbf{M}$  hullámra a  $\mathbf{H}$  és  $(\mathbf{M} - \mathbf{H})$  hullámok fejtenek ki hatást. Az is látható, hogy ez a **kölcsönhatásokat leíró nem-lineáris**

**tag igen bonyolult, és meghatározása a spektrális térben nehézségeket okoz.** Ennek elkerülése érdekében vezették be a **transzformációs módszert**, ami annyit jelent, hogy az egyenletekben fellépő (ilyen és ehhez hasonló) nem-lineáris tagokat nem a spektrális együtthatók terében, a spektrális együtthatók révén határozzuk meg, hanem a rácsponti térben, pontosan ugyanúgy, ahogy azt a rácsponti modelleknél tesszük. Ily módon ötvözhető a rácsponti és spektrális módszerek előnyös tulajdonságai: **a lineáris műveletek elvégzése** (tipikusan a deriváltak számolása) egyszerű és pontos **a spektrális együtthatók segítségével** (jól megválasztott bázis függvények segítségével), **míg a nem-lineáris műveletek elvégzése** (például az advekciónak származtatása) könnyebb **rácsponti térben** (hisz ott csak egyszerűen összeszorozzuk a nem-lineáris kifejezésben szereplő változókat). Mindazonáltal a transzformációs módszer csak abban az esetben alkalmazható hatékonyan, ha létezik olyan számítástechnikailag is hatékony transzformációs eljárás, ami gyorsan végrehajtható, mivel a spektrális modellek alkalmazása során minden integrálási időlépésben ingázunk a spektrális és a rácsponti terek között (a periodikus függvények esetében a Fourier-transzformáció megvalósítása az ún. **gyors Fourier-transzformáció** segítségével például ilyen algoritmus).

A transzformációs módszer gyakorlati szükségessége miatt a spektrális modellek végrehajtásának legfontosabb lépései az alábbiak:

- Számítások a spektrális együtthatók terében (ez a kiindulás, mert a spektrális modellek esetében a spektrális együtthatók száma kisebb, mint a kapcsolódó rácspontok száma, s ezért érdemes az egyes meteorológiai változókat spektrális együtthatókként tárolni; ne felejtjük el, hogy a spektrális tér és a rácsponti tér között egy-egy értelmű megfeleltetés van): differenciál-operátorok számítása, valamint az egyenletekben szereplő lineáris műveletek (pl. a szemi-implicit séma) végrehajtása.
- Inverz transzformáció a spektrális térből a rácsponti térbe, azaz a rendelkezésre álló spektrális együtthatók „átalakítása” rácspont térbeli fizikai változókká (példa: inverz gyors Fourier-transzformáció).
- Az egyenlet nem-lineáris tagjainak származtatása a rácsponti térben (az egyes rácsponti értékek egyszerű összeszorozásával), és olyan további műveletek elvégzése, amelyek végrehajtása a spektrális együtthatók terében nehezebb, mint a rácsponti térben (pl. a fizikai parametrizációs számítások elvégzése), és végül az új időlépcsőre való átterés (azaz a modell egy lépéssel való előreléptetése). Mivel az egyenletek legfontosabb nem-lineáris tagjaként az advekciónak számítása is itt történik, ezért amennyiben szemi-Lagrange sémát alkalmazunk, úgy arra is a rácsponti térben kerül sor.
- Direkt transzformáció, azaz a rácsponti értékek spektrális reprezentációjának előállítás (példa: direkt gyors Fourier-transzformáció) és a fenti műveletek megismétlése most már a legfrissebb időlépcsőben.

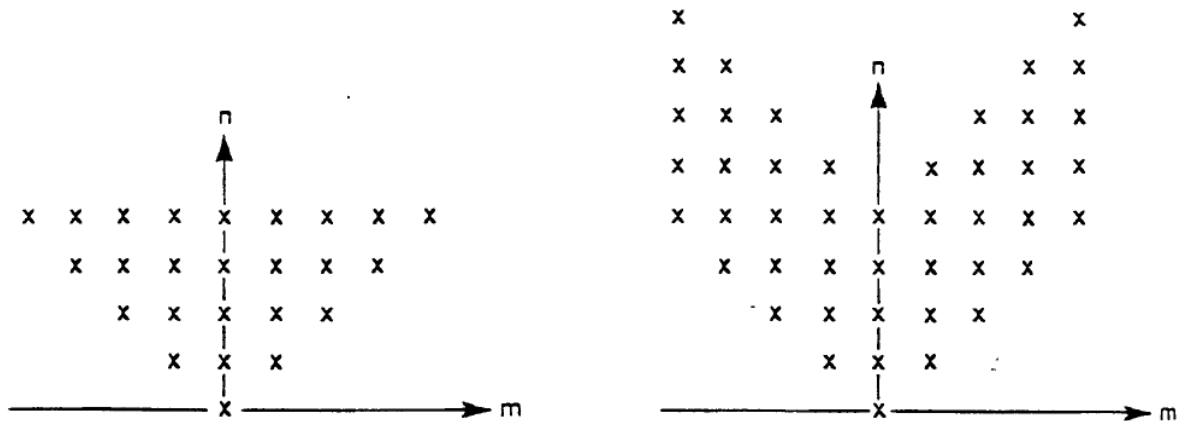
### A csonkítás fogalma

Már a bevezetésben említettük, hogy az ismeretlen változók bázis függvényekkel való felírásakor a bázis függvények lineáris kombinációja egy véges összegést jelent (nem is jelenthet mást, hiszen nem vehetjük figyelembe az összes lehetséges spektrális együtthatót, azaz valahol határt kell szabnunk az összegzés hosszának). Ennek kapcsán jegyezzük meg azt is, hogy **a csonkítás mértéke mindig kompromisszum eredménye az optimális pontosság és a rendelkezésre álló számítási kapacitás között.** A csonkítás legfontosabb kérdése, hogy milyen logika szerint válasszuk ki azokat a spektrális együtthatókat, amelyeket az összegzés során figyelembe veszünk (A csonkítás elnevezése általában arra utal, hogy a kiválasztott együtthatók milyen alakot vesznek fel a horizontális hullámszámok terében).

A globális modellek esetében használt szférikus harmonikusok segítségével az ismeretlen változó az alábbi alakban írható fel:

$$Q(\lambda, \mu) = \sum_{m=M}^M \sum_{n=|m|}^{N(m)} Q_{mn} \cdot Y_{m,n}(\lambda, \mu), \quad (\text{II.78.})$$

ahol a  $\lambda$  a földrajzi hosszúság, a  $\mu$  a földrajzi szélesség szinusz, az  $Y_{m,n}$  függvény  $\lambda$  irányában a Fourier-módusz,  $\mu$  irányában pedig a Legendre-függvény,  $N$  és  $M$  a figyelembe vett spektrális együtthatók száma az egyes koordináta irányokban. Az összegzésben szereplő  $N(m)$  értéket többféle módon választhatjuk meg attól függően, hogy milyen feladatot szeretnénk megoldani, illetve milyen folyamatokat szeretnénk leírni. A globális modellekben leggyakrabban az  $N = M$  választással élünk, ami az ún. *trianguláris* vagy *háromszög alakú csonkítást* eredményezi (II.15. ábra). Ez a csonkítás egységes térbeli felbontást biztosít a Föld teljes felszínén és invariáns bármely a Föld középpontja körüli elforgatásra. Ugyanakkor nem túl előnyös olyan folyamatok leírásánál, amelyek a földrajzi helytől függő változékonyságot mutatnak (erre példa a geopotenciál mező, amely jóval nagyobb változékonysággal bír a magasabb szélességeken, mint a trópusokon; Durran, 1999). Ezért a globális modellekben használatos még az ún. *romboidális csonkítás*, amelynél  $N$ -et  $N(m) = |m| + M$ -nek választjuk (II.15. ábra). Ennél a csonkításnál a közepes szélességeken a legnagyobb a térbeli felbontás, ami inkább a kis (alacsony) felbontású modellekben előnyös.



II.15. ábra. Háromszög alakú (bal) és romboidális (jobb) csonkítások (Riddaway, 2001).

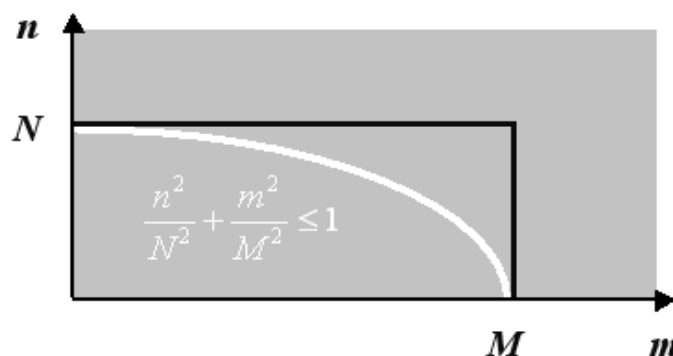
A korlátos tartományú modelleknél alkalmazott, mindkét irányban periodikus Fourier-függvények esetében az ismeretlen függvény a bázis függvények segítségével az alábbi módon írható fel:

$$Q(x, y) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N Q_{mn} e^{imkx} e^{inly} \quad (\text{II.79.})$$

Ez az összefüggés felfogható különböző frekvenciájú hullámok szuperpozíciójaként, ahol a kis  $n$  és  $m$  értékek nagy hullámhosszak (hosszú hullámok), míg a nagy  $n$  és  $m$  értékek kis hullámhosszak (rövid hullámok) jelentenek. Az ismeretlen változót tehát a különböző hullámhosszú hullámok összegeként írjuk fel. Természetesen annál pontosabban járunk el, ha minél több hullámot tudunk figyelembe venni, azaz  $N$  és  $M$  értékei minél nagyobbak.

A kétdimenziós Fourier-függvények esetében a téglalap alakú és az elliptikus csonkítás terjedt el, ekkor a zonális és a meridionális hullámszámok terében az összegzéshez fel-

használt spektrális együtthatók egy téglalapot illetve ellipszist írnak le (és ezeket a téglalap illetve az ellipszis egyenlete alapján választjuk ki, II.16. ábra).



II.16. ábra. Az elliptikus és téglalap alakú csonkítások.

### A nem-lineáris instabilitás

Itt érdemes kitérni a nem-lineáris instabilitás, idegen szóval az „aliasing” fogalmára is. Adott  $\Delta x$  felbontású ráccsal  $2\Delta x$  hosszúságú hullámot tudunk leírni. Ugyanakkor az előrejelzési feladat megoldása során – tipikusan a nem-lineáris tagok számításakor – **megjelennek olyan hullámok is, amelyek  $2\Delta x$ -nél rövidebbek, és energiájuk hozzáadódik a rendszerhez.** Ezeket a hullámokat a  $\Delta x$  felbontású ráccsal nem tudjuk leírni, ezért energiájuk a rácson még „felbontott” hullámok energiájához adódik hozzá (II.17. ábra; emiatt hívják ezt a jelenséget aliasingnek is: mert ezek a rövid hullámok „úgy tesznek”, mintha az adott felbontáson még leírt, hosszabb hullámok lennének). Mivel az energiátöbblet a spektrum jobb oldali végéhez, azaz a rövid hullámhosszú hullámokhoz adódik, ahol az energia egyébként kicsi, ez akár az energia megduplázódását is jelentheti, így instabilitást okozva. Ugyanez a jelenség a spektrális modellekben is fennáll, és jól illusztrálható a fentebb alkalmazott kétdimenziós Fourier-függvények segítségével. A fenti alakot tekintve látható, hogy két ismeretlen változó össze-szorzása esetén olyan tagok is megjelennek, amelyek kitevője már nagyobb lesz akár az  $N$  vagy akár az  $M$  értékénél (az exponenciális függvények szorzata a kitevők összeadását jelenti, s így jelennek meg a „túlságosan” nagy hullámszámok). Más szavakkal a nem-lineáris tagok olyan információt hoznak létre, amelyet az adott csonkítás már nem tud kezelni, s megjelenésük instabilitást okoz. A jelenséget Philips (1956) vette észre, amikor az általános cirkulációt szimuláló numerikus kísérlete a gondosan megválasztott, stabil időlépcső ellenére 16 nap után „felrobbant”. Ő ismerte fel, hogy az instabilitás a nem-lineáris műveleteknek köszönhető és nevezte el a jelenséget nem-lineáris instabilitásnak (Philips, 1959).

A nem-lineáris instabilitást célszerű tehát elkerülni, ami a spektrális modellekben túlcsonkítással egyszerűen megtehető. Tekintsük egy dimenzióban a  $[0, 2\pi]$  tartományt, amin  $\Delta x$  rácsfelbontást alkalmazunk. A tartomány ekkor  $J = 2\pi/\Delta x + 1$  rácspontot tartalmaz, és a  $\Delta x$  felbontással még leírható legrövidebb hullám hullámszáma  $K = (J - 1)/2 = \pi/\Delta x$ . Azaz ahhoz, hogy a spektrális és a rácsponti tér közötti transzformáció során ne veszítsünk információt, a csonkítási hullámszám ( $M$ ) és az alkalmazott rácspontok ( $J$ ) száma nem lehet független egymástól, közöttük a következő kapcsolatnak kell fennállnia:

$$J \geq 2M + 1. \quad (\text{II.80.})$$

A nem-lineáris szorzatok miatt megjelenő, a  $(k_1 + k_2) > K$  hullámszámú hullámok energiája „szimmetrikusan” a  $\tilde{K} = \pi/\Delta x - (k_1 + k_2 - \pi/\Delta x) = 2\pi/\Delta x - (k_1 + k_2)$  hullámszámú hullámok

energiájához adódik hozzá (II.17. ábra). A csonkítás mértékét tehát úgy kell megválasztani, hogy ez az energiátöbblet ne okozzon változást azokon a skálákon, amelyeket az adott felbontású rács leír, tehát  $\tilde{K}$  legyen nagyobb  $K$ -nál. Ha a csonkítási hullámszám  $M$ , akkor  $(k_1 + k_2)$  maximális értéke  $2M$ , s ekkor a feltétel a következőképpen néz ki:

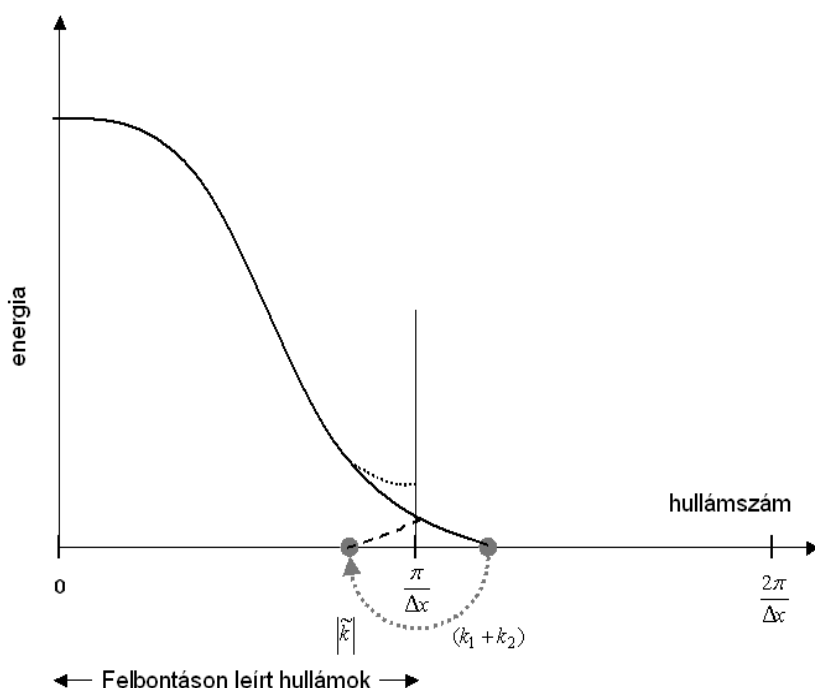
$$M \leq \frac{2\pi}{\Delta x} - 2M . \quad (\text{II.81.})$$

Ha ezt tovább alakítjuk kihasználva, hogy  $2\pi/\Delta x = J - 1$ , akkor az alábbi összefüggést kapjuk:

$$M \leq J - 1 - 2M \rightarrow J \geq 3M + 1. \quad (\text{II.82.})$$

Tehát a rácspontok száma és a spektrális térben leírt hullámok száma közötti kapcsolatnak a fenti feltételt kell kielégítenie; ezzel **a rendszert „túlcsonkítjuk”**, azaz kevesebb hullámszámot veszünk figyelembe, mint amit a rácspontok száma amúgy megengedne. Orszag (1971) megmutatta, hogy ha ezt a feltételt betartjuk, akkor ezzel kiküszöbölhető a kvadratikusan tagok által okozott instabilitás. A háromszoros nem-lineáris szorzatok esetében továbbra is fellép az aliasing, ez azonban már nem okoz számottevő további instabilitást.

A nem-lineáris instabilitás kiküszöbölésére a spektrális technikán kívül egyéb módszerek is használhatók. Például az advekciót mint legjellemzőbb nem-lineáris tagot szemi-Lagrange módszerrel kezelve szintén elkerülhetjük a problémát. Ezért a szemi-Lagrange módszer spektrál technikával való kombinálása esetén elegendő a  $J \geq 2M + 1$  feltételt kielégíteni.



II.17. ábra. A különböző hullámszámhoz ( $x$ -tengely) tartozó hullámok energiaspektruma ( $y$ -tengely). Látható, hogy adott csonkításnál ( $\pi/\Delta x$ ) nagyobb (a rácsfelbontás által le nem írt)  $(k_1 + k_2)$  hullámszámmal rendelkező hullámok energiája a rövid hullámhosszú,  $\tilde{k}$  hullámszámú hullámok energiáját növeli.

## Összefoglalás

A spektrális módszer előszeretettel alkalmazott eljárás a légkör hidro-termodinamikai egyenletrendszerének megoldására. Elsősorban globális modellek esetén alkalmazzák a Földre jól illeszkedő szférikus harmonikus bázis függvények használata miatt, ugyanakkor vannak korlátos tartományú alkalmazások is (Haugen és Machenhauer, 1993; Radnóti, 2003). A spektrális módszer alkalmazása során az ismeretlen változókat ortogonális bázis függvények lineáris kombinációjaként állítjuk elő, és azt tételezzük fel, hogy a közelítés hibája ortogonális a bázis függvényekre. Ezen feltétel alkalmazásával az eredeti parciális differenciálegyenlet a lineáris kombinációban szereplő bázis függvények együtthatóira (spektrális együtthatók) vonatkozó közönséges differenciálegyenlet-rendszerre alakítható át. Mindazonáltal, a spektrális módszert csak ritkán alkalmazzák tisztán, azaz csak a spektrális együtthatókkal dolgozva, hiszen a nem-lineáris műveletek továbbra is rácsponti térben kerülnek végrehajtásra. A spektrális és rácsponti tér közötti, időlépcsőnként megvalósuló átmenetet ún. *transzformációk* révén valósítjuk meg és hajtjuk végre (ezek számítástechnikailag hatékony eljárások annak érdekében, hogy a modell végrehajtása megfelelően gyors maradjon). A nem-lineáris instabilitás elkerülése érdekében túlcsonkítást alkalmazunk, azaz kevesebb hullámot veszünk figyelembe, mint amennyit a rácspontok lehetővé tennének. A spektrális modellek legfontosabb előnyei a következők:

- Az egyenletekben megjelenő térbeli deriváltak pontosan számolhatóak, s nem lép fel lineáris fázishiba.
- A nem-lineáris tagoknál a nem-lineáris instabilitás elkerülhető (túlcsonkítás révén).
- A spektrális együtthatók száma kisebb, mint a rácspontok száma, azaz a változók tárolása gazdaságosabb, mint a rácsponti modellek esetében.
- A globális modelleknél nem jelenik meg a pólus probléma (a meridiánok konvergenciája következtében a pólusoknál jóval rövidebb integrálási időlépcső engedhető csak meg a stabilitás megőrzése érdekében, mint az alacsony szélességeken). A rácsponti modelleknél ez komoly nehézséget okoz, ami a szférikus harmonikus bázis függvények alkalmazásával elegánsan kiküszöbölhető.
- A szemi-implicit séma Helmholtz-egyenletének megoldása spektrális modellekben triviális (mert a bázis függvények sajátértékei a Helmholtz-egyenletnek), míg a rácsponti modellekben hatékony módszerek nélkül költséges lehet a számítása.

A fenti előnyök mellett a spektrális modelleknek vannak hátrányai is (jóllehet ezek többsége kiküszöbölhető):

- Az alkalmazott sémák bonyolultakká és nagyon költségessé válhatnak (a transzformációs módszer révén ez a probléma áthidalható).
- A végrehajtandó műveletek száma a felbontás növekedésével gyorsabban növekszik, mint a rácsponti modellek esetében (ez komoly problémát jelenthet a jövőben a rácspont-felbontás további javulása esetén).
- Alkalmazásuk a korlátos tartományú modellek esetében nehezekebb (ugyanakkor a szférikus harmonikusok „átírhatóak” mindkét horizontális irányban periodikus függvényekké, például úgy, ahogyan az ALADIN modell kifejlesztése során történt).
- A spektrális csonkítás fizikailag értelmetlen mennyiségekhez is vezethet, pl. negatív nedvességtartalom (ez orvosolható a szemi-Lagrange sémával, amennyiben az az interpoláció során megőrzi a nedvesség pozitív értékeit).
- Az erős gradiensű mezők (pl. a domborzat) reprezentációja „zajos” lehet a spektrális modellekben (erre különböző szűrési technikákat fejlesztettek ki).

Ahogy a fentiekből látható a spektrális modellek jelentős előnyei megtartásával a hátrányai kiküszöbölhetőek, ezért ezt a modellfajta napjainkban előszeretettel alkalmazzák a numerikus prognosztikában. A Magyarországon használt két legfontosabb modell, a globális ECMWF IFS modell, valamint a korlátos tartományú ALADIN modell is spektrális technikát alkalmaz.

### II.3.3. Feladatok

**Feladat 1:** A  $\phi(x)$  mennyiségre vonatkozó  $\frac{\partial\phi}{\partial x}$  derivált közelítésére a centrált sémát alkalmazzuk. Taylor-sorfejtés alkalmazásával határozzuk meg a közelítés konzisztenciájának rendjét!

**Megoldás 1:** A konzisztencia rendjét a csonkítási hiba adja meg, amihez a diszkrét és a folytonos feladat különbségét kell venni. Ehhez alkalmazzunk Taylor-sorfejtést a centrált séma egyes tagjaira a  $(j, n)$  pont körül:

$$\phi_{j\pm 1,n} = \phi(j \cdot \Delta x \pm \Delta x, n \cdot \Delta t) = \phi(j \cdot \Delta x, n \cdot \Delta t) \pm \Delta x \cdot \left. \frac{\partial\phi}{\partial x} \right|_{j,n} + \frac{1}{2} \Delta x^2 \cdot \left. \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} \right|_{j,n} \pm o(\Delta x^3).$$

Ezt helyettesítsük be a centrált séma alakjába:

$$\frac{\phi_{j+1,n} - \phi_{j-1,n}}{2\Delta x} = \frac{1}{2\Delta x} \left[ 2\Delta x \cdot \left. \frac{\partial\phi}{\partial x} \right|_{j,n} + 2o(\Delta x^3) \right] = \left. \frac{\partial\phi}{\partial x} \right|_{j,n} + o(\Delta x^2).$$

Az így kapott diszkrét differenciál-operátorból kivonva a folytonos deriváltat, a következőt kapjuk a csonkítási hibára:  $Tr = o(\Delta x^2)$ . Ez azt jelenti, hogy a centrált séma az  $x$ -szerinti derivált másodrendben pontos közelítése, azaz konzisztenciájának rendje 2.

**Feladat 2:** Lássuk be a Neumann stabilitásvizsgálati módszer alkalmazásával, hogy a  $\phi(x, t)$  mennyiségre vonatkozó egydimenziós lineáris advekción egyenlet időbeli és a térbeli deriváltjainak közelítésére használt forward illetve baloldali sémák alkalmazása esetén a stabilitási kritérium a következő:  $\Delta t \leq \frac{\Delta x}{c}$ .

**Megoldás 2:** A (II.27.) diszkrét feladat megoldását Fourier-sor alakban keresve, a feladat a következő módon írható fel:

$$\frac{\lambda_k^{n+1} \cdot c_k \cdot e^{ikx_j} - \lambda_k^n \cdot c_k \cdot e^{ikx_j}}{\Delta t} + c \frac{\lambda_k^n \cdot c_k \cdot e^{ikx_j} - \lambda_k^n \cdot c_k \cdot e^{ikx_{j-1}}}{\Delta x} = 0.$$

Az egyszerűsítések elvégzése után az alábbi összefüggést kapjuk  $\lambda_k$ -ra, illetve abszolút értékének négyzetére:



$$\lambda_k = 1 - r(1 - e^{-ik\Delta x}) = 1 - r + r \cos(k\Delta x) - ir \sin(k\Delta x),$$

$$|\lambda_k|^2 = 1 + 2r^2 - 2r + 2r \cos(k\Delta x) - 2r^2 \cos(k\Delta x) = 1 + 2r(r-1)[1 - \cos(k\Delta x)].$$

A Neumann-módszer alapján a stabilitáshoz  $|\lambda_k|^2$  nem lehet nagyobb 1-nél, azaz a fenti összefüggés utolsó tagja nem lehet pozitív. Ez pontosan akkor teljesül, ha a Courant-szám 0 és 1 közé esik, azaz  $c > 0$  mellett  $\Delta t \leq \frac{\Delta x}{c}$ .

## II.4. Parametrizációk

Szerző: Szépszó Gabriella

### II.4.1. A parametrizálandó folyamatok

A hidro-termodinamikai egyenletrendszert numerikus módszerek segítségével oldjuk meg, s a meteorológiai állapothatározókat egy diszkrét térbeli rács rácspontjaiban tekintjük. A rácspontokban kiszámított értékek az adott rácsterület átlagát reprezentálják, s a modell azokat a folyamatokat tudja közvetlenül (a „modelldinamika” által) leírni, amelyek méretskálája „összemérhető” az alkalmazott rács felbontásával. (Ez a méretskála nem feltétlenül egyezik meg a felbontással, a modellek ún. *effektív felbontása* ugyanis valamivel kisebb ennél:  $\Delta x$  rácestávolsággal a modell jellemzőitől függően a 2-7  $\Delta x$  hullámhossz-tartományból kikerülő hullámok írhatók le; Skamarock, 2004.) A ma alkalmazott globális időjárási modellek horizontális felbontása 16-30 km nagyságrendű, a korlátos tartományú modellek pedig 2-8 km-es rácestávolsággal dolgoznak. Vertikális irányban a globális és a korlátos tartományú modellek 50 és 100 közötti modellszintet használnak. Az éghajlati szimulációk durvább felbontással készülnek: a kapcsolt általános cirkulációs modellek esetében 100-200 km, a regionális modellek esetében 10-25 km-es horizontális felbontás a jellemző; a vertikális szintek számában viszont nincsenek lényegi különbségek, a klímamodellek tipikusan 30-40 modellszinten végzik számításait.

A légköri és egyéb viszonyok alakításában viszont aktívan részt vesznek egyes rácestávolságnál kisebb skálájú folyamatok is, s visszahatnak a nagyobb térskálán zajló folyamatokra. Tipikusan ezek közé tartozik a csapadékképződés, melynek során olyan lokális kölcsönhatások lépnek fel (pl. a konvekció folyamatában), melyek döntően befolyásolják az adott terület légköri jellemzőit. További, a dinamika által közvetlenül le nem írt, de a légkörre ható folyamat a turbulencia, a sugárzás, felhőfizikai kölcsönhatások, a talajban zajló folyamatok. Ha ezeket teljesen figyelmen kívül hagyjuk a numerikus modellben, akkor nagy a veszélye annak, hogy az előrejelzés távol esik majd a valóságtól. Ezért a térbeli és időbeli felbontás alapján mérlegelni kell, hogy mely szub-grid skálájú folyamatokat szükséges figyelembe venni, s ezeket egyszerűsített formában, parametrizációk segítségével leírni a numerikus modellben. (Az egyszerűsített leírás nem azt jelenti, hogy a parametrizációk egyszerű felépítésűek és gyorsan megvalósíthatók – gyakran ezek a numerikus modellek legbonyolultabb és legtöbb számítást igénylő részei.) A parametrizált folyamatok hatását az egyenletrendszerben közvetlenül (explicit módon) leírt tagok segítségével határozzuk meg, s adott  $\psi$  mennyiség időbeli megváltozását általánosan a következőképpen írjuk le:

$$\partial_t \bar{\psi} = f(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, x, t) \leftarrow \tilde{\alpha} = f_{\alpha}(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots), \quad (\text{II.83.})$$

ahol felülvonás jelöli a modell által közvetlenül leírt változókat (ezek tehát az adott rácsterület átlagát reprezentálják), s hullám jelöli az ezek felhasználásával, parametrizációval meghatározott tagokat.

A továbbiakban a nyomási koordináta-rendszerben felírt hidrosztatikus egyenleteken mutatjuk be, hogy a numerikus modellekben mely folyamatok leírására használunk parametrizációs eljárásokat (Kalnay, 2003 nyomán; a nem-hidrosztatikus vonatkozásokra a konkrét parametrizációs eljárások ismertetésénél térünk ki). Tekintsük tehát az alábbi egyenletrendszert, ahol felülvonással jelöljük a modelldinamika által leírt és a rácsterület átlagára vonatkozó tagokat, hullámmal pedig a parametrizált mennyiségeket (az I.2. és II.1. fejezetekben használt változókat külön már nem definiáljuk):

- A horizontális mozgásegyenletek:

$$\frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} = -\nabla_p \bar{\phi} - f \cdot \mathbf{k} \times \bar{\mathbf{v}} - g \frac{\partial \tilde{\tau}}{\partial p}, \quad (\text{II.84.})$$

ahol  $\mathbf{v}(u_p, v_p)$  a horizontális áramlási sebesség (a  $p$  index a nyomási rendszert jelöli),  $\phi$  a geopotenciál,  $s$  a horizontális sebesség-komponensek megváltozásának kiszámításánál a nyomási gradiens és a Coriolis-erő mellett az utolsó tagon keresztül figyelembe vesszük a vertikális turbulens momentum-fluxusok hatását is, melyek a következők:  
 $\tilde{\tau} = \rho w' u' \mathbf{i} + \rho w' v' \mathbf{j}$ ;

- A hidrosztatika egyenlete:

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial p} = -\bar{\alpha}; \quad (\text{II.85.})$$

- A kontinuitási egyenlet:

$$\nabla_p \bar{\mathbf{v}} + \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial p} = 0; \quad (\text{II.86.})$$

- A felszíni nyomásváltozás egyenlete:

$$\frac{\partial \bar{p}_s}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{p}_s = - \int_0^{\infty} \nabla_p \cdot \bar{\mathbf{v}} dp; \quad (\text{II.87.})$$

- Az állapotegyenlet:

$$\bar{p} \bar{\alpha} = R \bar{T}; \quad (\text{II.88.})$$

- A termodinamikai egyenlet:

$$C_p \frac{\bar{T}}{\bar{\theta}} \frac{d\bar{\theta}}{dt} = \tilde{Q} = \tilde{Q}_{rad} + L(\tilde{C} - \tilde{E}) - g \frac{\partial \tilde{F}_\theta}{\partial p}, \quad (\text{II.89.})$$

ami a (potenciális) hőmérséklet megváltozásának kiszámításánál figyelembe veszi a sugárzás által okozott ( $\tilde{Q}_{rad}$ ) hőmérsékletváltozás hatását, a víz fázis-átalakulásai során felszabaduló ( $L\tilde{C}$  és  $L\tilde{E}$ ) látens hőáram, valamint a szenibilis hőfluxus  $\tilde{F}_T = C_p \overline{\rho w' T'}$  hatását, amibe a potenciális hőmérséklet alakjának behelyettesítésével kapjuk a (II.89.) egyenletben szereplő  $\tilde{F}_\theta$  tagot;

- A nedvesség-megmaradás egyenlete:

$$\frac{d\bar{q}}{dt} = \tilde{E} - \tilde{C} - g \frac{\partial \tilde{F}_q}{\partial p}, \quad (\text{II.90.})$$

ami három, a légköri vízgőzre, vízre és jégre vonatkozó egyenletből áll [ld. az I. fejezet (I.13–15.) egyenleteit]. A (II.90.) egyenlet a légköri nedvesség megváltozásának kiszámításánál figyelembe veszi a víz fázis-átalakulásai során felszabaduló látens és szenzibilis hőáram, valamint a vertikális turbulens nedvesség-fluxus hatását, mely a következő:  $\tilde{F}_q = \overline{\rho w' q'}$  ( $q'$  a keverési arány).

A fenti egyenletek alapján látható, hogy a modellek fizikai parametrizációs eljárásainak hatását (azaz a parametrizált folyamatokat) a mozgásegyenletekben, a termodinamikai, valamint a vízgőz- (víz-, jég-) megmaradási egyenletben vesszük figyelembe.

A parametrizációk technikai megvalósítása számos problémát vet fel. A dinamikai és parametrizációs számítások a modellekben elkülönítve történnek. Először meghatározzák a prognosztikai mennyiségek „dinamikából adódó” változásait, majd ezekhez hozzáadják a parametrizációk alapján kiszámított tendenciákat. A különböző folyamatok hozzájárulásai az adott mennyiség megváltozásához meghatározhatók szekvenciális, illetve parallel módon (Dubal et al., 2004). Az első leírásmódban az egyes folyamatokat fizikai megfontolások alapján rangsoroljuk, és a rájuk vonatkozó parametrizációs sémákat sorban hajtjuk végre úgy, hogy az egymást követő eljárások felhasználják az előző eredményét. A második esetben az egyes eljárásokat külön hajtjuk végre és eredményüket a parametrizációs ciklus végén összegezzük. Ez nem jelenti azt, hogy a parametrizációk egymástól teljesen függetlenek: ebben az esetben is vannak olyan sémák, amelyek felhasználják a más parametrizációs eljárásokban már kiszámított mennyiségeket (pl. a Richardson-számot). Léteznek még implicit módszerek, amikor bizonyos parametrizációs típusokat (pl. a turbulencia és a konvekció esetében) együtt hajtjuk végre (Beljaars et al., 2004). Említettük, hogy a parametrizációk a numerikus modellek költséges eljárásai, ezért a különösen számításgényes sémákat (pl. a klímamodellek esetében a sugárzás-átvitel leírásánál) gyakran nem minden időlépésben és nem is minden rácspontra alkalmazzák. Ugyanakkor vannak olyan folyamatok is, amelyek pontos leírásához nem elegendő egy hosszabb, néhány perces időlépcső, ilyenkor a dinamikai időlépcsőt felosztják kisebb lépésekre (például a csapadékképződés esetében a csapadékelemek esésének leírásánál).

#### II.4.2. A numerikus modellekben alkalmazott parametrizációs eljárások

A továbbiakban sorra vesszük a parametrizálandó folyamatokat és röviden áttekintjük, hogy figyelembevételükre milyen parametrizációs eljárásokat alkalmaznak az időjárási és éghajlati modellekben. Nem ejtünk szót a szub-grid skálájú orográfia és a horizontális diffúzió leírásáról. A fejezet tárgyalásánál a következő forrásokra támaszkodunk: Kalnay (2003), Geresdi et al. (2003), Geresdi (2005, 2006, 2007).

##### Planetáris határréteg

A planetáris határréteg a légkör alsó, néhány száz-1000 méteres rétege, melyben turbulens örvények révén történik a momentum, a hő és a nedvesség kicserélődése a felszín és a szabad légkör között. A felszínnel közvetlenül érintkező vékony, 10-100 méteres ún. *felszíni* vagy *Prandtl-rétegben* a különböző fluxusok konstansnak tekinthetők, míg a felette lévő kevert

vagy *Ekman*-rétegben a Coriolis-, a nyomási és a súrlódási erő hatásának következtében a szél a magassággal elfordul és a fluxusok csökkennek. A határréteg magasságát, állapotát a besugárzás, a felszínközeli réteg stabilitási viszonyai, a szélnyírás és a szabad légkörből történő bekeveredések befolyásolják. A turbulens folyamatok parametrizációja az egyenletekben szereplő turbulens fluxusok, valamint a határréteg magasságának meghatározására irányul. A gyakorlatban használt eljárásokat csak röviden tekintjük át, ugyanis ezeket részletekbe menően tárgyalja az I. fejezet.

Az egyenletekben szereplő impulzusmomentum-, hő- és nedvesség-fluxusok számítására első-, másod- és 1,5-rendű lezárásokat alkalmaznak a modellekben (ld. I. fejezet). Az elsőrendű lezárásnál a második momentumokat (a  $\overline{\rho w' u'}$ ,  $\overline{\rho w' v'}$ ,  $\overline{\rho w' T'}$ ,  $\overline{\rho w' q'}$  tagokat) a közvetlenül leírt tagok segítségével számítják. Erre a legtöbb modellben a K-elméletet alkalmazzák a határrétegen belül (a szabad légkörben teljesen elhagyják ezeket a tagokat), azaz az egyes fluxusokat a rácsterületre vonatkozó átlagos sebesség, hőmérséklet, nedvesség vertikális gradiense és a hozzájuk tartozó ( $K_M$ ,  $K_H$ ,  $K_E$ ) turbulens kicserélődési együttható szorzataként írják fel:

$$\begin{aligned}\overline{\rho w' u'} &= -\rho \cdot K_M \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}, \quad \overline{\rho w' v'} = -\rho \cdot K_M \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}, \\ \overline{\rho w' T'} &= -\rho \cdot K_H \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}, \quad \overline{\rho w' q'} = -\rho \cdot K_E \frac{\partial \bar{q}}{\partial z}.\end{aligned}\tag{II.91.}$$

A turbulens kicserélődési együtthatókat a planetáris határrétegben vertikálisan legtöbbször állandónak tekintik, de értékük – ahogy már az indexelésük is mutatja – az egyes fluxusokra eltérő. Nagyságukat alapvetően a réteg stabilitási viszonyai határozzák meg: instabil rétegződés esetén az átkeveredés intenzívebb, a  $K$  együtthatók nagyobbak; stabil körülmények között pedig a gyenge turbulencia miatt kisebb kicserélődési együtthatókat használnak. A hidrodinamikai egyenletrendszerben a turbulens fluxusok vertikális irányú deriváltja szerepel, ami a felszínen alsó határfeltételek megadását teszi szükségessé a momentum-, a hő- és a nedvesség-fluxusra vonatkozóan. Ez a legtöbb numerikus modellben a Monin–Obukhov hasonlósági elméleten (1954) alapuló ún. *bulk formulákkal* történik. Lényege, hogy a Prandtl-vagy konstans-fluxus rétegben adott tulajdonság turbulens árama (kicserélődése) arányos a tulajdonságnak a felszín és a légkör közötti gradiensével, valamint a szélesebséggel, azaz

$$\begin{aligned}\tau &= -\rho \cdot C_M \cdot |\mathbf{v}| \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_s) = -\rho \cdot C_M \cdot |\mathbf{v}| \cdot \mathbf{v}, \\ F_\theta &= -\rho \cdot C_H \cdot |\mathbf{v}| \cdot C_p (\theta - \theta_s), \\ F_q &= -\rho \cdot C_E \cdot |\mathbf{v}| \cdot \beta (q - q_s),\end{aligned}\tag{II.92.}$$

ahol az  $s$  index a felszíni mennyiségeket jelöli ( $\mathbf{v}_s = 0$ ),  $\beta$  a (talaj- vagy az óceáni) felszín telítettségét írja le, a  $C_M$ ,  $C_H$ ,  $C_E$  pedig sorrendben a momentumra, a hőre és a nedvességre vonatkozó átviteli együtthatók, nagyságukat a felszín feletti magasság, a felszín érdessége és a (bevezető fejezetben definiált) Richardson-számon keresztül a stabilitási viszonyok határozzák meg (Louis, 1979). Az elsőrendű lezárást alkalmazó modellekben a planetáris határréteg magasságának meghatározása diagnosztikai úton történik, általában a Richardson-szám kritikus értékének vizsgálatával.

A másodrendű lezárás során a másodrendű momentumokra (tehát a fluktuációk fenti korrelációjára) további prognosztikai egyenleteket írnak fel, és a harmadrendű momentumokat számítják parametrizáció útján. A 1,5-rendű lezárás esetében csak egyetlen másodrendű momentumra, a turbulens kinetikus energiára (TKE) írnak fel prognosztikai egyenletet, a töb-

bi momentumot parametrizációval kezelik (ezt a módszert alkalmazzák pl. az OMSZ-nál operatíván futtatott ALADIN és AROME modellben is). Ezekben a modellekben a határréteg magasságát szintén diagnosztikus úton határozzák meg. Többféle módszer létezik erre, például kiszámítható a TKE egy kritikus érték alá csökkenéséből, vagy a turbulens fluxus és a felszíni momentum-fluxus hányadosának vizsgálatával.

### Mikrofizika és konvekció

A csapadékkal kapcsolatos információk (pl. a csapadék halmazállapota vagy mennyisége) az időjárás-előrejelzések lényeges elemei, ezért részletes és pontos leírásuknak nagy szerepe van a prognózisok sikerességében. Ez magában foglalja többek között a konvekció folyamatának, illetve a különböző felhő- és csapadékelemek (ún. *hidrometeorok*) keletkezésének, növekedésének, kölcsönhatásainak (azaz mikrofizikai folyamatainak) a leírását.

A felhőkben zajló folyamatok első számítógépes szimulációi még nem vagy csak nagyon leegyszerűsített módon tartalmazták a mikrofizikai kölcsönhatásokat. Az 1970-es évek második felétől kezdtek el alkalmazni olyan két- és háromdimenziós modelleket, amelyek már lehetővé tették az összetettebb leírást. Ezeknek a szimulációknak köszönhetően jelentősen bővültek a felhőkben lejátszódó kölcsönhatásokra vonatkozó ismereteink, s az 1990-es évektől kezdve a számszerű időjárás-előrejelzési modellekben elhagyhatatlan lett a mikrofizikai folyamatok parametrizációja. A leírandó folyamatok rendkívül sokrétűek: magukban foglalják a különböző felhőelemek kondenzációját, párolgását, szublimációját, fagyását, olvadását, az ütközési és egyéb növekedési mechanizmusokat, s még számos más folyamatot is. Mindezek leírása nagy számítási kapacitást igényel, ráadásul sok folyamat működése még napjainkban is nyitott kérdés, ezért a mikrofizikai parametrizációk számos egyszerűsítést tartalmaznak.

A numerikus modellekben a mikrofizikai folyamatok leírására a legelterjedtebben használt séma a momentumos vagy effektív sugár szerinti (ún. *bulk*) parametrizáció (Harrington, 2001). Ebben a közelítésben a sokféle hidrometeorot néhány kategóriába csoportosítják az alakjuktól, a halmazállapotuktól és a méretüktől függően. (A hidrometeorok száma a modellekben általában 5-7, például lehetnek felhő- és esőcseppek, hó- és jégkristályok, stb.) Az egyes részecsketípusok méret szerinti eloszlását folytonos függvénnyel közelítik, többnyire az alábbi általánosított gamma-eloszlás feltételezésével:

$$n_i(D) = N_i \frac{\alpha_i}{\Gamma(\nu_i)} \lambda_i^{\alpha_i \nu_i} D^{\alpha_i \nu_i - 1} \exp\left(-(\lambda_i D)^{\alpha_i}\right) = N_i g(D), \quad (\text{II.93.})$$

ahol az  $i$  index az adott hidrometeor-típust jelöli,  $D$  a részecske átmérője (vagy ha nem gömb alakú, akkor karakterisztikus mérete),  $\alpha$  és  $\nu$  a hidrometeor típusától függő állandók,  $\lambda$  pedig az eloszlás paramétere, amit a keverési arány és a koncentráció függvényében lehet meghatározni. A méret-eloszlás ismeretében a momentumos sémákban az eloszlás különböző momentumaira írnak fel prognosztikai egyenletet; az egy-momentumos sémában például a keverési arányra (azaz  $r$ -re, a 3. momentumra):

$$r_i = \frac{1}{\rho_{ref}} \int_0^{\infty} m(D) n_i(D) dD, \quad (\text{II.94.})$$

ahol  $m$  a részecske tömege, amit az átmérő függvényében hatványalakban fejeznek ki; a két-momentumos sémában pedig a keverési arány mellett a koncentrációra (azaz  $N$ -re, a 0. momentumra):

$$N_i = \int_0^{\infty} n_i(D) dD. \quad (\text{II.95.})$$

Az egy-momentumos közelítés esetében a koncentrációt az eloszlásfüggvény  $\lambda$  paraméterének függvényében adják meg.

A fenti formulák előnye, hogy az integrálok analitikusan meghatározhatók, ezért számításuk egyszerű. A módszer hátránya, hogy a méret-eloszlásra önkényes feltételezéssel él, a részecskék közötti ütközések csak közelítőleg írhatók le, továbbá a módszer segítségével meghatározott esési sebesség is gyakran távol esik a valóságtól. A felhő- és csapadékelemek esésével, ülepedésével kapcsolatos probléma, hogy a hidrometeorok egy időlépcső alatt akár több szinten is áthaladhatnak elhagyva a kiindulási rácsdobozt. Ennek elhanyagolása instabilitáshoz vezethet, ezért figyelembevételére több módszert is alkalmaznak: például az esési sebességre valamilyen valószínűségi eloszlásfüggvényt illesztve adják meg a részecske pályáját vagy a nem-hidrosztatikus modellekben az időlépcsőt olyan kis lépésekre osztják, ami alatt a részecske esése közben már csak egy szintet lép át.

Az időjárás-előrejelzésben napjainkban egyre inkább elterjednek a nem-hidrosztatikus modellek, amelyekben a néhány kilométeres felbontásnak és a nem-hidrosztatikus dinamikának köszönhetően a konvekció folyamata explicit módon kerül leírásra. Ez a méretskála részletesebb mikrofizikai leírást igényel, ezért az elmúlt évek fejlesztéseiben előtérbe kerültek az ún. *bin sémák* (Xue et al., 2010), amelyekben a részecskék mérettartományát megközelítőleg 40 intervallumra osztják fel, és az egyes intervallumokra külön oldják meg a prognosztikai egyenleteket.

A konvekció leírása szempontjából a mozgásegyenletek harmadik komponense kitüntetett jelentőséggel bír. Ugyanis amennyiben a  $w$  vertikális sebesség időbeli megváltozását elhanyagoljuk az egyenletben szereplő többi taghoz képest – azaz a hidrosztatikus feltételezéssel élünk –, akkor a konvekció folyamatát csak parametrizáció útján tudjuk leírni a modellben, hiszen a vertikális sebességet a többi változó segítségével diagnosztikusan határozzuk meg. A hidrosztatikusság jó közelítéssel teljesül a nagyobb skálákon, de nincs éles felbontásbeli határ az alkalmazhatóságára. Mindazonáltal néhány km-es térskálán már nem mellőzhetjük a vertikális gyorsulás hatását, ekkor a vertikális sebesség prognosztikai változó, és a (nem-hidrosztatikus) modell képes explicit módon leírni a konvekció dinamikáját.

A konvekció parametrizációjára mind a rövidtávú, mind az éghajlati modellekben legelterjedtebben használt leírások a Tiedtke-féle (Tiedtke, 1989) tömegfluxus-sémán alapulnak. (A sémát az alábbiakban csak röviden mutatjuk be, részletesen tárgyalja például Geresdi; 2006.) Ebben a konvektív felhők hozzájárulását a nagyskálájú momentum-, hő- és nedvesség-transzporthoz egydimenziós stacionárius felhőmodell segítségével írják le. A séma a rácsdobozt három részre osztja fel: a rendezett feláramlás és a rendezett leáramlás területeire, valamint a környezetre. A felfelé irányuló tömegáram meghatározására felírt egyenletekben a zónába (az adott rács térfogatba) való be- és kiáramlás, a kondenzáció következtében keletkező vízcseppek, valamint az ütközések nyomán keletkező esőcseppek hatását veszik figyelembe. Az esőcseppek esetében feltételezik, hogy ezek azonnal a leáramlási csatornába kerülnek. A be- és kiáramlást rendezett (átlagos) és turbulens be- illetve kiáramlás összegeként írják fel, a turbulens és a rendezett áramlásokat viszont általában egyforma nagyságúnak tételezik fel. A leáramlás az ún. *szabad leáramlási szintről* indul, ahol a telített levegőrészecskékre ható felhajtóerő lényegében negatívvá válik. A szabad leáramlási szintről lefelé induló tömegáram mintegy harmadrésze a felhőalapnál lévő tömegfluxusnak, amit a leáramlási csatornára felírt egyenletekben az esőcseppek párolgása, a levegő be- és kiáramlása módosít.

A fel- és leáramlási zóna tömegáramaira felírt egyenletek megoldásához ki kell számítani a különböző konvektív felhőtípusokra jellemző fenti (be- és kiáramlási, stb.) mennyisé-

geket. A Tiedtke-sémában három konvekció-típust különítenek el, s a numerikus modellben feltételezik, hogy adott cellában egyszerre csak az egyik típusú felhő van jelen:

1. **Áthatoló vagy mély-konvekció:** a határretegből indul ki, s a területre advektálódó nedvesség táplálja, a nedvesség-konvergencia a felhő teljes mélységében megfigyelhető. Mély konvekció zajlik például a trópusi ciklonokban.
2. **Sekély-konvekció:** a felhőzet a felszínről felfelé irányuló nedvességáram hatására alakul ki, leggyakrabban a felszínről történő párolgás vagy a turbulens diffúzió eredményezi (és nem az advekció). Tipikus példái a passzátszél-övben kialakuló Cumulusok. A be- és kiáramló levegő mennyisége ebben a konvektív felhőben a legnagyobb, ami fékezi a feláramlást.
3. **Középszintű konvekció:** nem a határretegben, hanem a magasabb rétegekben (a szabad légkörben) gyökerezik, a nagyskálájú felemelkedés következtében a magasban labilissá váló levegő hatására fejlődik ki. Leggyakrabban ciklonok melegszekektórában, melegfrontok esős része felett alakul ki.

Az ECHAM5 általános cirkulációs modellben egy negyedik konvekció-típust is bevezettek, az ún. *hideg konvekciót*, amelynek segítségével az eredeti Tiedtke-sémánál sikeresebben tudták leírni a hideg felhőkben lezajló folyamatokat (Pfeifer, 2006). A sekély-konvekcióhoz hasonlóan ezt a típust is a felszíni párolgás indítja el, azonban a feláramlás jellegében inkább a mély-konvekcióhoz hasonlít. A modellekben a hideg konvekció azonosításának egyik kritériuma az alsó modellszint 0 °C alatti hőmérséklete. E típus parametrizációja igényli a felhő jégtartalmának pontosabb leírását is, ezért az ECHAM5 modellváltozatban a felhővíz- mellett a felhőjég-tartalom is prognosztikai változó.

Ahogy a mikrofizikai parametrizációknál, úgy a mély-konvekció leírásánál is fontos kutatási irány a spektrális sémák fejlesztése. Ezek segítségével explicit módon írják le a különböző Cumulus felhők teljes spektrumát és időbeli fejlődésüket: pl. egy egy-dimenziós Lagrange-i modell alkalmazásával (Wagner és Graf, 2010) közvetlenül számítják a vertikális áramlás sebességét, a csapadékintenzitást, a felhőmagasságot és felhővel való borítottságot.

### Felszíni folyamatok

Az óceáni és a talajfelszín folyamatai fontos hatással bírnak a légköri mozgásokra, mivel hosszú „memóriával” rendelkező alsó határfeltételekként lassú kényszerítő hatást gyakorolnak a légköri rendszerre. A jegyzetnek ebben a részében a talaj meteorológiai szempontból releváns folyamatainak parametrizációs leírásait tekintjük át röviden, az óceáni vonatkozással a II.6. fejezetben foglalkozunk.

A numerikus modellek korábbi generációinál a felszíni hő- és nedvesség-fluxusok hatását egyszerű „csőbör” modellel írták le (Manabe et al., 1965): ebben a talaj felső 15 cm-es rétegében a talajnedvesség mennyiségét a párolgás és a csapadék szabályozták, a felszíni hőmérséklet pedig diagnosztikus úton került meghatározásra zérus felszíni hőkapacitás feltételezésével. A napjainkban alkalmazott numerikus modellek ezt az egyszerű leírást messze túlhaladták: a rácsterületet a felszín típusa (pl. csupasz, növényvel, hóval borított felszín) alapján kisebb részekre, ún. *tile*-okra osztják, ezeken külön-külön meghatározzák, majd összesítik az egyes fluxusokat. A talajt függőlegesen több rétegre tagolják, s az egyes rétegek hőmérsékletét és nedvességtartalmát prognosztikai egyenletek segítségével számítják ki, a felszín növényzettel és a hóval való fedettségét is figyelembe véve. Ilyen leírást alkalmaznak például az ECMWF előrejelzéseinél használt TESSEL-sémában (Tiled ECMWF Scheme for Surface Exchanges over Land). Szemben a rövidtávú modelleknél gyakoribb 2-3 talajszinttel, az éghajlati modellekben több, általában 4-5 réteget is megkülönböztetnek, s a növényzet és hó hatását is részletesebben írják le. Ennek oka, hogy a több réteg alkalmazása és a pontosabb



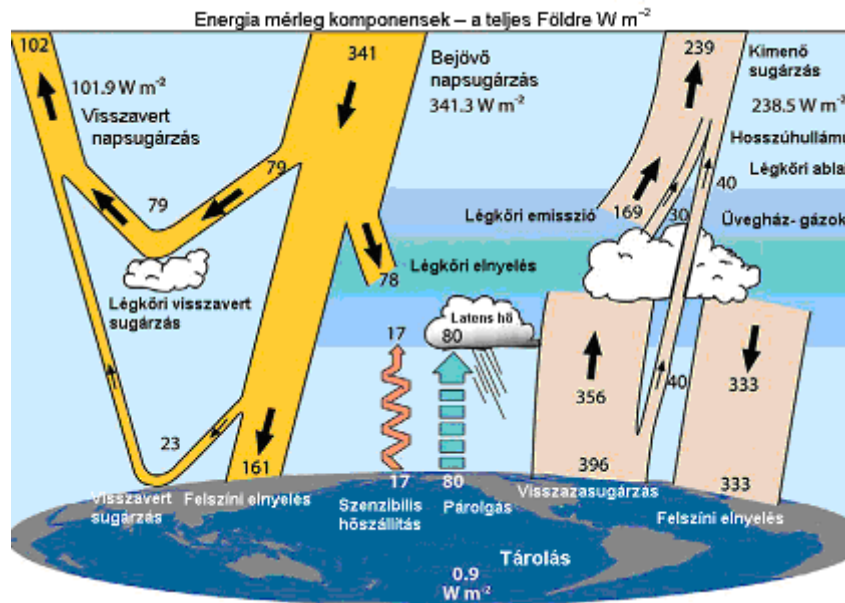
sémák lehetővé teszik a szezonális jellemzők leírását, aminek a felszíni folyamatok lassú, hosszútávú hatása miatt az éghajlati modellek esetében nagyobb jelentősége van.

Azokban a modellekben, amelyekben a talaj folyamatainak leírására több talajréteget definiálnak, a felszíni és az egyes talajszintek hőmérsékletének és nedvességtartalmának időbeli fejlődését prognosztikai egyenletekkel írják le. A felszínhőmérsékletet (i) a sugárzásból származó nettó hőfluxus, (ii) a vízgőz kondenzációja és párolgása során felszabaduló (negatív illetve pozitív előjelű) látens hőfluxus, (iii) a szenzibilis hőáram és (iv) a talaj mélyebb rétegei felől érkező hőfluxus (előjeles) összegeként határozzák meg. A látens és a szenzibilis hőáramot az előzőekben már látott (II.92.) összefüggések segítségével számítják ki, a sugárzási hőfluxus meghatározásánál pedig a sugárzási parametrizáció eredményét használják. Az egyes talajrétegek hőmérséklete az adott réteg határaitra (felülről, alulról, oldalról) érkező hőfluxustól és a talaj hővezető-képességétől függ. A talajnedvesség leírásánál elkülönítik a talajban lévő víz folyékony és szilárd fázisait. A felszínhez közeli réteg nedvességét a lehulló csapadék, a felszínről történő párolgás, a hó olvadása, a felszíni lefolyás és a víz felszín alatti elfolyása határozza meg, a mélyebb rétegekben pedig a rétegek közötti diffúzió vezérli a nedvesség változásait. A talajt fedő hóréteg időbeli változásaira a modellek szintén prognosztikai egyenletet oldanak meg, amelyben figyelembe veszik a havazást, a depozíciót, az olvadást, valamint a növényzetről a felszínre hulló hó mennyiségét. A növényzeten fennmaradó hó- illetve vízmennyiséget szintén prognosztikai egyenletek segítségével számítják ki: előbbi esetben a havazási intenzitás, a depozíció, az olvadás és a szélsébség, utóbbi esetében a hóolvadás, a vízgőz-lecsapódás és a párolgás hatásait írják le az egyenletekben.

Napjainkban már mind az időjárás, mind az éghajlati alkalmazásoknál léteznek olyan sémák, melyek a rácsterület hagyományos (csupasz talaj, hóval borított talaj, stb.) felbontása előtt átfogóbb kategóriákba sorolják a cellát, majd az egyes kategóriákra akár külön dinamikus modelleket hívnak meg. Így működik például az OMSZ-ban a rövidtávú és az éghajlati skálán egyaránt alkalmazott SURFEX (Surface Externalisée; Le Moigne, 2009) séma, amely négy felszín-típust különböztet meg: (i) tengert, (ii) tavat és folyót, (iii) vegetációt, illetve (iv) városi felszín. A SURFEX az alaptípusokra a légköri információk felhasználásával külön kiszámítja a momentum-, a hő- és a nedvesség-fluxust, majd az alaptípusok területarányának függvényében összegzett fluxusokat visszaadja a légköri modellnek. Az eljárás a városi felszín hatását a TEB (Town Energy Balance) séma segítségével modellezi, ebben az épületeket és az utcákat kanyonszerűen írja le (Oke, 1987): az utat két fal fogja közre, az épületet pedig egy tetővel és egy fallal jellemzi, s mindegyik felületre három rétegben egy-egy diffúziós egyenlettel határozza meg a hőmérséklet időbeli fejlődését. A TEB számos további hatást is figyelembe vesz a városi felszín leírásánál, például az emberi hőkibocsátás hatását, a hó, a köd, a csapadék hatását vagy a sugárzás szóródási és visszaverődési jellemzőit. A tavak és folyók hatásának leírására a SURFEX a FLake (Fresh-water Lake; Mironov, 2008) modellt használja, amely két rétegben, a felszíni keveredési és az alsó ún. *termoklin* (vertikálisan homogén hőmérsékletű) rétegben írja le a hőmérséklet fejlődését, a hő és a kinetikus energia alakulását.

## Sugárzás

A Napból érkező sugárzás a légköri mozgások legfontosabb indukálója. A légkörbe (4  $\mu\text{m}$ -nél kisebb hullámhosszú) rövidhullámú sugárzás formájában lép be, s az áthaladás során a különböző gázokról, aereoszolokról, felhőelemekről illetve a felszínről visszaverődik, szóródik és elnyelődik. A felszínre eljutó része a felszín felmelegíti és infravörös (hosszúhullámú) sugárzás formájában visszacsugárzódik a légkörbe, majd a jelenlévő részecskéknek és felhőknek köszönhetően bizonyos veszteséggel elhagyja azt (II.18. ábra).



II.18. ábra. A sugárzás útja a légkörben (Kiehl és Trenberth, 1997; Trenberth et al., 2009 nyomán). Az ábrán szereplő értékek az adott sugárzási komponens felületegységre jutó átlagértékei, mértékegységük  $W m^{-2}$ .

A sugárzás-átvitelben szerepet játszó gázok, aeroszol-részecskék, felhő- és csapadék-elemek, valamint egyéb részecskék a sugárzás módosításából eredően rövid- és hosszútávon hűtő vagy melegítő hatást gyakorolnak a légkörre és a felszínre. A rövidhullámú sugárzás elnyelésében nagy szerepe van a sztratoszférikus ózonnak, valamint a troposzférikus vízgőznek és szén-dioxidnak, amelyek a sztratoszféra illetve a troposzféra melegedését eredményezik. A modellekben a vízgőz légtörési aránya prognosztikai változó, az ózon és a szén-dioxid koncentrációját rövidtávú alkalmazásoknál szezonálisan és modellszintenként állandónak tekintik, éghajlati skálán viszont figyelembe veszik a szén-dioxid történelmi változásait. A rövidhullámú sugárzás visszaverésében mind időjárási, mind éghajlati skálán fontos szerepet játszanak az aeroszol-részecskék és a felhőelemek, a hőmérsékletre való nettó hatásukat tekintve azonban ezek leírása tartalmazza a legtöbb bizonytalanságot. Ez egyrészt abból ered, hogy az aeroszolok méret szerinti eloszlása és koncentrációja csak kevésbé ismert, másrészt az átvitelben fontos tényező a felhőelemek koncentrációja mellett halmazállapotuk is (vízcsepp, jégkristály, stb.), ami a felhőzeti folyamatok parametrizációjával van szoros kapcsolatban. A napsugárzás visszaverődésében a légkörben előforduló részecskéken kívül lényeges szerepet játszik még a felszín, amelynek reflexiós képességét az albedóval számszerűsítjük. A légtörési gázok elnyelésének és újra-kibocsátásának köszönhetően a légtörési rendszerben maradó hosszúhullámú, ún. *terresztriális sugárzásnak* hosszú távon melegítő hatása van. Ezt a hatást üvegházhatásnak nevezzük, az ezért felelős gázokat pedig üvegházhatású gázoknak. A legfontosabb üvegházhatású gázok a vízgőz, a szén-dioxid és a metán; utóbbi koncentrációját a rövidtávú alkalmazásoknál általában térben és időben konstansnak tekintik. Ezek a gázok a vízgőzt leszámítva hosszú légtörési tartózkodási idejűek, így éghajlati skálán különösen fontos a velük kapcsolatos folyamatok pontos leírása.

A sugárzás légtörési útjának a hőmérsékletre kifejtett hatását a sugárzási fluxusok vertikális divergenciája alapján határozzuk meg, a fluxusokat pedig a sugárzás-átviteli egyenlet megoldásával számítjuk ki külön a rövid- és a hosszúhullámú komponensre. Az egyenletnek csak nagy egyszerűsítések mellett létezik analitikus megoldása, így a meteorológiai előrejelzéseknél ezt nem alkalmazzuk. Az átviteli egyenlet megoldása során számos kisebb egyszerűsítéssel élhetünk elsősorban a megcélzott előrejelzési időskála függvényében, ami a sugárzási

parametizációk nagyszámú változatát eredményezi. Az alábbiakban a sugárzási parametizációk alapelvét mutatjuk be, esetenként kitérve az egyes változatok főbb különbségeire.

A modellek az átviteli egyenletet a modellszintek által meghatározott légköri rétegekre külön oldják meg, melyeken belül egységnyi rácsterületre vonatkozóan állandó hőmérsékletet és az összetevőkre homogén eloszlást tételeznek fel. (Ez az egyszerűsítés elsősorban a felhőzet esetében jelenthet gondot, ahol durvább felbontás esetén a homogenitás már nem teljesül.) A rövidhullámú sugárzás hatásának kiszámításánál figyelembe veszik, hogy a beérkező sugárzás térszögének napi menete miatt a sugárzás a nap során eltérő optikai vastagságú légrétegen halad át. A rövidhullámú sugárzást felbontják lefelé és felfelé irányuló direkt és diffúz komponensre, és mindegyikre kiszámítják az oldalirányú, a zenittávolságra vonatkozó és a rétegen belüli integrált. A hosszuhullámú sugárzás leírását bonyolítja, hogy a sugárzás nem tekinthető pontszerűnek, mivel a légkörben is vannak forrásai.

A rövidhullámú átvitelnél a molekulákon és atomokon történő szóródást Rayleigh-, az aeroszolon és a felhőelemeken való abszorpciót pedig Mie-féle leírással kezelik. A felhőzet hatásának kiszámításához szükséges tudni, hogy a különböző kiterjedésű felhők az egyes légköri rétegekben hogyan fedik át egymást. Erre a modellekben a leggyakrabban az ún. *maximális-véletlenszerű átlapolási sémát* használják, azaz a szomszédos szintek között maximális az átfedés, de a felhőmentes rétegekkel elválasztott tartományokban a felhős területek véletlenszerű elrendeződést követnek.

Az átviteli egyenlet optikai és a spektrális integráljainak kiszámításánál figyelembe veszik, hogy az egyes gázok a különböző hullámhossz-tartományba tartozó hullámokat eltérő módon nyelik el, illetve verik vissza. Ennek legegyszerűbb változata, amikor csupán egy-egy hullámhossz-tartományt tekintenek a rövid- és hosszuhullámokra, például az ALADIN modell rövidtávú változatánál alkalmazzák az ezen az elven működő Geleyn-sémát (Geleyn és Hollingsworth, 1979). Míg néhánynapos időskálán az ebből eredő hibák nem lényegesek, addig az éghajlati modellek esetében ez az egyszerűsítés már nem engedhető meg, mert hosszú távon a sugárzási folyamatok már nagymértékben befolyásolják az éghajlati rendszer egyes elemeinek viselkedését (gondoljunk az üvegházhatásra). Ezért a klímamodellekben általában részletesebb sémákat használnak több spektrális tartománnyal, például elterjedt az ún. *FMR-séma* (Fouquart–Morcrette Radiation; Morcrette, 1989), amit az ECHAM4 globális klímamodellben 4 rövidhullámú és 16 hosszuhullámú tartománnyal alkalmaznak. Mindazonáltal ezt a leírást nemcsak éghajlati skálán használják, erre bizonyíték ECMWF időjárásmodellje, mely szintén több spektrális tartomány alkalmazásával végzi a számításait.

## II.5. Valószínűségi előrejelzések

Szerző: Szűcs Mihály és Horányi András

### II.5.1. A valószínűségi előrejelzések alapjai

Már az 1960-as évek elején, elsősorban Edward Norton Lorenz munkája alapján felismerték (Götz, 2001), hogy egyetlen meteorológiai előrejelzés sem lehet teljes anélkül, hogy ne számszerűsítsenek az előrejelzésekben rejlő bizonytalanságokat (Palmer és Tibaldi, 1988). Más szavakkal azok a „kategorikus” előrejelzések, amelyek csak magát az előrejelzési értéket adják meg, sohasem tekinthetők teljes értékűeknek, hisz nem utalnak az előrejelzési folyamat során felmerülő bizonytalanságokra. A valószínűségi előrejelzések készítése során éppen az a feladatunk, hogy számba vegyük, majd számszerűsítsük az előrejelzésekben rejlő bizonytalanságokat. Az alábbiakban először a bizonytalanságok két fő típusát írjuk le: a légkör belső tulajdonságaiból fakadó, illetve a modellezési folyamatban rejlő bizonytalanságokat. Ezek jelentőségét és kapcsolatát egy egyszerűsített egydimenziós rendszeren illusztráljuk.

Ezt követően bemutatjuk az ensemble módszert, melynek lényege abban áll, hogy a modellezési bizonytalanságok figyelembevételével nem egy, hanem több előrejelzést készítünk, és megvizsgáljuk az így kapott előrejelzések sokaságát, mely alapján következtetéseket vonunk le a várható bekövetkezési valószínűségekről. A felhasználóknak fontos megérteniük, hogy az ensemble előrejelzésekhez kapcsolódó valószínűségi információ minőségi többletet jelent a „kategorikus” előrejelzésekhez képest.

#### A légkör belső tulajdonságaiból származó bizonytalanságok

A hibák egyik nagy csoportja a légkör belső tulajdonságaiból származik. Ezt az angol terminológia „God given error”-nak (Istentől eredő hibának) nevezi, utalva arra, hogy ezek a légkör és a kapcsolódó rendszerek belső tulajdonságai, amelyekre nem vagyunk ráhatással, de megértésükkel növelhetjük előrejelzéseink információtartalmát. Ezen bizonytalanságok megértéséhez érdemes egyszerű, nemlineáris rendszerek kaotikus tulajdonságait tanulmányozni (Tél és Gruiz, 2002). A káosz fogalmának megismerésében kiemelkedő szerepet játszó Edward Norton Lorenz amerikai meteorológus alacsony dimenzió számú, légköri modellek vizsgálata során találkozott a nemlineáris rendszerek kezdeti feltételekre való különös érzékenységgel. Azt tapasztalta, hogy két, egymáshoz nagyon hasonló kezdeti feltételből indított modellintegrálás eredményei idővel egyre nagyobb mértékben különböznek egymástól mindaddig, amíg a kiindulási különbségekből fakadó bizonytalanságok teljesen el nem uralják az előrejelzést, ilyen módon korlátot szabva az előrejelezhetőségnek (Lorenz, 1963). A káosz fogalmát általában kis dimenziós rendszerekre alkalmazzák, de a légkör – mely bonyolult, turbulens rendszer – is magán hordozza a kaotikus rendszerek legfontosabb tulajdonságait, melyek az alábbiak:

- kezdeti feltételekre vonatkozó érzékenység (kis kiindulási hibák nagy előrejelzési hibákat eredményezhetnek),
- korlátozott előrejelezhetőség,
- aperiodikusság (a rendszer sohasem veszi fel ugyanazt az állapotot).

#### A modellezési folyamat során fellépő bizonytalanságok

A jegyzet korábbi alfejezeteiben számos, a numerikus modellek megvalósítási részleteivel kapcsolatos információ került már bemutatásra. Ezek az információk rávilágítottak arra az összetett, komoly tudományos alapokra helyezett és általában rendkívül nagy számítógépes

kapacitást igénylő folyamatra, melynek végén az előrejelzés alapjául szolgáló numerikus modell produktumok előállnak. Az is világossá válhatott azonban, hogy bár az alkalmazott technikák kifinomultak, – további fejlesztésükön nemzetközi kutatócsoportok dolgoznak, és gyakorlati alkalmazhatóságuk is jelentősen és folyamatosan javul a számítógépes háttér fejlődésével – mégis számos ponton közelítésekkel dolgoznak. A valóságban megfigyelhető összetett folyamatokat a modellek nem képesek teljes részletességgel leírni, így a modellek és a modellezés egyes részletei bizonytalanságokat hordoznak, amelyek hatása megjelenik az előrejelzésekben.

A számszerű előrejelző modellek eredményei tehát mindig hibával terheltek, és a valószínűségi előrejelzések készítésénél ezeket a hibákat, bizonytalanságokat kell számba venni. A hibáknak ezt a kategóriáját az angol terminológia „man made error”-nak (ember szülte hibának) szokta nevezni, utalva arra, hogy ezek a hibák (bizonytalanságok) abból fakadnak, hogy a modellek csupán ember által alkotott közelítései a természet összetett folyamatainak, és természetesen tudásunk korlátozott.

Ezen modellezési hibákból származó bizonytalanságok közül a legfontosabbak:

- a kezdeti feltételek,
- a diszkretizáció (azaz a modell által leírt jelenségek rácson való megjelenítése),
- a kis skálájú folyamatok (amikor a rácsfelbontásnál kisebb skálájú folyamatokat csak közelítően vagy egyáltalán nem vesszük figyelembe), illetve
- a határfeltételek (melyek lehetnek alsó és felső peremfeltételek, valamint korlátos tartományú modellekben oldalsó peremfeltételek) kezeléséből származnak.

### Hibafejlődés egy egydimenziós rendszerben

A gyakorlatban a léggör belső tulajdonságaiból, illetve a modellezési közelítésekből adódó bizonytalanságok nem különíthetők el, hiszen a modellalkotás különböző lépései során bekeverülő hibák tovább nőnek a rendszer kaotikus természetéből fakadó módon. Ennek érzékeltetésére tekintsünk egy egyszerű, egydimenziós, diszkrét rendszert, ahol  $a_n$  rendre az  $a_{n-1}$ -ből kapható a következő módon:

$$a_n = a_{n-1}^2 - p, \quad (\text{II.96.})$$

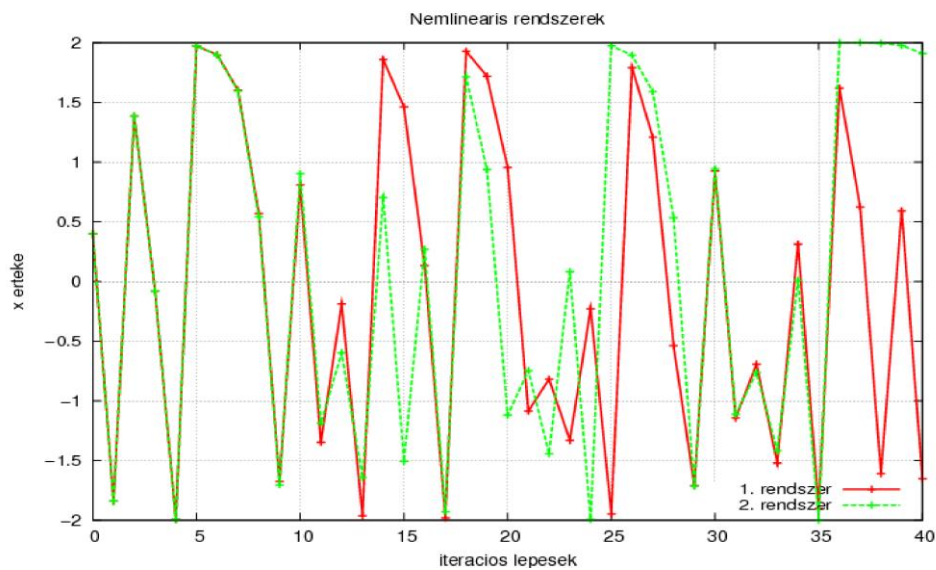
ahol  $n$  a lépések száma. Ekkor a  $p = 2$  esetén tetszőleges  $-2 < a_0 < 2$  kezdeti feltétel választása mellett a rendszer nyilvánvalóan  $-2$  és  $2$  közti értékeket fog felvenni.

A nem-linearitás hatásának és a rendszer kaotikus jellegének érzékeltetésére, vegyünk két alig különböző kezdeti feltételt, és vizsgáljuk, hogy a milyen értékeket vesz fel a rendszer fejlődésének első 40 lépése során (II.19. ábra). Legyen az első esetben  $a_0 = 0,4$ , a második esetben pedig  $a_0 = 0,4001$ .

Ezek után az előző rendszert az első kezdeti feltétel választás mellett nevezzük valószínűságnak, a második kezdeti feltétel választás mellett pedig modellnek (1. modell). A 0. lépésben a valóság és a modell kezdeti feltételének különbsége becsléseink hiányosságából fakad, tehát egyfajta modellezési hibáról beszélhetünk. Ez tehát a kezdeti feltételekből adódó bizonytalanság, vagyis az adatasszimiláció hibájának fogható fel. Látható, hogy a kicsi különbség a nemlineáris rendszerben nagyban eltérő megoldáshoz fog vezetni, épp a kezdeti feltételekre vonatkozó érzékenység miatt, ami tehát a léggör belső tulajdonságaiból adódik.

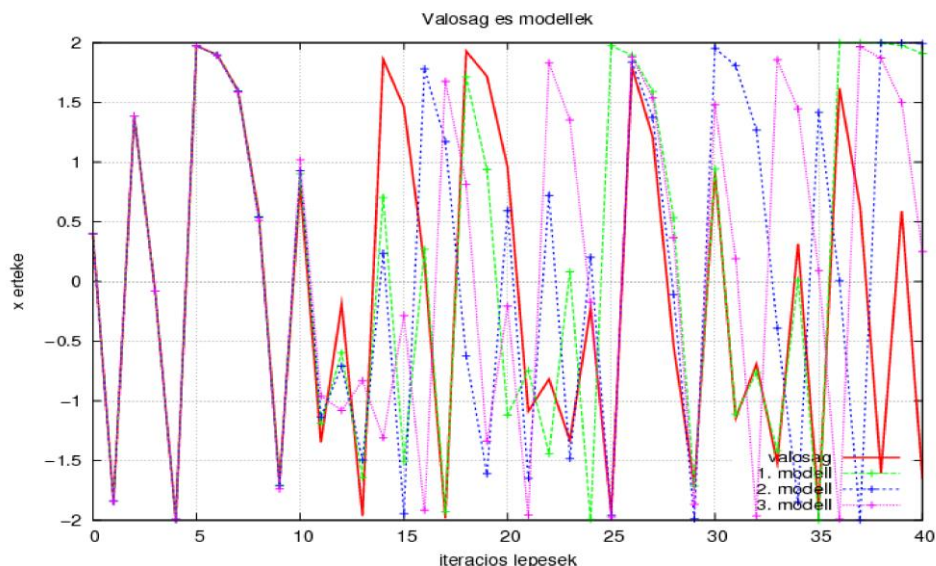
A továbbiakban definiálhatunk egy második modellt is, melyben a valószínűságnak megfelelő  $a_0$  megválasztás mellett  $p$  becslésekor hibát vétünk, hasonlóan például a parametrizációs eljárások pontatlanságaihoz; legyen ekkor a  $p = 1,9999$  megválasztás érvényes (2. modell). Végül definiáljunk egy harmadik modellt, melyben – a valószínűsághoz hasonló módon –  $p$  és  $a_0$  is

hibával terheltek (3. modell). Tehát a valóság mellett három modellünk van, amelyek vagy a kezdeti feltételekben vagy a paraméterválasztásban vagy mindkét aspektusban különböznek a valóságtól.



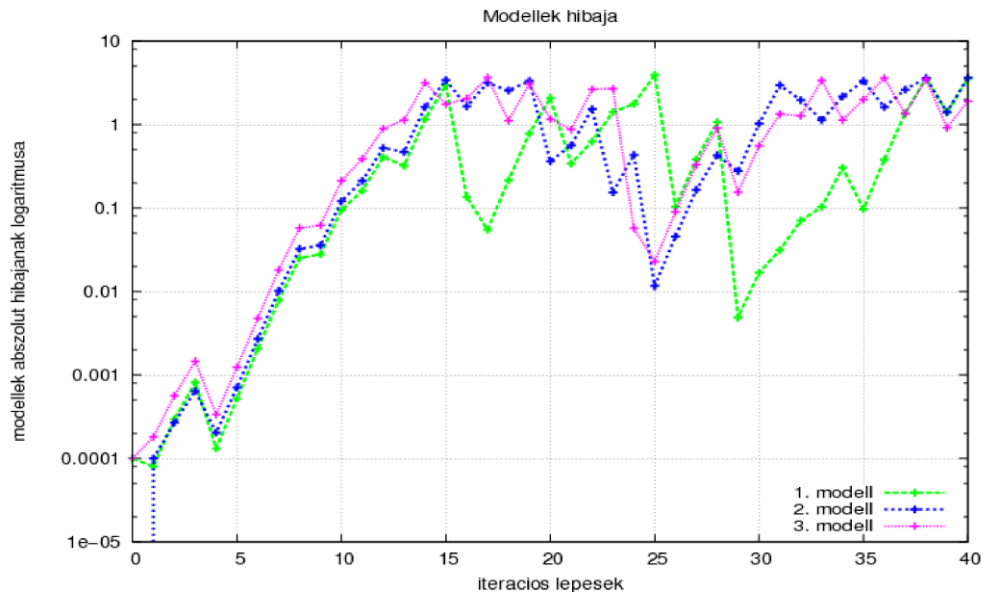
II.19. ábra. Két olyan rendszer fejlődése, melyeket ugyanaz az egyszerű egyenlet ír le, ám kezdeti feltételeikben nagyon kis mértékben különböznek.

A II.20. ábra az ún. *valóság* és a három modell értékeinek változása mutatja a rendszer fejlődésének első 40 lépése során. A II.21. ábra a modellek „valóságtól” vett eltérésének, azaz a hiba abszolút értékének növekedését követi nyomon. Látható, hogy az előrejelzés korai szakaszában a többféle bizonytalansággal terhelt modell hibája rendre a legnagyobb, ám a rendszer belső tulajdonságaiból fakadó bizonytalanságok gyorsan nőnek és egy idő után eluralják az „előrejelzést”.



II.20. ábra. Az ún. *valóság* és az attól csak nagyon kis mértékben különböző modellek fejlődésének időbeli menete. A valóságot a piros görbe reprezentálja, az 1. modellt (amely csak kiindulási állapotában tér el a valóságtól) a zöld, a 2. modellt (amely csak a paraméter megválasztásában tér el a valóságtól) a kék, a 3. modellt (amely a kezdeti feltételeiben és a paraméterválasztásában is eltér a valóságtól) pedig a rózsaszín.



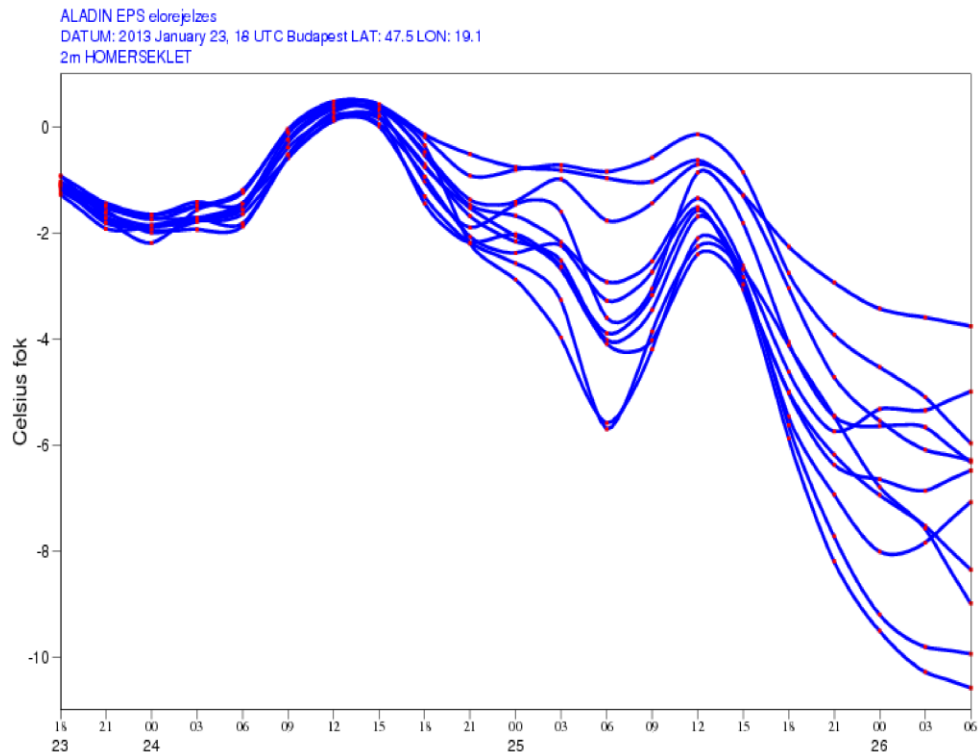


II.21. ábra. Hiba növekedése a kezdeti feltételeikben és/vagy modell formuláikban a valóságtól csak kicsit eltérő modellekben. Az 1. modellt (amely csak kiindulási állapotában tér el a valóságtól) a zöld, a 2. modellt (amely csak a paraméter megválasztásban tér el a valóságtól) a kék, a 3. modellt (amely a kezdeti feltételeiben és a paraméter választásában is eltér a valóságtól) pedig a rózsaszín görbe reprezentálja. (Felhívjuk a figyelmet a logaritmikus skálára!)

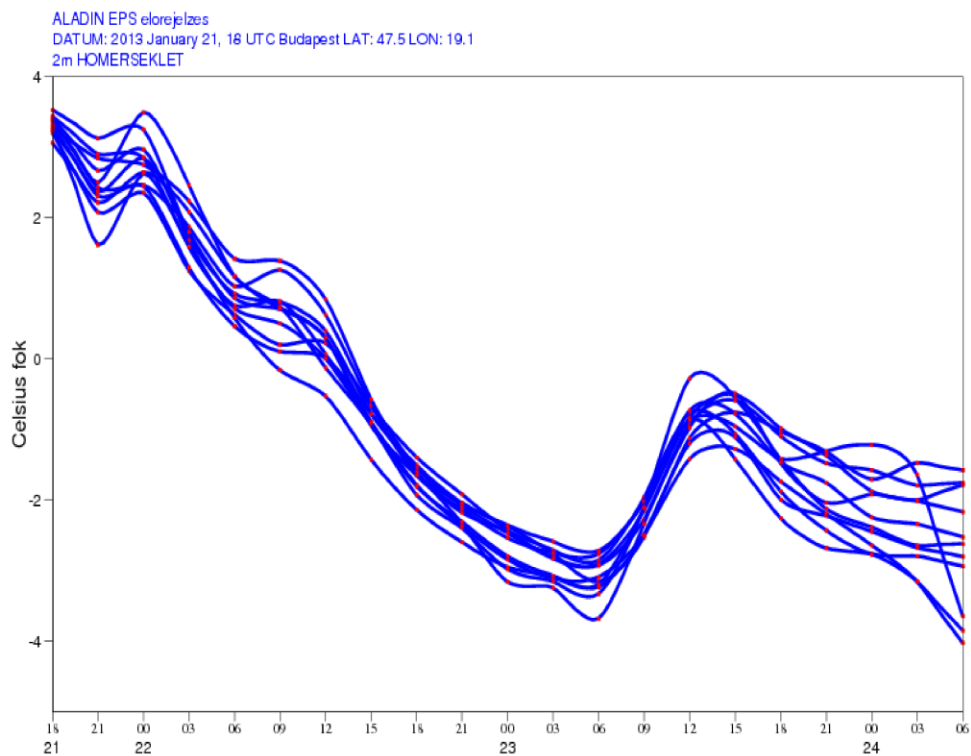
### Előrejelezhetőség a légköri modellek esetén

Az előzőekben látott egyszerű rendszert leíró egyenlet, és a légkört leíró parciális differenciálegyenletek abban hasonlítanak, hogy mindkét rendszer nem-lineáris. A légköri modell integrálását is indíthatjuk egymáshoz nagyon közeli előrejelzésekből (azaz reprezentálhatjuk a kezdeti feltételekben rejlő bizonytalanságokat), és így az egy-egy állapotváltozóra, egy-egy pontra vonatkozó előrejelzéseket például a II.19. ábra mintájára ún. *fáklya diagram* formájában ábrázolhatjuk (II.22. ábra). A légköri modellek esetén is az ilyen előrejelzések eleinte általában együtt futnak, majd idővel a közöttük lévő különbség elkezd nőni, ami az előrejelzés bizonytalanságának fejlődésére utal. Érdeemes ugyanakkor megfigyelni, hogy az ábrán bemutatott példán a 2. nap reggelére vonatkozó előrejelzés sokkal bizonytalanabb, mint az ugyanazon nap délre vonatkozó, azaz nem mindig teljesül a bizonytalanság monoton növekedése.

Fontos megjegyezni, hogy az ensemble előrejelzések egyes tagjai annyira eltávolodhatnak egymástól, hogy a rendszer már nem hordoz előrejelzési információt. A légkörben bizonyos rétegek és változók, jobban, míg mások kevésbé jelezhetőek előre. Például a szinoptikus skálájú folyamatok (Rossby-hullámok) leírására alkalmas 500 hPa-os geopotenciál mező könnyebben előrejelezhető, mint a felszínközeli paraméterek. Ez egyrészt azt jelenti, hogy az adott időtávra szóló előrejelzés pontosabb; másrészt azt is, hogy hosszabb időtávon keresztül marad adott hibahatáron belül. Ugyanakkor az előrejelezhetőség nagyban függ az időjárási helyzettől is: bizonyos helyzetekben nagyobb, míg máskor kisebb az előrejelezhetőség, akár ugyanarra a földrajzi területre vonatkozóan is (pl. II.22. ábra és II.23. ábra összevetése, ahol az utóbbi ábrán látható esetben az ensemble tagjai sokkal közelebb futnak egymáshoz, azaz az előrejelzési bizonytalanság kisebb, mint a másik esetben). Például anticiklonális helyzetben (amikor sokszor napról napra alig változik az időjárás jellege) általában nagyobb az előrejelezhetőség, mint a konvekcióhoz kapcsolódó zivatarok kipattanása esetén, amikor embert próbáló feladat a zivatarok pontos helyének és idejének előrejelzése.



II.22. ábra. Az Országos Meteorológiai Szolgálat ensemble rendszerében (Horányi et al., 2011) futtatott 11 modellintegrálásból származó budapesti 2 méteres 60 órás hőmérséklet előrejelzések. A modell integrálásának kezdete: 2013. január 23., 18UTC.



II.23. ábra. Az Országos Meteorológiai Szolgálat ensemble rendszerében (Horányi et al., 2011) futtatott 11 modellintegrálásból származó budapesti 60 órás 2 méteres hőmérséklet előrejelzések. A modell integrálásának kezdete: 2013. január 21., 18UTC.



## II.5.2. Ensemble előrejelzések

### Az ensemble előrejelzések alapelve

A fent leírtak alapján felmerül a kérdés, hogy miként lehet kezelni az időjárás korlátozott előrejelezhetőségének problémáját. Ugyan – a jelenlegi tudományos ismeretek mellett – általában lehetetlenség biztosan meghatározni, hogy például nyáron, két nap múlva mely településeken várható zivatar és melyeken nem, de a numerikus modellek alapján mégis többet lehet tudni annál, mint hogy ez mindig, mindenhol ugyanakkora eséllyel fordulhat elő. A cél ezért az egyes időjárási eseményekhez kategorikus igen/nem válaszok helyett valószínűségi értékeket rendelni. Ez azt is jelenti, hogy egy-egy időjárási paraméterre vonatkozó előrejelzés nem pusztán egy szám, hanem egy eloszlásfüggvény lesz.

E valószínűségi megközelítés elérése érdekében érdemes nem csupán egyetlen előrejelzést futtatni a legjobbnak ítélt kezdeti feltételből a legjobbnak ítélt beállításokkal, hanem több – kezdeti feltételeiben és az alkalmazott módszereiben – némileg eltérő modellintegrálást elvégezni. Így egyetlen előrejelzés helyett előrejelzések sokasága, más szóval együttese, idegen kifejezéssel élve ensemble előrejelzés kapható. Fontos megjegyezni, hogy legtöbbször mindegyik ensemble tag a lékör egyformán lehetséges előrejelzése, azaz minden egyes tag bevalási valószínűsége ugyanaz, és ezt figyelembe vesszük a valószínűségi információk számolásánál. Bár a hagyományos szemléletmódnak megfelelően az egyetlen, nagy felbontású előrejelzést szokás „determinisztikus előrejelzés”-nek is nevezni, megjegyzendő, hogy az ensemble előrejelzés tagjai maguk is determinisztikusak, hiszen adott kezdeti feltételhez ugyanazt a modellt használva egyetlen végállapot tartozik. Mivel előrejelzések sokaságát futtatni meglehetősen költséges vállalkozás, ezért általában az ensemble tagok tér- és időbeli felbontása rosszabb, mint az ún. *determinisztikus előrejelzésé*. Noha nyilvánvalóan minél több tagból áll egy ensemble rendszer, annál jobban képes megfogni az előrejelzés bizonytalanságát, a számítógépes kapacitás ennek is határokat szab, így a gyakorlatban általában tíz és ötven között mozog az együttes előrejelzések tagjainak száma.

### A bizonytalanságok számszerűsítésének módszerei

Fontos megismerni azt, hogy az egyes ensemble tagok miben térnek el egymástól, azaz azt, hogy mily módon számszerűsítjük a korábban már említett belső és modellezési bizonytalanságokat. Ezeket a különbségeket ún. *perturbációk* modellre való ültetésével érjük el. A perturbációk nem lehetnek akármilyen nagyok, hibahatáron belül kell maradniuk, és az előrejelzés során fejlődő hibával összhangban kell növekedniük, hogy jól reprezentálhassák a leírni kívánt bizonytalanságokat. Az alábbiakban a legelterjedtebb perturbációs módszereket tekintjük át.

#### *1.) Kezdeti feltétel perturbációk*

A kezdeti feltételek apró hibáiból fakadó bizonytalanságok becslésére több, tudományos háttérrel rendelkező módszer született. Ezek között alapvető, megközelítésbeli különbséget jelenthet, hogy vagy olyan perturbációt illesztünk a kezdeti feltételhez, mely az előrejelzés során minél nagyobb mértékben növekszik, vagy úgy akarjuk az analízist perturbálni, hogy az a leginkább összhangban legyen annak bizonytalanságával.

- **Szinguláris vektorok módszere:** A szinguláris vektorok az állapottér azon irányait mutatják meg, melyek az előrejelzés egy korai, rövid – még jó közelítéssel lineárisnak tekinthető – szakaszán egy bizonyos norma szerint a legnagyobb mértékben növeked-

nek. Ezeket a perturbációkat szokás optimális perturbációknak is nevezni. Az eljárást az 1990-es évek elején az ECMWF-nél vezették be először. Az említett időtáv általában 12–48 óra között mozog (Buizza és Palmer, 1995).

A szinguláris vektorok elméletének megértéséhez tekintsünk egy nemlineáris dinamikai rendszer fejlődését leíró differenciálegyenlet-rendszert (Kertész, 2006):

$$\frac{dX}{dt} = F(X), \quad (\text{II.97.})$$

ahol legyen  $x(t)$  az  $X(t_0) = x(t_0)$  kezdeti feltételhez tartozó megoldás. A kezdeti feltétel módosítható egy kicsi,  $y(t_0)$  perturbációval, így a megoldás  $X(t) = x(t) + y(t)$  lesz. A korábban leírtak szerint azt tételezzük fel, hogy  $y$  kellően kicsi, így a perturbált rendszer fejlődését leíró függvényt  $x(t)$  körül Taylor-sorba fejtve a következő egyenletet kapjuk:

$$F(x(t) + y(t)) = F(x(t)) + \frac{dF}{dX} y(t) + y^2(t). \quad (\text{II.98.})$$

Ekkor (II.97.) és (II.98.) egyenletekből adódik, hogy:

$$\frac{d(x + y)}{dt} = \frac{dx}{dt} + \frac{dF}{dX} y(t) + y^2(t), \quad (\text{II.99.})$$

ahol a másod- és annál nagyobb rendű tagokat elhanyagolva megkapjuk a perturbációk fejlődését leíró ún. *tangens-lineáris egyenletet*:

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{dF}{dX} y(t), \quad (\text{II.100.})$$

melynek általános megoldása a  $(t_0 ; t_1)$  intervallumon következő alakban írható fel:

$$y(t_1) = \mathbf{M}y(t_0), \quad (\text{II.101.})$$

ahol  $\mathbf{M}$  az ún. *propagátor mátrix*. A tangens lineáris operátor a kiindulási perturbációt egy másik időpontra vonatkozó perturbációba viszi át (azaz az operátor a perturbációk között teremt kapcsolatot). Mint azt korábban említettük, a cél – egy bizonyos norma szerint – a leggyorsabban növekvő perturbációk megtalálása, ami egyben azt jelenti, hogy a következő hányadost szeretnénk maximalizálni:

$$\frac{\|y(t_1)\|_N}{\|y(t_0)\|_N} = \frac{\|\mathbf{M}y(t_0)\|_N}{\|y(t_0)\|_N}. \quad (\text{II.102.})$$

Itt említhető meg, hogy az  $N$  normának kiemelt jelentősége van a gyakorlatban. Kézenfekvőnek tűnne az euklideszi normát választani (azaz minden egyes tagot ugyanolyan súllyal figyelembe venni), ám ekkor az állapotvektort alkotó elemek eltérő nagyságrendje miatt bizonyos változók túl nagy súllyal szerepelnének a többihez képest (pl. a hőmérséklet értékei jóval nagyobbak a nedvességhez képest). Ezért inkább energia normákat szoktak választani: a gyakorlatban a teljes energia norma terjedt el,

de korlátos tartományon például a CAPE (konvektív elérhető potenciális energia; Stappers és Barkmeijer, 2008) normával is folynak kísérletek.

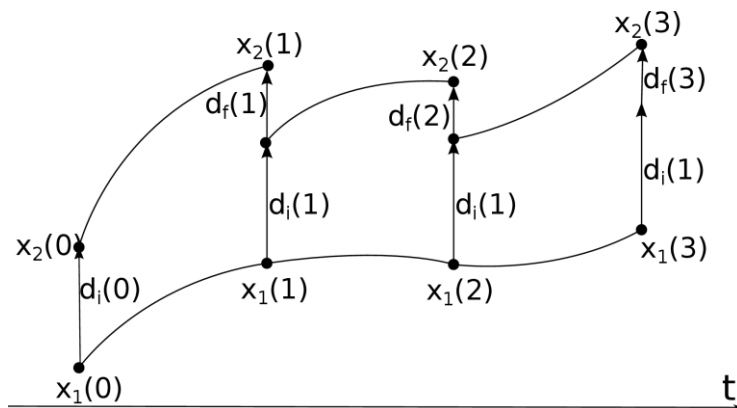
A norma és a skaláris szorzat itt nem tárgyalandó tulajdonságainak, illetve az adjungált operátor definíciójának köszönhetően a fenti hányados számlálója a következő módon írható át:

$$\|\mathbf{M}y\|_N = \langle \mathbf{M}y; \mathbf{M}y \rangle_N = \langle \mathbf{M}^* \mathbf{M}y; y \rangle, \quad (\text{II.103.})$$

ahol  $\mathbf{M}^*$  az  $\mathbf{M}$  mátrix adjungáltja. Szintén nem részletezendő megfontolások alapján tudjuk, hogy az  $\mathbf{M}^* \mathbf{M}$  mátrixnak létezik olyan  $v_1, v_2, \dots, v_n$  ortonormált sajátvektor rendszere, amelyhez tartozó sajátértékek:  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Ekkor a legnagyobb szinguláris értékhez tartozó – ún. vezető – szinguláris vektor mutatja az állapotter azon irányát, melynek perturbációja a legnagyobb mértékben növekszik az  $N$  norma szerint. Természetesen  $\mathbf{M}$  magas dimenziószáma miatt a sajátvektorok megtalálása nem triviális feladat, különböző numerikus módszereket szokás használni hozzá, melyek közül a meteorológiában az ún. *Lánczos-algoritmus* a legelterjedtebb (Lanczos, 1956).

A tapasztalatok szerint a szinguláris vektorok általában a baroklin instabilitás irányába mutatnak. A gyakorlatban általában nem csak a vezető szinguláris vektort, hanem többet – pl. az első 50 darabot – használják fel, és irányukba olyan méretű perturbációkat ültetnek, melyek jó közelítéssel a kezdeti feltétel hibahatárán belül maradnak.

- **„Breeding” módszer:** A szinguláris vektorokkal egy időben az amerikai NCEP-nél fejlesztették ki az ún. *breeding* (breeding = tenyésztés) módszert (Toth és Kalnay, 1997), melynek alkalmazása során a perturbációk „kitenyésztésével” keresik meg a fázistér legbizonytalanabb irányait. Kezdetben az analízisre véletlenszerű perturbációkat ültetnek, amelyek az előrejelzés során, a belső bizonytalanságoknak köszönhetően növekedni kezdenek. Bizonyos idő után ezt a megnövekedett nagyságú perturbációt visszaskálázzák a kezdeti feltételek becsült hibájának (analízis hiba) megfelelően. Ezután ezt a perturbációt egy újabb analízisre ültetik rá, és újabb előrejelzést indítanak belőle. Mindezt addig ismétlik, amíg a modell meg nem mutatja az állapotter azon irányait, amelyek az előző modellintegrálások során a legtöbb bizonytalanságot hordozták (II.24. ábra).

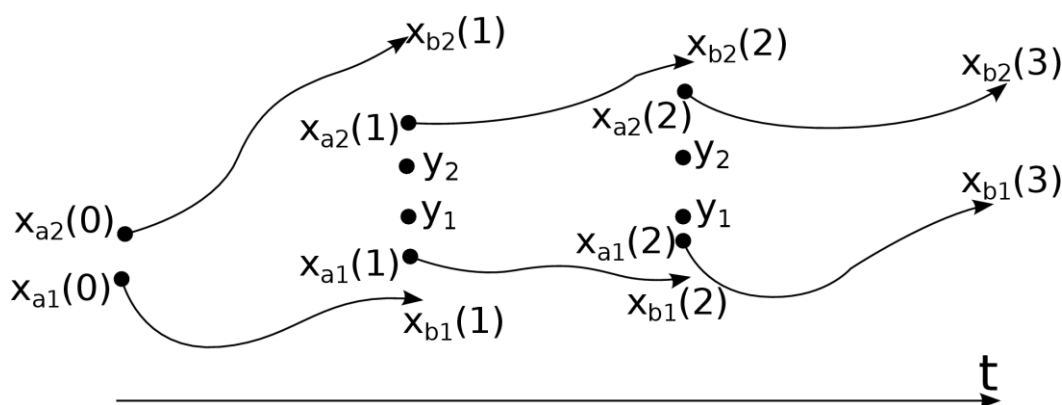


II.24. ábra. A breeding ciklus sematikus ábrája két tag esetén.  $x_1$  jelöli a perturbálatlan és  $x_2$  a perturbált ensemble tag különböző időpontokban felvett állapotait.  $d_i$  a kezdeti feltétel visszaskálázott perturbációit mutatja,  $d_f$  pedig az előrejelzés végére kifejlődött perturbációkat.

- **Ensemble adatasszimiláció:** Az adatasszimilációs résznél megismert módszerekkel nem csak egy, hanem több adatasszimilációs ciklus is futtatható párhuzamosan, azaz adatasszimilációk sokasága, ensemble-je készíthető (Ensemble of Data Assimilation azaz röviden EDA, Isaksen et al., 2010). Ezen adatasszimilációs ciklusok különbségét az adja, hogy a beérkező megfigyelések mindegyikét véletlenszerűen perturbálják a becsült megfigyelési hibák határán belül. Az így bekerülő perturbációk természetesen a belső bizonytalanságoknak köszönhetően az asszimiláció során tovább fejlődnek (II.25. ábra). Végül a módszer az állapotter az irányait mutatja meg, melyek az analízis készítése során a legtöbb bizonytalanságot hordozzák. Az asszimilációs módszerekről szóló részben látott jelölések mellett tehát egy csupán kételemű ensemble adatasszimilációban az analízisek a következő módon számolhatóak:

$$\begin{aligned} x_{a1} &= x_{b1} + \mathbf{K} [y_1 - \mathbf{H}(x_{b1})]; \\ x_{a2} &= x_{b2} + \mathbf{K} [y_2 - \mathbf{H}(x_{b2})], \end{aligned} \quad (\text{II.104.})$$

ahol  $x_{b1}$  és  $x_{b2}$  a két ciklus két különböző háttérmezője,  $y_1$  és  $y_2$  pedig a két különböző véletlenszámmal perturbált megfigyelés.



II.25. ábra. Ensemble adatasszimilációs ciklus sematikus ábrája két tag esetén.

## 2.) A modell hibák jellemzése

Amint az már korábban is látható volt, a modell integrálása során alkalmazott módszerek szintén számos bizonytalanságot visznek a rendszerbe. Az egydimenziós példa is azt szemléltette, hogy ezek belső bizonytalanságokkal való összekapcsolódása, hasonló hibanövekedéshez vezet az előrejelzés során, mint amit a kezdeti feltételek hibájánál láttunk. Ezért szükség van az integrálás során a modell hibájának reprezentációjára is. A gyakorlatban használt módszerek általában a fizikai parametizációkból eredő bizonytalanságok számszerűsítését tűzik ki célul.

- **Sztochasztikus fizika:** A különböző kis skálájú folyamatok parametizációjának hatása egy-egy állapotváltozó tendenciáján keresztül kerül a modellbe. A modellintegrálás során egy-egy rácspontban, egy-egy állapotváltozó  $\frac{\partial X}{\partial t}$  lokális tendenciáit a dinamika ( $D_X$ ) és a fizika ( $P_X$ ) hozzájárulása határozza meg. A sztochasztikus fizika módszerének alkalmazásakor ezeket a tendenciákat, egy további  $\delta P_X$  tagon keresztül, bizonyos határokon belül perturbálják:

$$\frac{\partial X}{\partial t} = D_X + P_X + \delta P_X . \quad (\text{II.105.})$$

A perturbáció mérete a fizikai parametrizációk hozzájárulásától és valamilyen – korlátozott tartományból választott –  $r$  véletlen számtól függ:  $\delta P_X = rP_X$  .

Természetesen a különböző rácspontokban és a különböző időlépcsőkben alkalmazott perturbációk mérete nem lehet független egymástól, ezek térben és időben korrelálnak egymással (Palmer et al., 2009; Bouttier, 2012).

- **Multi-fizika:** A gyakorlatban egy-egy folyamat leírására általában több parametrizációs séma is kidolgozható és alkalmazható. Ezek közül – akár időjárási helyzettől függően is – nem mindig egyértelműen eldönthető, hogy melyik a jobb, ráadásul ezeknek más folyamatok sémáival is lehetőleg összhangban kell lenniük. Így általában több, egyaránt használhatónak tekinthető parametrizációs csomag is tartozhat egy modellhez, melyek mindegyike hozzárendelhető az ensemble előrejelzés egy-egy tagjához, ilyen módon reprezentálva a modellekben rejlő bizonytalanságokat.

### 3.) Multi-rendszerek

A bizonytalanságok becslésére születtek meglehetősen gyakorlatias módszerek is, amelyek azt használják ki, hogy sok előrejelző központ és meteorológiai szolgálat futtat numerikus modelleket, amelyek többnyire felépítésüket és beállításukat tekintve is igen különbözőek. Mindazonáltal a különböző modellek, illetve azok egyes részletei egy ensemble tagjainak is tekinthetők, és segítségükkel is készíthetők valószínűségi előrejelzések. Ebben az esetben feltételezzük, hogy az egyes modellek különbségei jól reprezentálják a korábban már említett bizonytalansági palettát.

- **Multi-modell ensemble:** Több előrejelző központ, adott pontra vagy területre vonatkozó előrejelzésének sokasága képezi az ensemble tagokat.
- **Multi-analízis:** Több előrejelző központ kezdeti feltételeit felhasználva mindegyikből egy adott modellel származtatunk előrejelzéseket.
- **Multi-LBC** (LBC = „lateral boundary conditions”, azaz oldalsó peremfeltételek): Korlátozott tartományú modellek esetén több globális modell oldalsó peremfeltételként való alkalmazásával határozzuk meg az előrejelzési együtttest, ilyen módon számszerűsítve a határfeltételekben rejlő bizonytalanságokat.

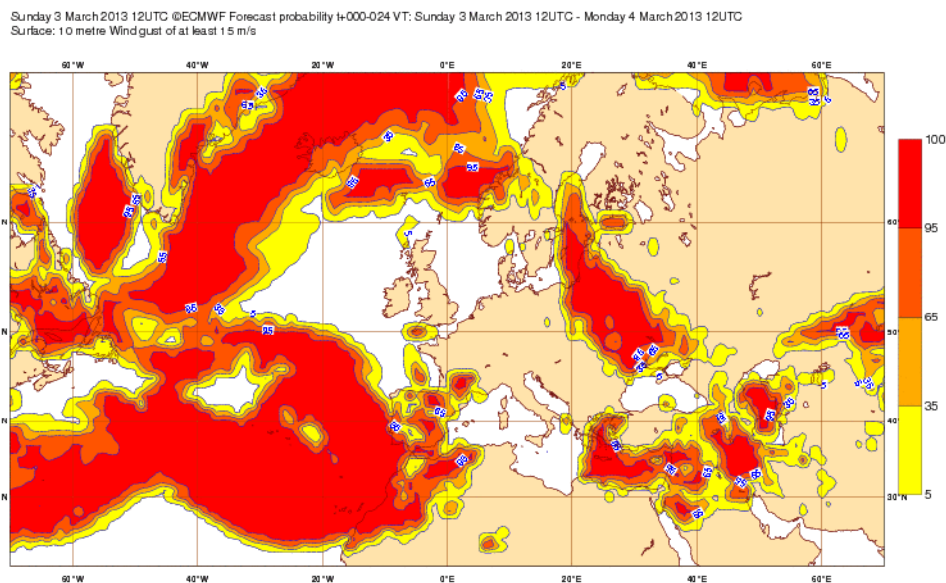
A fent leírt módszereket általában nem önmagukban szokták alkalmazni, hanem valamilyen kombinációjukat. Ez jelentheti a kezdeti feltétel perturbációs módszerek ötvözését, azok eltérő szemlélete miatt (Buizza et al., 2010), a kezdeti feltétel és a modell hiba reprezentációjának együttes használatát, vagy például korlátozott tartományú rendszerekben a multimódszerek elegyítését (Heizenreder et al., 2006; García-Moya, 2011). Itt jegyezzük meg, hogy a valószínűségi előrejelzések készítése során hagyományosan elsősorban a kezdeti feltételekben rejlő hibák számszerűsítésére koncentrálnak, ám az utóbbi években egyre inkább előtérbe került a modellhiba reprezentációjának fontossága is.

#### Az ensemble előrejelzésekből nyerhető valószínűségi információ

Az ensemble előrejelzések készítése során tehát  $N$  darab numerikus modell előrejelzést készítenk, és mint említettük, többnyire nem tudunk különbséget tenni az egyes ensemble tagok

között, azaz mindegyik bekövetkezése egyformán valószínű. Ezek önmagukban nem jól interpretálhatóak, hiszen a felhasználóknak nem lehet  $N$  darab térképes előrejelzést átadni, mint ahogy a médiában sem lehet  $N$  darab hőmérsékleti értéket felsorolni minden településre. Ezért újfajta megközelítésre, megjelenítési módszerekre van szükség az előrejelzések kommunikálása során.

Az egyik legelterjedtebb eszköz a fáklya diagram, mely készítésekor az összes modell-integrálásból megadjuk egy adott helyre vonatkozóan valamelyik változó időbeli menetét. Ez a diagram szerepelt már (II.22. ábra és II.23. ábra), szemléltetve, hogyan is változik az előrejelzés bizonytalansága. Egy másik lehetséges módszer, ha egy olyan eseményt definiálunk, aminek a bekövetkezére különösen kíváncsiak vagyunk (pl. valamilyen magasabb értéket meghaladó csapadékösszeg, fagypont alá csökkenő hőmérséklet, veszélyjelzési határértéket meghaladó szélökés). Ekkor vizsgálható, hogy az adott esemény bekövetkezését hány ensemble tag adja, azaz milyen valószínűséget rendel hozzá az ensemble rendszer. Ezek a valószínűségi értékek térképesen is ábrázolhatók, mint ahogy azt a II.26. ábra is szemlélteti.



II.26. ábra. A  $15 \text{ ms}^{-1}$ -ot meghaladó 10 méteres szintre vonatkozó szélökések valószínűségi térképe az ECMWF 51 tagú ensemble rendszere alapján.

Nem csak a valószínűségi előrejelzések interpretációja, de azok kiértékelése is összetettebbé válik, mint a hagyományos előrejelzéseké. Ha a valóságban esett az eső, és azt a modell is adta, akkor jó, ha nem adta, akkor rossz előrejelzésről beszélhetünk. Viszont mi a helyzet azzal, ha a rendszer 20 % valószínűséget ad az esőnek és esik? Az jó vagy rossz előrejelzés? A kérdést egyetlen eset alapján nem tudjuk megválaszolni, hanem statisztikára (nagyobb mintára, azaz hosszabb időszak vizsgálatára) van szükségünk. Az ensemble rendszertől azt várjuk, hogy az előrejelzett valószínűség konzisztens legyen a megfigyelésekkel, vagyis pl. azon esetek 20 %-ában essen az eső, amikor erre 20 % esélyt adott az előrejelzés. Megjegyzendő, hogy például Magyarországon átlagosan minden harmadik nap csapadékos, de ettől még az olyan előrejelzést, mely minden napra 33 % valószínűséget rendel a csapadék egzisztenciához, nem tekintjük értékesnek.

## II.6. Klímamodellelés

Szerző: Szépszó Gabriella

### II.6.1. Az éghajlati rendszer és modellezése

Az éghajlat esetében már nem csupán a légköri folyamatokat tekintjük, hanem a légkör és az éghajlati rendszert alkotó másik négy ún. *geoszféra* (a felszíni és felszín alatti vizek, a szárazföld, a jégtakaró és az élővilág) kölcsönható együttesét. A légkör a földi rendszer legdinamikusabban változó eleme, a perturbációkra néhány óra-nap alatt reagál. A légköri összetevők lényeges szerepet töltenek be többek között a sugárzás-átvitelben (pl. az üvegházhatásban). A Föld felszínének mintegy 71 százalékát borító víz legnagyobb tömegét az óceánok képviselik. Az óceánok adott kényszerhez tehetetlenségüknél fogva nagyon lassan (évtizedek, évszázadok alatt) alkalmazkodnak. A jégtakaró (a krioszféra) két folyamatban is nagyon fontos szerepet játszik: világos színe következtében a napsugárzás jelentős részét visszaveri, illetve a benne raktározott édesvíznek köszönhetően kulcsszerepet tölt be az óceáni cirkulációs rendszer (az ún. *termohalin cirkuláció*) vezérlésében. A kontinentális felszín szintén visszaveri a napsugárzás bizonyos hányadát, illetve áramlásmódosító hatása is van. Az élővilág (a bioszféra) részei a növényzet, az állatvilág és az ember, de a dinamikus modellalkotás során leginkább csak a növényzet legfontosabb folyamatait (pl. a fotoszintézist) veszik figyelembe. A fentiekben röviden bemutatott éghajlati rendszer egyes komponensei bonyolult nem-lineáris kölcsönhatásokban állnak egymással. Működnek például olyan, ún. *visszacsatolások*, amikor adott hatás eredménye – gerjesztő vagy csillapító módon – visszahat a kiváltó hatásra. (Ilyen gerjesztő visszacsatolásra példa a hőmérséklet, a jég és az albedó kapcsolata: ha az átlaghőmérséklet emelkedik, akkor a jégtakaró olvadásnak indul. Az olvadás következtében csökkenő világos felszín már kevesebb napsugárzást ver vissza. Emiatt több napsugárzás jut le a felszínre, tovább emelve a felszínközeli átlaghőmérsékletet.)

Az éghajlati rendszer többi komponensének folyamatait a légkörihez hasonló megmaradási törvények kormányozzák, s működésük tanulmányozására ugyanúgy a numerikus modellezés eszköztára szolgáltat objektív módszert, mint az időjárás előrejelzése esetében. Az összetevők fizikai folyamatainak leírására, a komponensek közötti bonyolult kölcsönhatások és visszacsatolások jellemzésére az ún. *kapcsolt globális modellek* képesek, melyek a komplex rendszer egészét együttesen tekintik, s ezáltal leírják az éghajlati rendszer választ egy feltételezett jövőbeli kényszerre. Ezek a modellek tehát több modellkomponensből állnak – leggyakrabban légköri, felszíni és óceáni modellekből –, melyek mindegyike az éghajlati rendszer adott elemére érvényes megmaradási egyenleteket oldja meg.

A légköri modellek sokszínűségéről már képet kaphattunk a fejezet előző részeiben. Az óceáni modellek viszont légköri társaiktól eltérően sok hasonlóságot mutatnak egymással. A modellek az eredeti primitív egyenletrendszer megoldásán alapszanak, a függőleges mozgásegyenletnél a hidrosztatikus, a sűrűsége vonatkozóan pedig a Boussinesq-közelítést használják. Minden óceáni modell rácsponthoz tartozó modell, azaz a horizontális térbeli differenciáloperátorokat véges különbségek formájában írja fel, s a modellek felbontása általában meglehetősen durva: 100-300 km. A vertikális irányban definiált koordináta-rendszer a leggyakrabban hagyományos felszínkövető rendszer, vagy izopiknikus (azonos sűrűségű) felületek által kijelölt koordináta-rendszer. A felső határfeltételeket a momentum, a látens és szenzibilis hő, valamint a csapadék fluxusai jelentik. Az óceáni modellek között a legnagyobb különbség a fizikai parametrizációs csomagokban található – leginkább a horizontális és vertikális diffúzió, valamint a keveredés leírásánál.

A modellszimulációkban a természetes éghajlatalakító folyamatok mellett figyelembe veszik az emberi tevékenység hatását is. Mivel ennek alakulását nem ismerjük egy évszázadra

előre, ezért különböző hipotéziseket, ún. *forгатókönyveket* (scenáriókat) állítanak fel, amelyek az antropogén tevékenység eltérő jövőbeli fejlődési lehetőségeit jelenítik meg. Az emberi hatást szén-dioxid koncentráció formájában számszerűsítik a modellek számára, azaz az egyes scenáriók a légköri szén-dioxid koncentráció különböző fejlődési menetét írják le (figyelembe veszik a többi üvegházgáz koncentráció-változását is, de ezeket is szén-dioxid egyenértékben fejezik ki). Az így meghatározott ekvivalens szén-dioxid koncentráció-változása a következő évszázadra még a legoptimistább esetben is egy szigorúan monoton növekvő trendet követ (II.27. ábra). A forгатókönyveket rendszeresen felülvizsgálják, s az újabb mérési eredmények és tapasztalatok birtokában időről időre frissítik őket.

## II.6.2. Regionális alkalmazások

Napjainkra a nagy klímakutató központokban fejlesztett kapcsolt globális éghajlati modellek tudományos és technikai kidolgozottsága elérte azt a szintet, hogy ezek a modellek már képesek megbízhatóan leírni az éghajlati rendszer elemeinek viselkedését (a közöttük lévő összetett kölcsönhatásokkal együtt), továbbá jól használhatók az éghajlatváltozás planetáris jellemzőinek vizsgálatára. Komplexitásuk azonban a jelenlegi számítógépes kapacitás teljes kihasználásával sem teszi lehetővé azt, hogy kizárólagos alkalmazásukkal az éghajlatváltozás regionális vonatkozásairól pontos információhoz jussunk (térbeli felbontásuk például még ma sem haladja meg a 100 km-t). Pedig a hatásokra való felkészülés szempontjából jóval fontosabb ezek ismerete, mert a regionális változások akár ellentétesek is lehetnek a globális tendenciákkal (jó példa erre a csapadék változása). A részletek feltárására ezért ún. *regionalizációs* (leskálázási) módszerekkel élünk, amelyek segítségével az érdeklődésünkre számot tartó területen pontosíthatjuk a nagyskálájú globális információkat. A globális információk regionális finomítására három módszer ismeretes:

1. A legkézenfekvőbb lehetőség a **nagy- vagy változó felbontású globális modellek** alkalmazása. Ebben az esetben általában már csak az éghajlati rendszer központi elemének, a légkörnek a viselkedését tanulmányozzák, s a többi komponensre (például az óceánra) vonatkozó kényszereket egy durvább felbontású globális modell mezőinek felhasználásával veszik figyelembe. A változó felbontású modellek esetében a légköri modell felbontását kizárólag azon a területen növelik, amelynek éghajlati viszonyai érdekesek az adott vizsgálat szempontjából. Ezekkel a modellekkel tehát lehetséges marad a komplex rendszer globális kezelése, mindazonáltal számítógépes futtatásuk még így is rendkívül költséges, ezért alkalmazásukra továbbra is csak a legnagyobb kutató-központok vállalkozhatnak.
2. A **statisztikai leskálázás** a fenti módszernél jóval kevesebb számítást igényel; lényege, hogy az éghajlat múltra vonatkozó globális és regionális jellemzői között statisztikai kapcsolatot állítunk fel, majd ezt a relációt alkalmazzuk a globális modellek által szolgáltatott jövőbeli eredményekre. A múltbeli globális viszonyokról a globális éghajlati modellek, a regionális jellemzőkről pedig a mérések szolgáltatnak információt, közöttük állítják fel tehát a kapcsolatot. A módszer gyengesége, hogy alapfeltevése, miszerint a múltbeli statisztikai kapcsolatok érvényesek maradnak a jövőben is, nem ellenőrizhető, továbbá egy változó globális éghajlatot leíró rendszerben nem is tartható, mivel nem képes figyelembe venni azokat a nem-lineáris visszacsatolási mechanizmusokat, amelyek az éghajlati rendszert globális és regionális szinten is átszövik.
3. A **regionális éghajlati modellek** alkalmazása során olyan korlátos tartományú modelleket futtatunk, amelyek nem az egész Föld, hanem egy kiválasztott terület folyamatait jellemzik a globális modellekhez hasonló, fizikailag megalapozott módon. Ezek a modellek tehát kisebb területet fednek le, mint globális társaik, így kisebb számítógépes kapacitással és finomabb felbontáson futtathatók, aminek köszönhetően kisebb orszá-



gok kutató-központjai is vállalkozhatnak alkalmazásukra. A finomabb felbontás lehetővé teszi a felszíni, és azon kisskálájú folyamatok pontosabb leírását, amelyek lényeges szerepet játszanak a regionális éghajlati viszonyok alakításában.

A következőkben a regionális éghajlati modellezésről ejtünk szót, mert ez (a statisztikai leskárással szemben) fizikai alapokon nyugvó eljárás, aminek alkalmazására Magyarországon is lehetőség nyílik. (Ma Magyarországon az ALADIN-Climate, a PRECIS, a RegCM és a REMO regionális klímamodelleket alkalmazzuk.) Ahogyan a fejezet többi részében láttuk, a korlátos tartományú modelleket néhány évtizede már eredményesen alkalmazzák a légkör viselkedésének rövidtávú előrejelzésére. Ebben a globális időjárás-előrejelző modelleknek is fontos szerep jut: az egész Földet átfogó, nagyskálájú folyamatok ugyanis a korlátos tartományú modellekben közvetett módon, tipikusan egy globális modell előrejelzésein keresztül (azaz a tartomány oldalsó határán peremfeltételként) kerülnek figyelembevételre és kényszerként fejtik ki hatásukat a regionális eredményekre. Az elmúlt közel negyed évszázad kutatási eredményei (Giorgi és Bates, 1989) azt bizonyították, hogy a korlátos tartományú modellek alkalmazása – bizonyos módosításokat követően és a megfelelő peremfeltételek beépítésével – az éghajlati skálára is kiterjeszhető.

A rövidtávú modellek átalakítása regionális klímamodellekké elsősorban a modellek fizikai parametrizációs eljárásainak módosítását követeli meg, mivel az éghajlati skálán egészen más fizikai folyamatok dominánsak, mint a néhány napos időskálán. A regionális éghajlati modellekben nagyobb hangsúlyt fektetnek például a folyamatokat vezérlő sugárzás-átvitel parametrizációjára, a lassan változó alsó határfeltételt biztosító felszíni és talajbeli folyamatok jellemzésére. Ugyanakkor már (10-25 km-es) felbontásukból adódóan is egyszerűbb sémákat használnak a csapadékképződéssel és a felhőzettel kapcsolatos kölcsönhatások leírására. A hosszútávú projekciók készítésénél az oldalsó peremfeltételeken kívül még egy további igen fontos nagyskálájú tényezővel kell számolni, amelynek rövidtávon nincs érzékelhető hatása: az emberi tevékenység hatásával. Ezt azonban csak a globális modellek képesek közvetlenül (a fent említett forgatókönyvek segítségével) figyelembe venni, a regionális modellek tehát a kényszerre adott globális „választ” skálázzák le és egészítik ki új, lokális részletekkel a kiválasztott régióra.

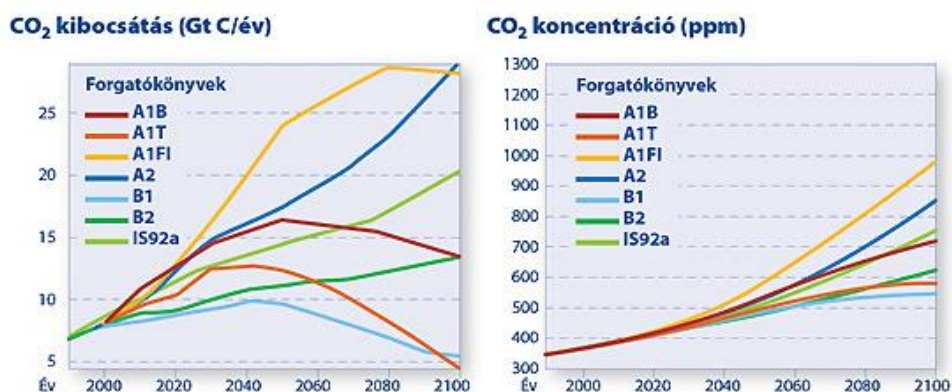
### II.6.3. Az éghajlati szimulációk bizonytalanságai

A jövőre vonatkozó globális és regionális éghajlati szimulációk többféle bizonytalanságot hordoznak magukban, melyek nemcsak jellegükben eltérők, de más-más időskálákon is fejtik ki hatásukat. Ezeknek a számbavétele ugyanolyan fontos, mint a közép-, a rövid-, vagy az ultra-rövidtávú esetben annak érdekében, hogy számszerűsíteni tudjuk őket. Az alábbiakban sorra vesszük, miből erednek az éghajlati szimulációk bizonytalanságai.

Az éghajlati rendszer fejlődésének leírása során már az éghajlatváltozás fogalmának definiálása sem egyszerű. Az éghajlati rendszernek ugyanis egyik fontos jellemzője, hogy minden külső kényszer nélkül időről időre „kilendül” az átlagostól jelentősen eltérő egyik vagy másik irányba, és akár hosszabb ideig is ebben az új állapotban marad. (Szigorú értelemben az éghajlati rendszernek nincs „átlagos”, egyensúlyi állapota, mert folyamatosan igazodik az őt érő hatásokhoz. Ez az alkalmazkodás azonban sokkal lassabb, mint a kényszerfeltételek változása, emiatt az éghajlati rendszer soha nincsen egyensúlyban, hanem mindig újabb egyensúlyi állapot felé tart.) Ezt a változékonyságot tapasztaljuk például akkor, amikor egy csapadék szempontjából rendkívülinek nem tekinthető időszakot néhány, a szokásosnál jóval szárazabb vagy nedvesebb év sorozata követ, de természetesen hosszabb, évszázados-évezredes időskálán is találunk erre példát (Götz, 2005). Ez tehát az éghajlati rendszer természetes, belső tulajdonsága (**szabad belső változékonyságának** is nevezzük), ezért mind a

méréseken, mind a modellszimulációkon alapuló vizsgálatokban fontos elkülönítenünk az éghajlat „igazi”, tendenciózus változásától.

Az éghajlatra hatással bíró külső kényszerek egyik legbizonytalanabb eleme az **emberi tevékenység**, mégpedig azért, mert ennek a XXI. században való alakulásáról nincs egyértelmű jövőképünk, csupán különböző (optimista, pesszimista, átlagos) feltételezéseink vannak (II.27. ábra). Az egyes lehetőségeket a globális éghajlati modellek számára külső kényszerként számszerűsítik, s a globális modell az éghajlati rendszer egészének válaszát szimulálja a feltételezett külső kényszerre. (Tehát az emberi tevékenység változása példa az olyan kényszerre, melynek hatását éghajlati modellek segítségével tudjuk vizsgálni és éppen ez történik napjaink gyakorlati klímamodellezési tevékenysége során.) Az elmúlt évtized tapasztalatai az emberi tevékenység alakulásáról szükségessé tették a jelenleg használatban lévő ún. *SRES* (Special Report on Emissions Scenarios; Nakicenovic et al., 2000) scenáriók felülvizsgálatát, s a fejlődési irányhoz és ütemhez jobban illeszkedő új forgatókönyvek kidolgozását. Az IPCC ötödik helyzetértékelő jelentését megalapozó újabb globális modellfuttatások során tehát ezek helyett már az ún. *stabilizációs* (RCP – Representative Concentration Pathways; Moss et al., 2010) scenáriókat alkalmazzák, melyeket a 2100-ra feltételezett sugárzási kényszerrel jellemeznek. A forgatókönyveken alapuló éghajlati szimulációkat éppen a külső kényszer hipotetikus volta miatt nem előrejelzéseknek, hanem *projekcióknak*, *másodfajú prognózisoknak* nevezük. A kibocsátási scenáriók bizonytalansága elsősorban a hőmérséklet esetében és hosszú távon, inkább az évszázad második felében érezteti hatását. Ezért a következő néhány évtized változásainak leírásánál gyakorlatilag nincs jelentősége a forgatókönyv-választásnak, azaz hogy milyen feltételezést teszünk az emberi tevékenység alakulására (II.28. ábra).

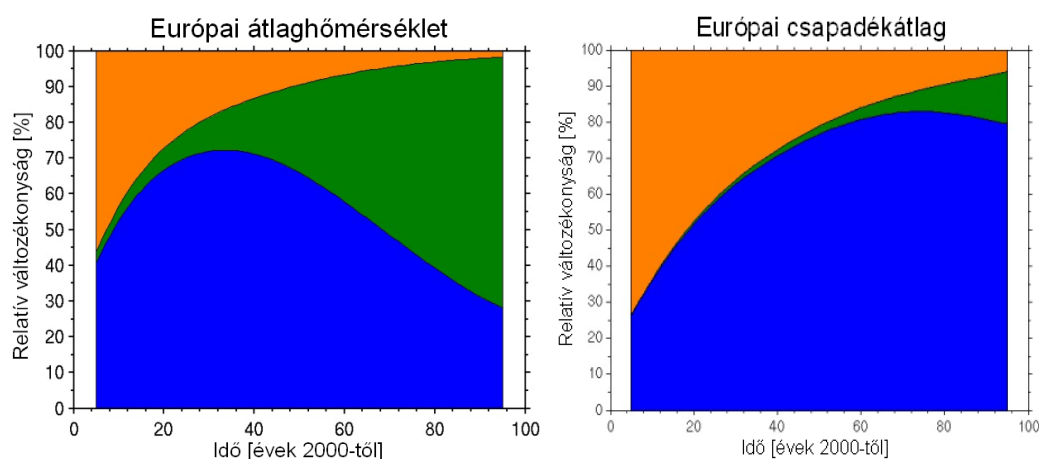


II.27. ábra. A globális emisszió legfontosabb forgatókönyv-családjának szén-dioxid egyenértékben kifejezett kibocsátási (bal) és koncentrációs (jobb) mutatói a XXI. századra (Nakicenovic et al., 2000).

Ahogy erre már utaltunk, az éghajlati rendszer leírására alkalmazott numerikus modellek a rövidtávú modellekhez hasonlóan közelítő módszerekkel oldják meg az egyenleteket: a diszkrétizált egyenletek integrálását több időlépésben végzik el, és az egyenletrendszerben explicit módon le nem írt folyamatok hatását fizikai parametrizációk segítségével veszik figyelembe. Fizikai parametrizációt alapvetően két esetben alkalmazunk: ha a modell rácsátvóltságánál kisebb skálájú folyamatot akarunk figyelembe venni, illetve ha olyan folyamatot szeretnénk leírni, amelyet bonyolultságánál fogva csak egyszerűsített leírasmóddal tudunk beépíteni a modellbe (ld a II.4. fejezetet). Az utóbbi kategóriába tartoznak azok a fizikai folyamatok is, amelyeket még napjainkra sem sikerült teljes alapossággal megismerni. Például ma is az egyik legtöbb nyitott kérdést tartogató kutatási terület, hogyan módosítják az éghajlati rendszerben végbemenő változások a felhőzeti viszonyokat, illetve hogyan hatnak a felhőzet

folyamatai vissza az éghajlati rendszerre. Az újonnan elért kutatási eredményeket folyamatosan beépítik a modellekbe, mindazonáltal továbbra is számos olyan terület van, ahol nagy a bizonytalanság. Amellett, hogy a parametrizációs eljárások közelítő jellegűek, gyakran ugyanannak a folyamatnak a leírására is többféle séma létezik, s az egyes modellek merőben különböző módszereket alkalmaznak. A legfontosabb, **parametrizációkon keresztül megjelenő bizonytalanságok** a csapadékképződéssel kapcsolatosak, így a csapadékszimulációk nagyfokú bizonytalansága elsősorban a modellek fejlesztése által csökkenthető (II.28. ábra).

A regionális modellezés esetében a bizonytalanság lényeges összetevője, hogy hogyan írjuk le a regionális klímamodellek számára azokat a nagyskálájú információkat, melyek adott térség éghajlatában szerepet játszanak. Ez globális modelleken keresztül történik úgy, hogy a globális modellek eredményeit **határfeltételekként** vesszük figyelembe a regionális modellkísérletekben. Ugyan minden egyes globális modell az éghajlati rendszer viselkedését hivatott szimulálni, mégis (a fentiek alapján) a fizikai folyamatok leírása különböző módon történik az egyes modellekben. Ez a globális eredményekben eltérésekhez vezethet, amelyek a regionális leskálázás során tovább nőnek. A peremfeltételek hatása mellett a regionális klímamodell-eredmények nagy érzékenységet mutatnak a **numerikus modellszimulációk beállításaira** is, azaz hogy milyen területen, milyen felszíni jellemzőkkel és felbontással hajtják végre a kísérleteket.



II.28. ábra. A globális éghajlati modellszimulációkat jellemző három bizonytalansági tényező (narancs: belső változékonyság, kék: modellek eltéréseiből származó bizonytalanság, zöld: forgatókönyv-választásból eredő bizonytalanság) hozzájárulása (%-ban) a teljes bizonytalansághoz a 2000–2100 időszak során, az európai éves átlaghőmérséklet és csapadékösszeg projekciói esetében (Hawkins és Sutton, 2009, 2011).

#### II.6.4. Az éghajlati modellek alkalmazása

A regionális éghajlati projekciók készítése előtt elengedhetetlen annak feltérképezése, hogy az adott modell hogyan képes jellemezni egy olyan időszakot, amelyről már kielégítő pontosságú ismeretekkel rendelkezünk. Ennek azért van jelentősége, mert ezáltal képet alkothatunk a modell gyengeségeiről, valamint az eredmények alapján kitzúzhatók a szükséges modellfejlesztés irányai. Tehát a modelleket természetesen először a múltra vonatkozóan tesztelik: azaz múltbeli időszakokra futtatják őket, majd a kapott eredményeket összevetik megfigyelési adatsorokkal. Itt jegyezzük meg, hogy az éghajlati modellek fejlesztése a speciális, hosszútávú alkalmazhatóság igénye miatt korántsem egyszerű, mert semmi biztosíték nincs arra, hogy egy, a múlt éghajlatát megbízhatóan jellemző modell hasonló minőségű projekciót ad a változó jövőbeli éghajlat leírására.

A teszteléshez elsőként olyan regionális modellkísérleteket hajtunk végre, melyekben a határfeltételeket ún. *re-analízisek* biztosítják. Ma több re-analízis adatbázis áll rendelkezésünkre (pl. ERA-40; Uppala et al., 2005), amelyeket a múltbeli időpontokra vonatkozó rövidtávú előrejelzések és a múltra rendelkezésre álló lehető legtöbb megfigyelési információ (adatasszimilációs módszerekkel történő) ötvözésével állítottak elő. Az ilyen típusú modellkísérletek segítségével célzottan a regionális modell hibáit tudjuk számszerűsíteni, hiszen a méréseken alapuló peremfeltételek elméletileg nem hoznak hibát a szimulációba. Ezeket olyan szimulációk követik, amelyekben a nagyskálájú kényszereket már globális általános cirkulációs modellek eredményei írják le. A múltra vonatkozóan így előállított eredményeket ebben az esetben is összehasonlítjuk megfigyelési adatokkal, s mivel a regionális modellek mellett a globális modellek is hibával terheltek, ezért a kiértékelés ezek együttes hibájáról ad képet. Figyelembe véve, hogy a jövőre vonatkozóan kizárólag a globális modellek eredményeit tudjuk határfeltételként alkalmazni, ezért a jövőbeli projekciók bizonytalanságainak csökkentése és a fejlesztés összetett feladat, mert a regionális és a globális modellek párhuzamos fejlesztését igényli.

Alapvető különbség az időjárási és az éghajlati előrejelzések között, hogy míg az előbbi esetben megköveteljük, hogy a modell a lényeges időjárási eseményeket mind térben, mind időben a lehető legpontosabban tükrözze vissza, addig az éghajlati modellek esetében ez nem reális elvárás. A légköri rendszer jövőbeli állapotát egy rövid időtáv során alapvetően a kiindulási értékek határozzák meg, és bár a kezdeti feltételek meghatározása a mai modern adatasszimilációs technikákkal már viszonylag nagy pontossággal lehetséges, a teljes pontosság soha nem érhető el (s ennek oka nem csak a modellek közelítő jellege), ami az időjárási események maximálisan néhány napos-hetes előrejelezhetőségét teszi lehetővé. Éghajlati skálán ugyan a kezdeti értékek hamar elvesztik hatásukat, és a korlátos tartományra vonatkozó előrejelzési feladat egy határérték-problémává alakul, de mivel a peremfeltételeket globális modellek előrejelzései biztosítják a regionális modell számára a teljes időtáv során, ezért a tökéletes regionális eredményekhez perfekt globális modellekre lenne szükségünk. Tehát a klasszikus értelemben vett „hosszútávú előrejelezhetőség” az éghajlati modellekkal sem valószínűsíthető meg. A globális kapcsolt modellek azonban képesek leírni azokat a hosszú időskálájú – óceáni, krioszférikus, bioszférikus és egyéb – folyamatokat és kölcsönhatásokat, amelyek az egész Föld cirkulációjára és éghajlatára lassú kényszerítő hatással bírnak, és ezáltal segítségével meghatározhatók az éghajlati rendszer viselkedésének aszimptotikus jellemzői.

Tehát az éghajlati rendszer leírására alkalmazott hosszabb időskálán a klímodellek eredményeit mint statisztikai sokaságot kell tekintenünk, ahol nincs jelentősége annak, hogy adott előrejelzés melyik konkrét időpontra vonatkozik, s a modellek megbízhatóságát aszerint osztályozzuk, hogy a kiválasztott időszak átlagos éghajlati viszonyait milyen pontossággal képesek visszatükrözni. Ehhez persze a vizsgált időszak hosszának megválasztása is lényeges. A Meteorológiai Világszervezet ajánlása szerint az éghajlat csak hosszabb, több évtizedes időskálán értelmezhető, ezért a modellek eredményeit általában 30-éves időszakokra vizsgáljuk. Mindez természetesen a hagyományos kiértékelési módszerek újraértelmezését is szükségessé teszi: az éghajlati szimulációk esetében – ellentétben a rövidtávú előrejelzésekkel – nem az egyes meteorológiai változók pillanatnyi értékeit hasonlítjuk össze a megfigyelésekkel, hanem hosszú időszakokra számított éves vagy évszakos várható értéket, szórást, sűrűségfüggvényt és egyéb statisztikai jellemzőket vizsgálunk. A validációhoz a technikailag egyszerűbb összehasonlítás érdekében általában olyan mérési adatbázisokat használnak, melyeket többnyire meteorológiai interpolációs eljárásokkal a felszíni állomási adatsorok felhasználásával állítanak elő. (Ilyen például az európai mérési adatokra támaszkodó E-OBS rácsponti adatbázis; Haylock et al., 2008; vagy a Kárpát-medencére rendelkezésre álló megfigyelési információk összegyűjtésével, homogenizálásával és interpolációjával előállított CARPATCLIM adatbázis; Lakatos et al., 2013).

A modellek a valós folyamatokat közelítések útján írják le, ezért az eredmények szükségszerűen kisebb-nagyobb hibával terhelték. A validációs vizsgálatok során feltárt modellgyengeségek elfogadható mértékűre csökkentéséhez is több évtizedes kutató-fejlesztői munka szükséges. A szisztematikus hibák kiküszöbölése érdekében ezért a jövőbeli eredményeket nem önmagukban, hanem a modellek saját referencia-időszakához viszonyítva értelmezzük – tehát változásokat adunk meg (noha a modellek hibája nem feltétlenül lesz időben állandó). A SRES forgatókönyvekkel készített modellszimulációk eredményeinek kiértékelésénél olyan referencia-időszakot van értelme választanunk, amely legfeljebb 2000-ig tart (pl. 1961–1990, 1971–2000), mert utána a szimuláció már csak projekcióként értelmezhető. Ugyanis a modellekben az emberi tevékenység figyelembevétele technikailag úgy történik, hogy a modellszimulációk 2000-ig tartó szakaszában a mért szén-dioxid koncentráció értékeket építik be, azon túl pedig az említett hipotetikus forgatókönyvet tekintik. A legtöbb klímamodellzéssel foglalkozó szakember általában az 1961–1990 időszakot veszi alapul, mert a modell így mutat megfelelően szignifikáns, nagy változási jelet a XXI. századra vonatkozóan. Ugyanakkor ennek a régebbi referenciának a használata a jelenhez képest némileg eltérő változást mutathat. (Említettük, hogy a modelleredményekben fontos elkülöníteni a valós változást az éghajlat természetes változékonyságától. Ennek eszköze a szignifikancia-teszt, amikor a mért vagy a szimulált idősoron olyan statisztikai vizsgálatot – például t-próbát – hajtunk végre, mely megmutatja, hogy a kapott változásérték miként viszonyul az adatsor szórásához – azaz az éghajlatváltozási jel a „zajhoz”.)

#### **II.6.5. Az éghajlati szimulációk eredményeinek felhasználása**

A jövőbeli tendenciák megismerésére vonatkozó várakozások az elmúlt években egyre sürgetőbbek lettek, és ennek kapcsán szembe kellett nézni azzal a kérdéssel, hogyan lehet a projekciókban jelenlévő bizonytalanságot úgy számszerűsíteni, hogy azok a gyakorlati igényeket is kielégítsék. Minden egyes forgatókönyv figyelembevételére és minden modell adaptálására még a komolyabb számítógép-parkkal rendelkező, nagyobb intézetekben sincsen elegendő kapacitás. Ezért nagy jelentőséggel bírnak azok a nemzetközi projektek, amelyek keretében a résztvevő országok intézményei közösen valósítják meg, s értékelik ki a modellprojekciókat (természetesen továbbra is szem előtt tartva a validáció és a modellfejlesztések már említett szükségességét). A PRUDENCE (Prediction of Regional scenarios and Uncertainties for Defining European Climate change risks and Effects; Christensen et al., 2007) és az ENSEMBLES (van der Linden és Mitchell, 2009) a legfontosabb olyan európai projektek, amelyek célkitűzése a projekciók bizonytalanságának alapos elemzése volt. Ezt több regionális és globális klímamodell futtatásával, különböző kibocsátási forgatókönyvek figyelembevételével valósították meg.

Az elmúlt évtizedben hazánk már nemcsak felhasználja a különböző éghajlati központok és modellezési együttműködések eredményeit, de több európai projektben való részvételével bekapcsolódott a regionális klímamodellzés nemzetközi fejlesztési hálózatába. Az Országos Meteorológiai Szolgálatnál és az Eötvös Loránd Tudományegyetem Meteorológiai Tanszékén több regionális klímamodell hazai adaptálására is sor került, amelyek segítségével lehetőségünk nyílik reális becslést adni a Kárpát-medencében az elkövetkezendő néhány évtizedben várható éghajlatváltozás tendenciáira (Horányi et al., 2011).

Az éghajlati modellek az éghajlatváltozás meteorológiai vonatkozásairól nyújtanak információt, az alkalmazkodás szempontjából viszont sokkal fontosabb ezek társadalmi, gazdasági, ökológiai és egyéb hatásainak vizsgálata. Elemzésükhöz objektív hatásvizsgálatok szükségesek, amihez a klímamodellek számszerű adatai tudnak kiindulást nyújtani. A hatásvizsgálatok nemzetközileg elfogadott módszertana (II.29. ábra) az alábbiakban foglalható össze röviden:

- A klímaváltozás hatásaira való felkészülés előkészítéséhez kulcsfontosságú a változások irányának és várható mértékének ismerete, azaz mindenféle adaptáció **kiindulásul az ezt megalapozó számszerű meteorológiai információknak kell szolgálnia**. A gyakorlatban ez azt jelenti, hogy számszerű éghajlati modellek segítségével szimulációkat végzünk a jövőbeli tendenciák megismerésére.
- Az éghajlati szimulációk számos bizonytalansággal terheltek, ezért a meteorológiai adatokra épülő objektív hatásvizsgálatokat a bizonytalanságok **valószínűségi alapú** figyelembevételével kell elvégezni. A regionális éghajlati modellek eredményei már tartalmazzák az emberi tevékenység társadalmi–gazdasági összetevőinek globális szintű bizonytalanságát, és az erre adott éghajlati válasz regionális szintű klimatikus-meteorológiai bizonytalanságát. Az éghajlatváltozási hatásvizsgálatok végrehajtása során ezek mellett figyelembe kell venni a hatásvizsgálati és az (alábbi pontban szereplő) utó-feldolgozási módszerek bizonytalanságait is.
- Az éghajlati modellek nyers outputjai gyakran nem rendelkeznek azzal a térbeli részletességgel, illetve közvetlenül nem tartalmazzák azokat a változókat, amelyek a hatásvizsgálatok elvégzéséhez szükségesek. Emiatt olyan speciális, fizikai alapokon nyugvó **dinamikai vagy statisztikai leskálázási módszerekre** van szükség, melyek kapcsolatot teremtenek a speciális igények és a nyers modelleredmények között.
- Az éghajlatváltozás hatásainak kutatása tehát a fenti számszerű, valószínűségi adatokra támaszkodik, és a hatásvizsgálatok szintén valószínűségi jellegű **eredménye beépítésre kerül a különböző döntéshozatali folyamatokba**. A fenti módszertant követve a döntéshozatal mindvégig objektív, tudományos eredményekkel igazolható mechanizmus marad.



II.29. ábra. Az éghajlatváltozási hatások objektív leírásának módszertana.

## II.7. Összefoglalás és kitekintés

**Szerző: Horányi András és Szépszó Gabriella**

A jegyzet II. fejezetében áttekintettük a számszerű előrejelzések elméleti hátterét, részletesen bemutattuk a hidro-termodinamikai egyenletrendszer numerikus megoldásának különböző módszereit: az adatasszimilációt, a diszkretizációs módszereket, a parametrizációs eljárásokat, az ensemble előrejelzések és az éghajlati modellek jellemzőit. A továbbiakban kitekintést adunk a numerikus prognosztika aktuális, illetve jövőbeli fejlesztési irányairól.

Ahogy azt a II.2. fejezetben láthattuk, a számszerű előrejelző modellek kezdeti feltételeit általában mérések és rövidtávú modell-előrejelzések (háttér) optimális kombinációjával állítjuk elő, hiba kovariancia mátrixok segítségével figyelembe véve ezeknek az információknak a megbízhatóságát. A Kalman filter (KF) alkalmazása elvi lehetőséget biztosít a háttér időjárási helyzettől függő súlyának meghatározására. Az időjárási modell alkalmazások esetében viszont nem lehetséges a KF alkalmazása, mert a háttér hiba kovariancia mátrix időbeli fejlődését leíró egyenlet megoldása az állapotvektor nagy mérete miatt rendkívül költséges. A dimenziócsökkentésre az ún. *ensemble Kalman filter* (EKF) ad lehetőséget. A módszerrel a háttér hiba kovariancia mátrix időbeli fejlődését úgy írjuk le, hogy egy kis elemszámú előrejelzési együttest képezünk az aktuális időpontra vonatkozóan, s a tagok egymástól vett eltéréseit mintaként használjuk az aktuális háttér hiba kovariancia mátrix számításához. A legfontosabb nyitott kérdések ezen a területen a következők:

- Hogyan állítsuk elő az EKF előrejelzési együttes tagjait, hogy eltéréseik jól reprezentálják az előrejelzési hibákat (tehát a kezdeti feltétel hibájának fejlődését és a modell hibát)?
- Mekkora előrejelzési együttesre van szükségünk ahhoz, hogy a háttér hiba kovariancia mátrix elemeit megfelelő pontossággal tudjuk becsülni?
- Hogyan lehet (lehetséges-e) ugyanazt a perturbáció-generáló eljárást alkalmazni a reálisztikus háttér hibák származtatására (ld. az adatasszimilációnál leírtakat) és az ensemble előrejelzések készítésére? Amennyiben erre a kérdésre igen a válasz, akkor sikeresen összekapcsolhatóak az adatasszimilációs és ensemble előrejelzési technikák teljes konzisztenciát biztosítva egymás között.

A meteorológiai előrejelzések felhasználhatóságához alapvető fontosságú, hogy időben elkészüljenek, emiatt a gyors modellintegrálás elengedhetetlen. A modellek futtatása a meteorológiai szolgálatoknál nagyteljesítményű szuperszámítógépeken, több processzoron történik, ahol a processzorok egymás memóriájával üzenetküldésen keresztül kommunikálnak. Hogy adott modell végrehajtási sebessége hogyan változik a processzorszám növelésével, azt a modell „skalázódása” határozza meg. Ez a kapcsolat bizonyos processzorszám felett már nem lineáris, sőt, előfordulhat, hogy a teljesítmény a processzorszám növelésével egyáltalán nem nő, mert ilyenkor a modellfutás során a processzorok közötti kommunikációra fordított idő összemérhetővé válik a tényleges integrálási műveletek párhuzamosításával nyert idővel. A probléma nem pusztán számítástechnikai nehézség, ugyanis a modellek egyes részleteit is újra kell gondolni az optimális megoldás eléréséhez, ami elsősorban a modellek numerikus sémáit érinti. Tekintettel az ún. *massively parallel* típusú számítógépek elterjedésére (amikor a számítógépeknek nemcsak 30-200, de többszáz-többszáz osztott-memóriás processzora van), a skalázhatóság kérdése a meteorológiai modellek dinamikai részeit fejlesztő szakemberek egyik legfontosabb közeljövőbeli kihívása.

Az időjárás-előrejelzést tekintve az ensemble módszer alkalmazása először a közép-, majd a rövidtávú előrejelzéseknél terjedt el. Napjainkban a számítási kapacitás növekedése és az elmúlt évek modellfejlesztései következtében egyre szélesebb körben alkalmazzák a nem-



hidrosztatikus modelleket a veszélyes időjárási jelenségek előrejelzésében. Ezeknél a rövid idő- és kis térszkálájú folyamatoknál azonban az előrejelzési hiba növekedése olyan gyors, hogy a bizonytalanságok hagyományos eszközökkel (a felbontás növelésével, a modellekben alkalmazott adatasszimilációs és parametrizációs eljárások fejlesztésével, a modell-felszín fiziógráfiai tulajdonságainak pontosításával) csak bizonyos határig csökkenthetők. Ezért a korrekt ultra-rövidtávú előrejelzésekhez már semmiképpen sem kerülhető meg a bizonytalanságok számszerűsítése. A középtávú előrejelzések esetében a valószínűségi információkat elsősorban gazdasági döntések meghozatalához használják, s a megfelelő lépések megtételére elegendő idő áll rendelkezésre az előrejelzések kiadása és az előrejelzett események bekövetkezése között. Ultra-rövidtávon elsősorban az élet- és vagyonvédelmet szolgálják az előrejelzések, ahol a késlekedés súlyos, pénzben nem mérhető következményekkel járhat, ezért a szélsőséges események esetleg kis valószínűséggel, de korán megjelenő előrejelzése az ensemble technika révén felértékelődik. Meg kell jegyezni azonban, hogy a „valószínűségi” szemlélet sajnos még a meteorológus társadalomban sem terjedt el igazán, ezért az ensemble előrejelzések optimális alkalmazása (különös tekintettel az ultra-rövidtávú skálára) komoly kihívást jelent mind a meteorológusok, mind az egyéb felhasználók számára.

A számszerű előrejelző modellek felbontás-növekedésének – mint fentebb láthattuk – határt szab az előrejelezhetőség (azaz egyre nehezebb a horizontális felbontás növelésével pontosabb előrejelzéseket szolgáltatni). Mindazonáltal ez a megállapítás elsősorban a lokális modellekre igaz, amelyek a néhány km-es térskálán dolgoznak, és egyelőre még nem vonatkozik a globális numerikus modellekre, ahol érdemes tovább növelni a horizontális felbontást az előrejelzések további javításának reményében. A globális modellek esetében tehát a fejlesztések fő iránya az, hogy ezek a modellek is elérjék a nem-hidrosztatikus skálát és képesek legyenek a kisebb skálájú folyamatok sikeres modellezésére is. Ez a fejlesztési irányvonal – figyelembe véve a korábban már említett számítógép-architektúrában való változást is – komoly kihívást jelent a modellek dinamikáját fejlesztő szakemberek számára, arról nem is beszélve, hogy egy globális modell nem-hidrosztatikus változatának futtatása komoly számítógépes kapacitást igényel (s ezért is tekintenek például olyan modell-Földet, melynek a mérete jóval kisebb, mint a valós Földé, ily módon csökkentve a tesztekhez szükséges számítás-igényt). A nem-hidrosztatikus skála megközelítésére az éghajlati modellek esetében is folynak kutatások, jóllehet a hosszú klíma-szimulációk elvégzése még hatalmasabb számítási kapacitást igényel (viszont legalább a végrehajtási időkénszer nem olyan szigorú). Az éghajlati alkalmazásra is szánt globális nem-hidrosztatikus ICON modellt a hamburgi Max Planck Intézet és a Német Meteorológiai Szolgálat fejleszti (Giorgetta et al., 2009), azonban a modell jelenleg még „csak” időjárási modellként fut. Az ICON az összenyomhatatlan nem-hidrosztatikus egyenleteket oldja meg nagy felbontáson, s számításait ikozahedrális rácson végzi, ami kiküszöböli a rácsponti modellekben egyébként gondot okozó pólusproblémát, és egyszerűvé teszi a felbontás adott tartományon való finomítását. A regionális klímodellezésben már a gyakorlatban is megkezdődött a nem-hidrosztatikus modellváltozatok tesztelése és alkalmazása. Európában a spektrális HARMONIE-Climate modellel folynak kísérletek elsősorban a Svéd Meteorológiai Szolgálatnál (Lindstedt, 2012).

Speciális kihívást jelent a középtávú és az éghajlati skálájú előrejelzések között átmenetet képező szezonális előrejelzések fejlesztése, melyeknek az éghajlati rendszer lassan változó (pl. óceáni) komponensei adnak bizonyos előrejelezhetőséget. A gyakorlatban a közepes szélességeken a kontinensek belsejében (például Európa nagy részén és így Magyarországon is) ez a fajta előrejelezhetőség igen korlátozott, azonban például az afrikai és ázsiai kontinens számos részén van prognosztikai értéke a szezonális előrejelzéseknek. Ez azért érdekes, mert itt található a zömében mezőgazdasági termelésből élő fejlődő országok többsége, amelyek számára gazdasági és egyéb sérülékenységük miatt elsődleges az évszakos változékonyságra való felkészülés. Ez a Meteorológiai Világszervezet klímapolitikájában is megmutatkozik,



mely az éghajlati modellekkel szemben nagyobb támogatást ad a szezonális előrejelzések fejlesztésének.

A légköri előrejelzésekben a legnagyobb bizonytalanságot a felhő- és csapadékképződési folyamatok leírása okozza (Geresdi, 2005). Különösen igaz ez az éghajlati modellek esetében, amelyek ma tipikus felbontása többnyire nem teszi lehetővé, hogy ezeket a kölcsönhatásokat a lehető legpontosabban, azaz explicit módon vegyék figyelembe, mert az rendkívüli számításigénnyel járna. Ennek áthidalására szolgál az ún. *szuperparametrizáció*: a légköri modell egységnyi rácsterületeit további cellákra osztják fel, s mindegyikre futtatnak egy olyan dinamikus modellt, amely kimondottan a felhőfizikai folyamatok pontosabb leírására alkalmas (erre az angol nyelvű szakirodalomban *cloud resolving model*-ként hivatkoznak). Az új cellák méretskálája most már km-es nagyságrendű, amelyen ezek a modellek explicit módon képesek leírni a felhőborítottságot, a különböző típusú és kiterjedésű felhők átfedési jellemzőit, a konvektív rendszereket és egyéb felhőfizikai folyamatokat, majd a számítások végeztével eredményeiket az eredeti rácsterület középpontjában adják át a légköri modellnek. A felhőzetleíró modelleket két- vagy háromdimenziós változatban alkalmazzák: előbbi esetben a kis cellák között nincsen kapcsolat, míg a háromdimenziós változat teljesebb leírást tesz lehetővé (Randall et al., 2003). A megvalósítás számításigénye nagyságrendekkel kisebb, mintha a teljes modellben hasonló felbontáson íránk le a felhőfizikai folyamatokat, mindazonáltal a módszert csak a több ezer processzoros számítógépek mostanában kezdődő elterjedésével használják szélesebb körben.

A fentiek, illetve a korábbi fejezetek alapján láthattuk, hogy milyen szerteágazó és érdekes a numerikus modellek és a numerikus prognosztika világa, s az elmúlt évtizedekben tapasztalt hatalmas fejlődés ellenére még számos probléma vár megoldásra a szakemberek számára. Bízunk abban, hogy ez a jegyzet felkelti az egyetemi hallgatók érdeklődését, akik esetleg ennek alapján késztetést éreznek a már megoldott problémák elsajátítása mellett a nyitott problémák megoldására is.

## **Köszönetnyilvánítás**

A szerzők ezúton mondanak köszönetet *Kullmann Lászlónak* a fizikai parametrizációk leírásában nyújtott segítségéért és hasznos észrevételeiért. Szintén köszönetünket fejezzük ki *Weidinger Tamásnak* a szöveghez tett javaslataiért. Végezetül szeretnénk köszönetet mondani közvetlen kollégáinknak, akik elviselték és ezáltal lehető tették, hogy a szerzők elkészítsék a numerikus prognosztika elméletével foglalkozó jelen fejezetet.

## Felhasznált irodalom

- André K., 2012: Digitális filter inicializáció vizsgálata meteorológiai modellek segítségével. BSc szakdolgozat, Eötvös Loránd Tudományegyetem, Budapest.
- Asselin, R.A., 1972: Frequency filter for time integrations. *Monthly Weather Review* 100, 487–490.
- Beljaars, A., Bechtold, P., Köhler, M., Morcrette, J.-J., Tompkins, A., Viterbo, P., Wedi, N.P., 2004: The numerics of physical parametrization. In *Proceedings of ECMWF Workshop on Recent Developments in numerical methods for atmosphere and ocean modelling*, Reading, UK, 113–134.
- Bouttier, F., Courtier, P., 1999: Data Assimilation concepts and methods. ECMWF Lecture Series (Data assimilation and use of satellite data), pp. 72.  
[http://www.ecmwf.int/newsevents/training/lecture\\_notes/pdf\\_files/ASSIM/Ass\\_cons.pdf](http://www.ecmwf.int/newsevents/training/lecture_notes/pdf_files/ASSIM/Ass_cons.pdf).
- Bouttier, F., Vié, B., Nuissier, O., Raynaud, L., 2012: Impact of Stochastic Physics in a Convection-Permitting Ensemble. *Monthly Weather Review* 140, 3706–3721.
- Buizza, R., Palmer, T.N., 1995: The singular-vector structure of the atmospheric global circulation. *Journal of the Atmospheric Sciences* 52, 1434–1456.
- Buizza, R., Leutbecher, M., Isaksen, L., Haseler, J., 2010a: Combined use of EDA- and SV-based perturbations in the EPS. *ECMWF Newsletter* 123, 22–28.
- Charney, J.G., 1948: On the scale of atmospheric motions. *Geofys. Publ.* 17, pp. 17.
- Charney, J.G., 1955: The use of the primitive equations of motion in numerical prediction. *Tellus* 7, 22–26.
- Charney, J.G., Fjørtoft, R., von Neumann, J., 1950: Numerical Integration of the Barotropic Vorticity Equation. *Tellus* 2, 237–254.
- Courant, R., Friedrichs, K.O., Lewy, H., 1928: Über die Partiellen Differenzgleichungen der Mathematischen Physik. *Mathematische Annalen* 100, 32–74.
- Davies, H.C., 1976: A lateral boundary formulation for multi-level prediction models. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 102, 405–418.
- Dévényi D., Gulyás O., 1988: Matematikai statisztikai módszerek a meteorológiában. Tankönyvkiadó, Budapest, pp. 443.
- Dévényi D., Horányi A., Radnóti G., 1998: Numerikus módszerek az időjárás előrejelzésben. Kézirat, Országos Meteorológiai Szolgálat.
- Dubal, M., Wood, N., Staniforth, A., 2004: Analysis of parallel versus sequential splittings for time-stepping physical parameterizations. *Monthly Weather Review* 132, 121–132.
- Durran, D.R., 1999: Numerical methods for wave equations in geophysical fluid dynamics. Springer, New York, USA, pp. 465.
- Evensen, G., 2007: Data Assimilation: The Ensemble Kalman Filter. Springer, pp. 279.
- Fisher, M., 2001: Assimilation techniques (3): 3dvar. ECMWF Lecture Series (Data assimilation and use of satellite data), pp. 11.  
[http://www.ecmwf.int/newsevents/training/lecture\\_notes/pdf\\_files/ASSIM/3dVar.pdf](http://www.ecmwf.int/newsevents/training/lecture_notes/pdf_files/ASSIM/3dVar.pdf).
- Gandin, L.S., 1963: Objective analysis of meteorological fields. *Gidrometeorologicheskoe Izdatelstvo, Leningrad*, English translation by Israeli Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1965.
- García-Moya, J.-A., Callado, A., Escribà, P., Santos, C., Santos-Muñoz, D., Simarro, J., 2011: Predictability of short-range forecasting: a multimodel approach. *Tellus A* 63, 550–563.
- Geleyn, J.-F., Hollingsworth, A., 1979: An economical analytical method for the computation of the interaction between scattering and line absorption of radiation. *Contributed Journal of Atmospheric Physics* 52, 1–16.
- Geresdi I., 2005: Klímadinamikai modellek fizikai parametrizációs csomagjai, visszacsatolások. *Beszámolókötet*, 31. Meteorológiai Tudományos Napok, Budapest, 82–89.

- Geresdi I., 2007: A felhőfizikai kutatások aktuális kérdései. Beszámolókötet, 32. Meteorológiai Tudományos Napok, Budapest, 25–31.
- Geresdi I., 2006: Globális klíma modellek fizikai parametrizációs eljárásai. NKFP 3A/082/2004 pályázati beszámoló, pp. 62.
- Geresdi I., Ács F., Randriamampianina R., Tarczay K., Tóth H., 2003: Fizikai parametrizációk a mezoskálájú modellezésben. Beszámolókötet, 29. Meteorológiai Tudományos Napok, Budapest, 76–85.
- Giorgetta, M., Hundertmark, T., Korn, P., Reich, S., Restelli, M., 2009: Conservative space and time regularizations for the ICON model. *Berichte zur Erdsystemforschung* 67, pp. 32.
- Giorgi, F., Bates, G., 1989: The Climatological Skill of a Regional Model over Complex Terrain. *Monthly Weather Review* 117, 2325–2347.
- Götz G., 2001: Káosz és prognosztika. Országos Meteorológiai Szolgálat, Budapest, pp. 490.
- Götz G., 2005: Az éghajlat dinamikájának néhány nyitott kérdéséről. Beszámolókötet, 31. Meteorológiai Tudományos Napok, 10–61.
- Gustafsson, N., McDonald, A., 1996: A comparison of the HIRLAM gridpoint and spectral semi-Lagrangian model. *Monthly Weather Review* 124, 2008–2022.
- Haltiner, G.J., Williams, R.T., 1980: *Numerical Prediction and Dynamic Meteorology* (2nd edition). John Wiley and Sons, New York, USA, pp. 477.
- Harrington, J., 2001: A method for the parameterization of cloud optical properties in bulk and bin microphysical models: Implications for arctic cloudy boundary layers. *Atmospheric Research* 57, 51–80.
- Haugen, J., Machenhauer, B., 1993: A spectral limited-area model formulation with time-dependent boundary conditions applied to shallow-water equations. *Monthly Weather Review* 121, 2618–2630.
- Hawkins, E., Sutton, R., 2009: The potential to narrow uncertainty in regional climate predictions. *Bulletin of American Meteorological Society* 90, 1095–1107.
- Hawkins, E., Sutton, R., 2011: The potential to narrow uncertainty in projections of regional precipitation change. *Climate Dynamics* 37, 407–418.
- Haylock, M.R., Hofstra, N., Klein Tank, A.M.G., Klok, E.J., Jones, P.D., New, M., 2008: A European daily high-resolution gridded dataset of surface temperature and precipitation. *Journal of Geophysical Research (Atmospheres)* 113, D20119, doi: 10.1029/2008JD10201.
- Heizenreder, D., Trepte, S., Denhard, M., 2006: A regional multi-model ensemble in Europe. The European forecaster. *Newsletter of the WGCEF* 11, 29–35.
- Horányi A., Bartholy J., Krüzselyi I., Pieczka I., Pongrácz R., Szabó P., Szépszó G., Torma Cs., 2011: A hazai regionális klímamodellek eredményeinek együttes kiértékelése. Beszámolókötet, 36. Meteorológiai Tudományos Napok, Budapest, 113–128.
- Horányi A., 2002: Numerikus modellek alkalmazása a meteorológiában. *Egyetemi Meteorológiai Füzetek* 17 (Szerkesztők: Weidinger T., Bartholy J., Mészáros R., Dezső Zs. és Pintér K.), ELTE Meteorológiai Tanszék, Budapest.
- Horányi, A., Mile, M. Szűcs, M., 2011: Latest developments around the ALADIN operational short-range ensemble prediction system in Hungary. *Tellus* 63A, 642–651.
- Huang, X., Lynch, P., 1992: Diabatic Digital-Filtering Initialization: Application to the HIRLAM Model. *Monthly Weather Review* 121, 589–603.
- Isaksen, L., Haseler, J., Buizza, R., Leutbecher, M., 2010: The new Ensemble of Data Assimilation. *ECMWF Newsletter* 123, 17–21.
- Kalman, E.R., 1960: A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of Basic Engineering* 82, 35–45.

- Kalnay, E., 2003: Atmospheric modelling, data assimilation and predictability. Cambridge University Press, Cambridge, USA, pp. 341.
- Kertész S., 2006: A perturbációk fejlődésének rövid jellemzése. Kézirat, Országos Meteorológiai Szolgálat.
- Kibel, I.A., 1957: Vvedenie v gidrodinamicheskie melody kratkosrochnogo prognoza pogody. Gosud. Izdat. Tek.-Teor. Lit., Moscow, pp. 374.
- Kiehl, J.T., Trenberth, K.E., 1997: Earth's Annual Global Mean Energy Budget. *Bulletin of the American Meteorological Society* 78, 197–208.
- Lakatos, M., Szentimrey, T., Bihari, Z., Szalai, S., 2013: Creation of a homogenized climate database for the Carpathian region by applying the MASH procedure and the preliminary analysis of the data. *Időjárás* 117, 1, 143–158.
- Lanczos, C., 1956: *Applied Analysis*. Prentice-Hall, New Jersey, USA, pp. 539.
- Lax, P.D., Richtmyer, R.D., 1956: Survey of the stability of linear finite difference equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics* 9, 267–293.
- Leith, C.E., 1980: Nonlinear normal mode initialization and quasi-geostrophic theory. *Journal of the Atmospheric Sciences* 37, 954–964.
- Le Moigne, P., 2009: SURFEX scientific documentation; issue 1. Météo France, Toulouse, France, pp. 211.  
[http://www.cnrm.meteo.fr/surfex/IMG/pdf/surfex\\_scientific\\_documentation.pdf](http://www.cnrm.meteo.fr/surfex/IMG/pdf/surfex_scientific_documentation.pdf).
- Lindstedt, D., 2012: Development of a high resolution regional climate model. Rossby Centre Newsletter.
- Lorenz, E., 1963: Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences* 20, 130–142.
- Louis, J.F., 1979: A Parametric Model of the Vertical Eddy Fluxes in the Atmosphere, *Boundary-Layer Meteorology* 17, 18–202.
- Lynch, P., Huang, X., 1992: Initialization of the HIRLAM model using a digital filter. *Monthly Weather Review* 120, 1019–1034.
- Manabe, S., Smagorinsky, J., Strickler, R.F., 1965: Simulated Climatology of a General Circulation Model with a Hydrologic Cycle. *Monthly Weather Review* 93, 769–798.
- Mesinger, F., Arakawa, A., 1976: *Numerical Methods Used in Atmospheric Models, Volume 1*. GARP Publications Series 17.
- Miller, M., Buizza, R., Haseler, J., Hortal, M., Janssen, P., Untch, A., 2010: Increased resolution in the ECMWF deterministic and ensemble prediction systems. *ECMWF Newsletter* 124, 10–16.
- Mironov, D.V., 2008: Parameterization of lakes in numerical weather prediction. Description of a lake model. COSMO Technical Report 11, Deutscher Wetterdienst, Offenbach am Main, Germany, pp. 41.
- Morcrette, J.-J., 1989: Description of the Radiation Scheme in the ECMWF Model. Technical Memorandum 165, ECMWF, Reading, UK, pp. 26.
- Moss, R.H., Edmonds, J.A., Hibbard, K.A., Manning, M.R., Rose, S.K., van Vuuren, D.P., Carter, T.R., Emori, S., Kainuma, M., Kram, T., Meehl, G.A., Mitchell, J.F.B., Nakicenovic, N., Riahi, K., Smith, S.J., Stouffer, R.J., Thomson, A.M., Weyant, J.P., Wilbanks, T.J., 2010: The next generation of scenarios for climate change research and assessment. *Nature* 463, 747–756.
- Nakicenovic, N., Alcamo, J., Davis, G., de Vries, B., Fenhann, J., Gaffin, S., Gregory, K., Grübler, A., Jung, T.Y., Kram, T., La Rovere, E.L., Michaelis, L., Mori, S., Morita, T., Pepper, W., Pitcher, H., Price, L., Raihi, K., Roehrl, A., Rogner, H. H., Sankovski, A., Schlesinger, M., Shukla, P., Smith, S., Swart, R., van Rooijen, S., Victor, N., Dadi, Z., 2000: *IPCC special report on emissions scenarios*. Cambridge University Press, Cambridge, USA.

- Oke, T.R., 1987: *Boundary Layer Climates* (2nd edition). Routledge, London, UK, pp. 435.
- Orszag, S.A., 1971: On the Elimination of Aliasing in Finite-Difference Schemes by Filtering High-Wavenumber Components. *Journal of the Atmospheric Sciences* 28, 1074.
- Palmer, T.N., Tibaldi, S., 1988: On the prediction of forecast skill. *Monthly Weather Review* 116, 2453–2480.
- Palmer, T.N., Buizza, R., Doblas-Reyes, F., Jung, T., Leutbecher, M., Shutts, G.J., Steinheimer, M., Weisheimer, A., 2009: Stochastic Parametrization and Model Uncertainty. Technical Memorandum 598, ECMWF, Reading, UK.
- Perkey, D.J., Kreitzberg, C.W., 1976: A time-dependent lateral boundary scheme for limited area primitive equation models. *Monthly Weather Review* 104, 744–755.
- Pfeifer, S., 2006: Modeling cold cloud processes with the regional climate model REMO. Ph.D. dissertation, Max Planck Institute for Meteorology, Hamburg, Germany, pp. 131.
- Philips, N.A., 1956: The general circulation of the atmosphere, a numerical experiment. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 82, 123–164.
- Philips, N.A., 1959: An example of nonlinear computational instability. In: *The atmosphere and the sea in motion*. Rossby Memorial Volume, Rockefeller Institute Press, New York, USA, 501–504.
- Práger T., 1992: Numerikus prognosztika I.: A hidrodinamikai előrejelzés elmélete. Tankönyvkiadó, Budapest, pp. 327.
- Radnóti G., 2003: A numerikus előrejelzés alapjai, numerikus módszerek. 29. Meteorológiai Tudományos Napok, beszámolókötet, 25–40.
- Randall, D., Khairoutdinov, M., Arakawa A., Grabowski, W.W., 2003: Breaking the cloud-parameterization deadlock. *Bulletin of the American Meteorological Society* 84, 1547–1564.
- Riddaway, R.W. (Revised by M. Hortal), 2001: Numerical Methods. ECMWF training lecture note.  
[http://www.ecmwf.int/newsevents/training/lecture\\_notes/pdf\\_files/NUMERIC/Num\\_meth.pdf](http://www.ecmwf.int/newsevents/training/lecture_notes/pdf_files/NUMERIC/Num_meth.pdf).
- Ritchie, H., 1986: Eliminating the Interpolation Associated with the Semi-Lagrangian Scheme. *Monthly Weather Review* 114, 135–146.
- Robert, A.J., 1981: A stable numerical integration scheme for the primitive meteorological equations. *Atmosphere–Ocean* 19, 35–46.
- Skamarock, W.C., 2004: Evaluating Mesoscale NWP Models Using Kinetic Energy Spectra. *Monthly Weather Review* 132, 3019–3032.
- Smolarkiewicz, P.K., Pudykiewicz, J.A., 1992: A Class of Semi-Lagrangian Approximations for Fluids. *Journal of the Atmospheric Sciences* 49, 2082–2096.
- Staniforth, A., Côté, J., 1991: Semi-Lagrangian Integration Schemes for Atmospheric Models – A Review. *Monthly Weather Review* 119, 2206–2223.
- Stappers, R., Barkmeijer, J., 2008: HIRLAM CAPE singular vectors. *HIRLAM Newsletter* 54, 76–80.
- Stegen, L., 1988: *Vetülettan*. Tankönyvkiadó, Budapest.
- Strang, G., Fix, G.J., 1973: *An analysis of the finite element method*. Prentice-Hall, New York, USA, pp. 306.
- Tél T., Gruiz M., 2002: *Kaotikus dinamika*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest.
- Temperton, C., 1987: Implicit Normal Mode Initialization. *Monthly Weather Review* 116, 1013–1031.
- Tiedtke, M., 1989: A comprehensive mass flux scheme for cumulus parameterization in large-scale models. *Monthly Weather Review* 117, 1779–1800.
- Toth, Z., Kalnay, E., 1997: Ensemble forecasting at NCEP and the breeding method. *Monthly Weather Review* 125, 3297–3319.

- Trenberth, K.E., Fasullo, J.T., Kiehl, J., 2009: Earth's global energy budget. *Bulletin of the American Meteorological Society* 90, 311–324.
- Uppala, S. M., KÅllberg, P. W., Simmons, A. J., Andrae, U., Da Costa Bechtold, V., Fiorino, M., Gibson, J.K., Haseler, J., Hernandez, A., Kelly, G.A., Li, X., Onogi, K., Saarinen, S., Sokka, N., Allan, R.P., Andersson, E., Arpe, K., Balmaseda, M.A., Beljaars, A.C.M., Van De Berg, L.; Bidlot, J., Bormann, N., Caires, S., Chevallier, F., Dethof, A., Dragosavac, M., Fisher, M., Fuentes, M., Hagemann, S., Hólm, E., Hoskins, B.J., Isaksen, L., Janssen, P.A.E.M., Jenne, R., McNally, A.P., Mahfouf, J.-F., Morcrette, J.-J., Rayner, N.A., Saunders, R.W., Simon, P., Sterl, A., Trenberth, K.E., Untch, A., Vasiljevic, D., Viterbo, P., Woollen, J., 2005: The ERA-40 re-analysis. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 131, 2961–3012.
- van der Linden, P., J.F.B. Mitchell (eds.), 2009: ENSEMBLES: Climate Change and its Impacts: Summary of research and results from the ENSEMBLES project. Met Office Hadley Centre, Exeter, UK.
- Vreugdenhil, C.B., 1994: Numerical methods for shallow water flow. Kluwer Academic Publishers, Boston, USA, pp. 261.
- Wagner, T.M., Graf, H.-F., 2010: An Ensemble Cumulus Convection Parameterization with Explicit Cloud Treatment. *Journal of the Atmospheric Sciences* 67, 3854–3869.
- Xue, L, Teller, A., Rasmussen, R., Geresdi, I., Pan, Z., 2012: Effects of solubility and regenerated aerosols on warm-phase orographic clouds and precipitation simulated by a detailed bin microphysical scheme coupled with WRF. *Journal of the Atmospheric Sciences* 67, 3336–3354.