

METEOROLÓGIAI ADATASSZIMILÁCIÓ

Böloni Gergely

Országos Meteorológiai Szolgálat
1024 Budapest, Kitaibel Pál utca 1., e-mail: boloni.g@met.hu

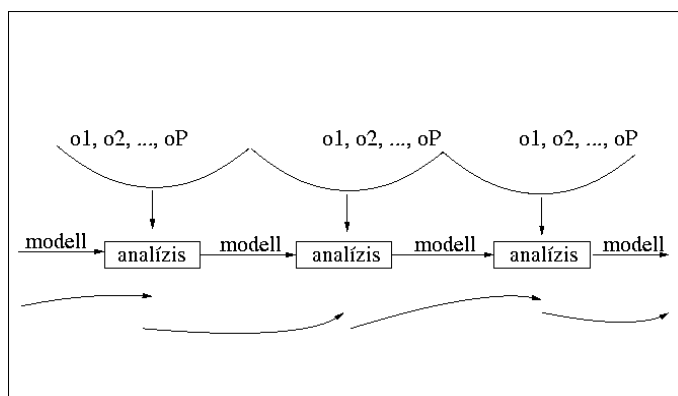
Összefoglalás – A meteorológiai adatasszimiláció a numerikus időjárás előrejelzés egy fontos részfeladata, mely a numerikus modellek kezdeti feltételeinek előállítását tűzi ki célul. Cikkünkben egy általános áttekintést kívánunk adni a meteorológiai adatasszimiláció lényegéről, alkalmazott módszereiről, valamint az adatasszimilációval kapcsolatos, gyakorlatban felmerülő, további kérdésekről. A bevezetésben megfogalmazzuk az adatasszimiláció célját, jelentőségét és nehézségeit, majd a további fejezetekben a korábban és a mai gyakorlatban használt adatasszimilációs módszerek bemutatására térünk át. Ismertetjük, valamint összehasonlítjuk az optimális interpoláció (OI) valamint a három-, illetve négydimenziós variációs analízis (3D-VAR, 4D-VAR) módszereket, majd kitekintést adunk néhány további adatasszimilációs módszer lényegéről (3D-FGAT, Kálmán-szűrő, Nudging). A módszerek általános bemutatása után, az OI és a 3D-VAR eljárás gyakorlati alkalmazására mutatunk példát, az Országos Meteorológiai Szolgálatnál (OMSZ) futtatott ALADIN modell segítségével, végezetül néhány mondatban vázoljuk a meteorológiai adatasszimiláció jövőbeli kihívásait, főbb fejlesztési irányait.

Bevezetés

A numerikus időjárás előrejelzés egy fontos gyakorlati problémája a kezdeti feltételek meghatározása az előrejelző modell számára. A cél egy a modell geometriájához illeszkedő mező létrehozása, amely valamennyi rendelkezésünkre álló információt tartalmazza a légkör adott állapotáról. A rendelkezésre álló légköri megfigyelések általában véve megbízhatóan tükrözik a valós légkör állapotát, azonban számuk, még az új mérési technikák megjelenésével sem közelíti meg a modell állapot-terének dimenzióját. A megfigyelési hálózathoz nyert információkat az úgynevezett háttér mező egészíti ki, amely, általában egy az előrejelző modell által készített rövidtávú előrejelzés, de lehet akár a modell-rácsra interpolált klimatológiai mező is. A légköri megfigyelések és a háttér mező együttesén kívül, fontos információnak tekintendő a légkörre jellemző dinamikai egyensúlyi folyamatok ismerete, amelyek figyelembevételével a kezdeti mező és a modell dinamikai konzisztenciáját erősíti. További fontos információt jelenthet a megfigyelések és a háttér mező megbízhatósága is, melyek figyelembevételére a modern adatasszimilációs technikák igen nagy hangsúlyt fektetnek, tekintettel arra a tényre, hogy az említett információk mindenképpen hibával terheltek. Az itt, általánosan felsorolt rendelkezésre álló információhalmazt az egyes adatasszimilációs eljárások más és más módszerrel, megközelítéssel dolgozzák fel. A cél, hogy az elkészített kezdeti mező minél kisebb hibával terhelten legyen a belőle induló numerikus előrejelzés szempontjából. A kezdeti mező ilyen típusú (imént megfogalmazott) pontossága nagyon fontos, tekintettel a légköri folyamatok kaotikus viselkedésére, vagyis a kezdeti feltételekre való nagyfokú érzékenységre.

Az objektív analízis és az adatasszimilációs ciklus

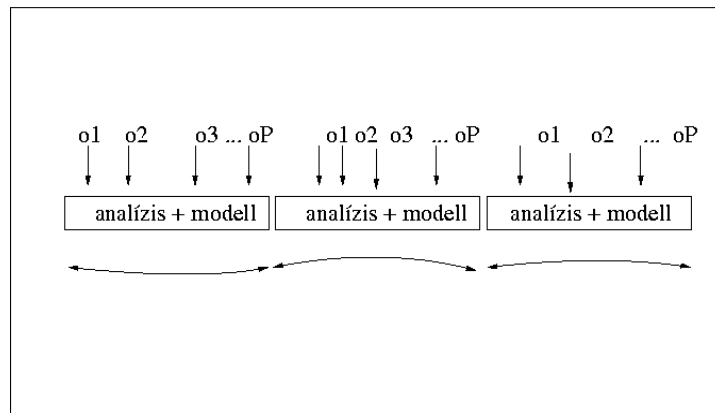
Az objektív analízis fogalma, a numerikus modellezés kezdetei óta létezik. E fogalom eredetileg a szabálytalan megfigyelési hálózatból származó információk egy szabályos rácson, objektív módszerrel való előállítását jelentette. Később, a háttér mező, illetve a már korábban említett, más típusú információk megjelenésével, az objektív analízis fogalma is bővült, a hangsúly azonban mindenképpen azon van, hogy az analízis mező előállítása a szabályos rácson automatikusan, közvetlen emberi beavatkozás nélkül történik. Ilyen típusú módszerek megalkotása a numerikus előrejelzés megjelenésével és fejlődésével elengedhetlenné vált, hiszen számítógépekre csak automatikusan elvégezhető műveletek bízhatók. Az egyre többféle felhasználható információ megjelenése, egyre bonyolultabb objektív analízis technikák – átfogó néven adatasszimilációs módszerek – kidolgozásához vezetett és vezet napjainkban is. A következő fejezetben olvashatunk a ma leggyakrabban használt adatasszimilációs módszerekről, most azonban egy másik fontos alapfogalom, az adatasszimilációs ciklus magyarázatára térünk rá. Az adatasszimilációs ciklus az időben egymás után következő objektív analízisek sorozatát jelenti, melyekhez a háttér mezőt mindig az előző analízisből kiinduló numerikus előrejelzéssel nyerjük (1. ábra). Az adatasszimilációs ciklikus a gyakorlatban, természetes módon adódik. Azon kívül, hogy a háttér mező az előző analízisből – a prognosztikai egyenleteken keresztül – egyértelműen adott, fontos például, hogy a ciklusban, a numerikus előrejelzéseken keresztül az adatokban gazdag területekről értékes információ terjedhet az adatokban szegény területekre is. Ez fontos, hiszen a mérőhálózat korántsem egyenletes térbeli eloszlású. A megfigyelések jellemzően nem egyenletes időbeli eloszlása szintén sugallja az objektív analízisek ciklusba szervezését, bár az új, távérzékelésen alapuló mérési technikák, a megfigyelések egyre egyenletesebb időbeli eloszlását teszik lehetővé. A légköri megfigyelések időbeli figyelembevétele kapcsán, beszélhetünk szakaszos, illetve folytonos adatasszimilációs ciklusokról (1. és 2. ábra).



1. ábra. A szakaszos adatasszimilációs ciklus sematikus ábrája, o_1, \dots, o_P az adott analízisben használt megfigyelések.

A szakaszos adatasszimilációs ciklus lényege, hogy a megfigyeléseket, időintervallumokba csoportosítjuk, amelyek „közepén” az objektív analízisek időpontjai állnak. Az intervallumon belül eső megfigyeléseket mind az objektív analízis

időpontjára vonatkoztatjuk és a szintén erre az időpontra érvényes numerikus előrejelzést (háttér mezőt) korrigáljuk velük.



2. ábra. A folytonos adatasszimilációs ciklus sematikus ábrája, o_1, \dots, o_P az adott analízisben használt megfigyelések.

A folytonos adatasszimilációs ciklus esetében a megfigyeléseket a megfigyelés tényleges időpontjában vesszük figyelembe és a háttér mező helyett a modell teljes időbeli trajektóriáját igazítjuk a megfigyelésekhez. A folytonos adatasszimiláció előnye nyilvánvaló a szakasszal szemben, viszont a gyakorlati megvalósítása is sokkal költségesebb. Fontos megjegyezni, hogy az adatasszimilációs ciklus – az objektív analízisen és a numerikus előrejelzésen kívül – általában további két, általunk nem tárgyalt ám nagyon fontos lépést is magában foglal. A ciklusban minden egyes analízist a megfigyelések minőségellenőrzése és minden előrejelzést a kezdeti feltételek ún. inicializációja előzi meg (Daley, 1991). Bár technikailag teljesen különböző eljárásokról van szó, lényegében mind az adatok minőségellenőrzése, mind az inicializáció a kezdeti mező és a modell dinamikai konzisztenciáját segíti elő, az előbbi a háttér mezőtől túlságosan eltérő megfigyelések elvetésével, az utóbbi pedig a modell által nem-, vagy rosszul leírható nagyfrekvenciájú hullámok analízisből való kiszűrésével.

Néhány adatasszimilációs módszer alapelveinek bemutatása

Ebben a szakaszban, a napjainkban használatos legfontosabb adatasszimilációs módszerek alapelveit tekintjük át. Célunk egy átfogó kép alkotása az egyes eljárásokról, ezért lehetőség szerint megpróbáljuk minél tömörebben összefoglalni azok lényegét. A későbbi magyarázatokat elősegítendő, fogalmazzuk meg az adatasszimiláció feladatát a következő terminológiával: a cél az \mathbf{x}_t (valós meteorológiai mező) becslése az \mathbf{x}_a (objektív analízis) segítségével a légkör adott tartományában. Jelöljük a háttér mezőt \mathbf{x}_b -vel és a megfigyelések által kifizített mezőt \mathbf{y} -nal. Képzeld el \mathbf{x}_t -t, \mathbf{x}_a -t és \mathbf{x}_b -t N dimenziós vektorokként, ahol N a modell rácspontjainak száma szorozva a becsült meteorológiai változók számával. Ugyanígy \mathbf{y} -t képzeld el egy P dimenziós vektorként, ahol P a rendelkezésre álló megfigyelések száma. Definiáljunk egy \mathbf{H} ún. megfigyelési operátort, amely a modell rácspont-teréből (\mathbf{x}_a v. \mathbf{x}_b) a megfigyelések által kifizített térbe (\mathbf{y}) képez. Emlékezzünk, hogy \mathbf{x}_a , az \mathbf{x}_b és a $\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{y})$ vektorok valamilyen

kombinációjaként áll elő, továbbá nevezzük az $\mathbf{y} - \mathbf{H}(\mathbf{x}_b)$ különbséget innovációs vektornak (ez is nyilván P dimenziós).

Optimális interpoláció (OI)

Az optimális interpoláció meteorológiai adatasszimilációban való alkalmazása Eliassen és Gandin nevéhez fűződik (*Gandin, 1963*). Az eljárás, amint azt látni fogjuk, a legkisebb négyzetes lineáris statisztikai becslések közé tartozik. A feladat itt az alábbi egyenlet megoldása a modell minden egyes rácspontjában.

$$\mathbf{x}_{a_j} = \mathbf{x}_{b_j} + \sum_{i=1}^p w_{ij} (\mathbf{y}_i - \mathbf{H}(\mathbf{x}_b)_i) . \quad (1)$$

Az egyenletben a j ($j=1, \dots, N$) index az adott (j -edik) rácspontot reprezentálja, az i ($i = 1, \dots, p, p < P$) index pedig a j -edik rácspont egy bizonyos környezetében levő megfigyeléseket (lásd az 3. ábrát is). A $\mathbf{H}(\mathbf{x}_b)_i$ jelentése, az i -edik megfigyelési pontban a háttér mező értéke, melyet a megfigyelés környezetében levő rácspontok értékeinek a \mathbf{H} megfigyelési operátor felhasználásával történő interpolációjával nyerünk. A w_{ij} együtthatók szerepe az i -edik pontbeli innováció \mathbf{x}_{a_j} -hoz való hozzájárulásának súlyozásában áll. Az OI módszer lényege, hogy a w_{ij} súlyokat olyan módon választjuk meg, hogy az (1) becslésünk (objektív analízisünk), annak négyzetes hibája szempontjából a legkedvezőbb legyen, tehát teljesüljön, hogy

$$E \left[(\mathbf{x}_{t_j} - \mathbf{x}_{a_j})^2 \right] = \min_{w_{ij}} , \quad (2)$$

ahol $E[]$ a várható értéket jelöli. További elvárásunk, hogy az objektív analízisünk ne rendelkezzen szisztematikus hibával, tehát teljesüljön (3).

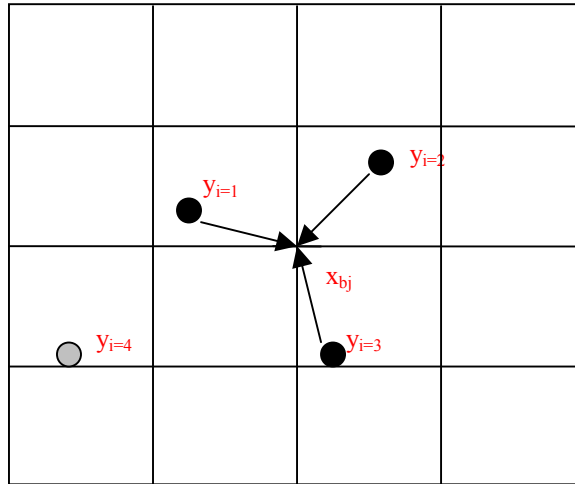
$$E \left[\mathbf{x}_{t_j} - \mathbf{x}_{a_j} \right] = 0 . \quad (3)$$

Az (1) egyenletet (2)-be írva, és azt minimalizálva (3) feltétellel, a w_{ij} együtthatók egyértelműen adódnak és visszaírva őket (1)-be a BLUE (*Best Linear Unbiased Estimation*) becslést kapjuk (*Bouttier és Courtier, 1999*). Megmutatható, hogy a w_{ij} együtthatók nem mások, mint a háttérhibák ($\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_b$) és megfigyelési hibák ($\mathbf{y} - \mathbf{H}(\mathbf{x}_t)$) térbeli kovarianciái. Megjegyezzük, hogy a w_{ij} súlyok meghatározásakor az OI további két alapfeltevését kell kihasználnunk:

- $E[\mathbf{y} - \mathbf{H}(\mathbf{x}_t)]$ és $E[\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_t] = 0$, tehát a megfigyelések és a háttér mező szisztematikus hibával nem rendelkeznek,
- $\mathbf{x} \sim \mathbf{x}_b$ esetén, $\mathbf{H}(\mathbf{x}_b) - \mathbf{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{H}(\mathbf{x}_b - \mathbf{x})$, tehát a \mathbf{H} megfigyelési operátor lineáris.

Az (1) egyenlet megoldása tovább egyszerűsödik, ha feltesszük (a gyakorlatban mindig feltesszük), hogy:

- $E \left[(\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_t) (\mathbf{y} - \mathbf{H}(\mathbf{x}_t)) \right] = 0$, tehát a megfigyelési és a háttér mező hibái kölcsönösen korrelálatlanok.



3. ábra. A modell szabályos rácsa és a szabálytalan megfigyelési hálózat.

Az OI módszer további fontos feltételezése, hogy az adott pontbeli analízisre csak annak környezetében lévő néhány megfigyelés fejt ki hatást (a fentiekben is így kezeltük az interpolációs feladatot). Ez a feltételezés engedi meg, hogy az objektív analízist minden egyes rácspontra, külön-külön lokálisan végezzük el. Azon i megfigyelések kiválasztása, amelyek hatást gyakorolnak a j -edik rácspontra, az alapján történik, hogy a w_{ij} együttható (kovariancia) milyen nagyságúnak adódik. Ha w_{ij} kisebbnek adódik egy bizonyos határértéknél, az adott i -edik megfigyelés hatását elhanyagolhatónak tekintjük. Megjegyezzük, hogy a legelső objektív analízis módszerek tulajdonképpen csak a w_{ij} súlyok meghatározásában különböztek a fent vázolt OI módszertől. A Cressman analízis például a súlyokat az inverz távolsággal arányosan definiálja, és egy önkényesen megválasztott távolságon belül választja ki az adott pontbeli analízishez hozzájáruló innovációkat (Cressman, 1959).

Variációs módszerek

Az adatasszimiláció feladata variációs problémaként is felfogható. Ebben a megközelítésben, \mathbf{x}_t legjobb becslése a (4) skalárfüggvényt, az ún. J veszteségfüggvényt minimalizálja (Lorenz, 1986).

$$J(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b)^T \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b) + \frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{H}(\mathbf{x}))^T \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{H}(\mathbf{x})) + J_c(\mathbf{x}) \quad (4)$$

és

$$J(\mathbf{x}_a) = \min .$$

A (4) egyenletben, \mathbf{x} szintén N dimenziós vektor, az ún. kontroll változó, \mathbf{B} $N \times N$ -es és \mathbf{R} $P \times P$ -s kovariancia mátrixok, \mathbf{H} pedig a nemlineáris megfigyelési operátor. A \mathbf{B} mátrix a háttér mező, az \mathbf{R} mátrix pedig a megfigyelések kovariancia mátrixa, melyeket előzetes becslés alapján kapunk. A kovariancia mátrixok becslése (modellezése) a korszerű adatasszimiláció egy igen fontos részterülete, melyen sok múlik az analízis

sikerességét illetően (lásd később). A (4) egyenlet jobb oldalán az összeg első és második tagját háttér (J_b : *background term*) illetve megfigyelési tagnak (J_o : *observation term*) szokás nevezni, a J_c pedig, az úgynevezett kényszer tag ($J = J_b + J_o + J_c$). Szemléletesen, a háttér tag a kontroll változó és a háttér mező távolságát méri, melyet a háttér mező megbízhatóságával (\mathbf{B}^{-1}) súlyozunk. Hasonlóan, a megfigyelési tag a kontroll változó és a megfigyelések távolságát méri, amit a megfigyelések megbízhatóságával (\mathbf{R}^{-1}) súlyozunk. A J_c kényszer tag dinamikai és fizikai kényszereket ír le a kontroll változóra vonatkozólag. A veszteségfüggvény minimalizálása szemléletesen az analízis (\mathbf{x}_a) háttér mezőtől és a megfigyelésektől vett távolságának minimalizálásaként magyarázható, figyelembe véve azok statisztikai megbízhatóságát, valamint további dinamikai és fizikai kényszereket. Megmutatható, hogy a veszteségfüggvény minimumában az analízis felírható a következő alakban:

$$\mathbf{x}_a = \mathbf{x}_b + \mathbf{K}(\mathbf{y} - \mathbf{H}(\mathbf{x}_b)) , \quad (5)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{B}\mathbf{H}^T (\mathbf{H}\mathbf{B}\mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1} , \quad (6)$$

ahol \mathbf{K} mátrix az ún. súly mátrix (*gain matrix*). Megjegyezzük, hogy az (5) és (6) összefüggések a (4) egyenletből vezethetők le abban az idealizált esetben, ha $\nabla J(\mathbf{x}_a) = 0$ pontosan, valamint, ha $\mathbf{H} = \mathbf{H}$ azaz, ha a megfigyelési operátor lineáris (*Bouttier és Courtier, 1999*).

Fontos, hogy az (5) és (6) egyenletek megfelelnek az előző részben vázolt, BLUE becslés mátrix alakban való felírásának és a \mathbf{K} mátrix nem más, mint az (1) egyenletből, a BLUE becsléssel kapott w_{ij} együtthatók mátrixa. Ez azt jelenti, hogy a két meglehetősen különböző megközelítés, a legkisebb négyzetes lineáris becslés és a variációs megközelítés, ugyanarra az eredményre vezetnek. Ez a megállapítás azonban, mint említettük, csak speciális esetben igaz. A két megközelítés, így az Optimális Interpoláció és a variációs módszerek között a legfontosabb különbség, hogy az Optimális Interpoláció esetében a \mathbf{H} megfigyelési operátor kötelezően lineáris (mátrix), mivel \mathbf{K} -t magát is mátrix alakban keressük. A variációs megközelítés nem követel meg semmilyen kitétel a \mathbf{H} operátor alakjára vonatkozólag. Ennek a különbségnek igen fontos gyakorlati jelentősége van, mivel az új mérési technikák esetében (pl. műholdas és radar mérések), a ténylegesen megfigyelt mennyiség általában nemlineáris kapcsolatban áll az asszimilálni kívánt meteorológiai változóval. Tipikus példaként említhető itt a műholdas adatok asszimilációja, amikor is a megfigyelt sugárzási értékek és a modell változók közötti kapcsolatot a nem lineáris sugárzás átviteli egyenleten keresztül vesszük figyelembe. Megjegyezzük, hogy az új mérési technikák megjelenésével pont a tetszőleges megfigyelési operátor használatának lehetősége volt a fő motiváció a variációs megközelítés adatasszimilációban történő alkalmazására – a variációs eljárások gyakorlati megvalósítására. Az Optimális Interpoláció és a variációs módszerek között további fontos különbség állapítható meg az analízis előállítására vonatkozólag. Az Optimális Interpoláció során az (5) – (6) egyenleteket rácspontként oldjuk meg, a rácspont környezetében lévő megfigyelések figyelembevételével. A variációs módszerek viszont egységesen kezelik a teljes \mathbf{x} állapotteret és az \mathbf{y} megfigyeléseket. A veszteségfüggvény minimalizálásán keresztül jutunk el az \mathbf{x}_a analíziséhez. Úgy is fogalmazhatunk, hogy az OI esetében egymástól független részletekből állítjuk össze az analízis mezőt, míg a variációs technika esetében az egész

\mathbf{x}_a mezőtől egységesen várjuk el a veszteségfüggvény minimalizálását. Ennek a megközelítésbeli különbségnek a jelentősége vitatható, hiszen a variációs módszerekben is nyilván az egymáshoz közeli térbeli pontok hatnak jobban egymásra a \mathbf{B} és az \mathbf{R} kovariancia mátrixokon keresztül. Azt is megállapíthatjuk azonban, hogy az egymástól távoli térbeli pontok közötti konzisztencia nagyobb eséllyel teljesül, ha az egész mezőt egyszerre és egységesen kezeljük.

A gyakorlatban, a variációs módszerek háromdimenziós (3D-VAR), illetve négydimenziós (4D-VAR) változatait különböztetjük meg. Ez a megkülönböztetés a megfigyelések és a háttér mező figyelembevételének időbeliségére utal az analízis elkészítése során. Míg a 3D-VAR szakaszos, a 4D-VAR folytonos adatasszimilációs módszer, tehát amíg a 3D-VAR egy adott időpontot leíró modell mező erre az időpontra aktualizált megfigyelésekkel való korrekcióját jelenti, addig a 4D-VAR során a modell trajektóriát igazítjuk a megfigyelésekhez (1. és 2. ábra). A (4) veszteségfüggvényt tekintve a 4D-VAR módszer lényege a következőképpen fogalmazható meg. Az \mathbf{x} kontroll változó és az \mathbf{x}_b háttér, itt nem adott időpontbeli meteorológiai mezők, hanem a meteorológiai állapotváltozók időbeli trajektóriái, melyeket az \mathbf{M} előrejelző modellel kapunk (\mathbf{M} maga a használt előrejelző modell operátora, azaz $\mathbf{x}(t + 1) = \mathbf{M}(\mathbf{x}(t))$). A \mathbf{H} megfigyelési operátor a 4D-VAR esetében magába foglalja az \mathbf{M} modell operátort is, ilyen módon lehetővé téve az $(\mathbf{y} - \mathbf{H}(\mathbf{x}))$ innovációs vektor realisabb (négydimenziós) számítását.

A variációs technika gyakorlati alkalmazásának sarkalatos pontja a veszteségfüggvény minimumának számítása. Erre a célra iteratív módszerek használatosak, melyek a veszteségfüggvény értéke, valamint gradiense alapján keresik a minimumot. Az iteráció szíve a minimalizáló algoritmus

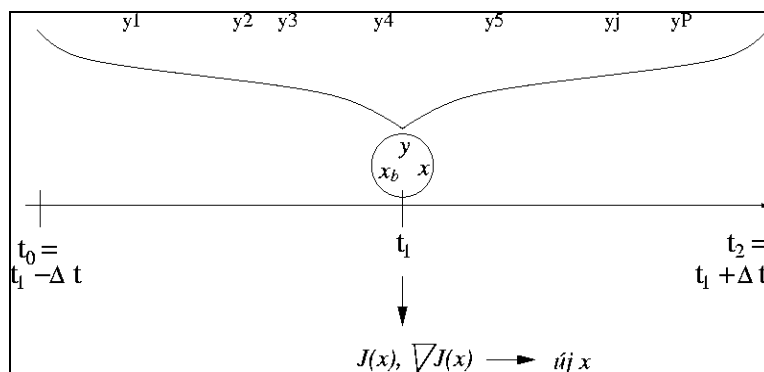
$$J(\mathbf{x}), \quad \nabla J(\mathbf{x}) \longrightarrow \mathbf{x},$$

amely a veszteségfüggvény értéke és gradiense ismeretében a kontroll változó újabb értékét határozza meg, ami várhatóan a minimum irányába mozdítja el a veszteségfüggvényt. A minimalizáló algoritmusok fejlesztésével a matematika, pontosabban a numerikus analízis egy fejlődő részterülete az operációkutatás foglalkozik; így a meteorológiai alkalmazásokban már kész szoftverekre támaszkodhatunk (ezek általában az ún. steepest descent, quasi-Newton (Gilbert és Lemaréchal, 1989) vagy a konjugált gradiens módszerek megvalósításai). Nyilvánvalóan, minden iterációs lépésben szükség van a veszteségfüggvény értékére és gradiensére, tehát általánosságban egy iterációs lépés a következők két műveletből áll:

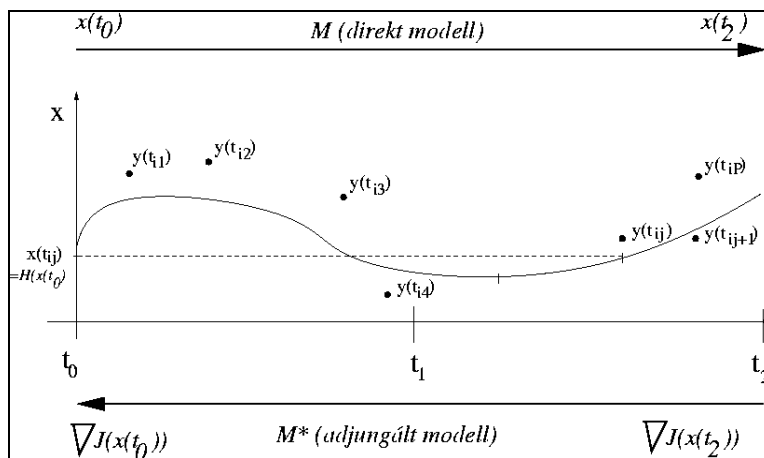
1. $J(\mathbf{x})$ és $\nabla J(\mathbf{x})$ számítása,
2. újabb \mathbf{x} keresése,

A fenti két lépés egészen addig ismétlődik, amíg $\nabla J(\mathbf{x})$ közel nullává válik, vagy két egymást követő lépésben $J(\mathbf{x})$ változása egy küszöbszám alá nem süllyed. A minimalizálás a háttér mezőből indul ki, tehát kezdetben $J_b(\mathbf{x}) = 0$ és $J_o(\mathbf{x})$ maximális. Az iterációk során $J_b(\mathbf{x})$ értéke nő, míg $J_o(\mathbf{x})$ csökken. A 3D- és 4D-VAR módszerekben az iteráció első lépése, tehát a veszteségfüggvény és a gradiens számítás meglehetősen különböző. A 3D-VAR esetében egyszerű a helyzet (4. ábra). Legyen t_1 az analízis időpontja. Ekkor a minimalizálás az $\mathbf{x}_b(t_1)$ háttér mezőből indul, a $t_1 \pm \Delta t$ intervallumon belüli megfigyeléseket szintén t_1 időpontra vonatkoztatjuk. A minimalizálás során az új

x kontroll változó is mindig t_1 időpontra vonatkozik, míg meg nem kapjuk $x_a(t_1)$ -et a minimumban. A 4D-VAR esetében a helyzet valamelyest bonyolultabb (5. ábra). Legyen továbbra is t_1 az analízisünk időpontja, legyenek $t_0 = t_1 - \Delta t$ és $t_2 = t_1 + \Delta t$, továbbá jelöljük a $[t_0, t_2]$ intervallumon belüli t_{i1}, \dots, t_{iP} időpillanatokban tett megfigyeléseket $y(t_{i1}), \dots, y(t_{iP})$ -vel. A kontroll változó itt az $x[t_0, t_2]$ trajektória lesz, mely egyértelműen meghatározott $x(t_0)$ és az M direkt modell által ($x(t_2) = M(x(t_0))$) tekintettel arra, hogy a modell determinisztikus.



4. ábra. A 3D-VAR sematikus ábrája.



5. ábra. A 4D-VAR sematikus ábrája.

A veszteségfüggvény értékéhez, a $[t_0, t_2]$ asszimilációs ablakon belüli $y(t_{ij})$ megfigyelések mind, külön-külön hozzájárulnak a J_0 tag ($y(t_{ij}) - x(t_{ij})$) innovációin keresztül, ahol a háttér mező t_{ij} -beli értékeit ($x(t_{ij})$) az M direkt numerikus modellel nyerjük, melyet a direkt H operátor magában foglal ($x(t_{ij}) = H(x(t_0))$). Az M direkt numerikus integrálással t_2 -be érve megkapjuk $J(x(t_2))$ -t majd számítjuk a gradiensét $\nabla J(x(t_2))$ -t. A $\nabla J(x(t_0))$ gradiens számítása, mely a minimalizáló algoritmus bemenő paramétere, az M numerikus modell M^* ún. adjungált változatának segítségével számítható $\nabla J(x(t_2))$ -ből ($\nabla J(x(t_0)) = M^*(\nabla J(x(t_2)))$) (Théphaut és Courtier, 1985). A minimalizáló algoritmus $\nabla J(x(t_0))$ ismeretében, végül újabb $x(t_0)$ -t javasol, melyre az $M(x(t_0))$ által meghatározott $x[t_0, t_2]$ trajektória várhatóan kisebb J értékhez vezet. A veszteségfüggvényt

minimalizáló trajektória végül a lehető legjobban illeszkedik a megfigyelésekhez a $[t_0, t_2]$ intervallumon, megtartva a meteorológiai modell mezők globális dinamikai egyensúlyát.

Említésre méltó a variációs módszerek között az ún. 3D-FGAT (*FGAT: First Guess at Appropriate Time*), amely a 3-és 4D-VAR közötti kompromisszumként fogható fel. E kompromisszum lényege az adjungált modell futtatásának megspórolásában áll. A 3D-FGAT egyértelműen háromdimenziós analízis technika, mely a 3D-VAR-tól annyiban különbözik, hogy a J_o számításakor az innovációs hozzájárulásokat a 4D-VAR-hoz hasonlóan számítjuk, tehát $y(t_{ij}) - x(t_{ij})$ innovációkat számolunk. Az $x(t_{ij})$ -ket, vagy a 4D-VAR-hoz hasonlóan a direkt modellel, vagy egyszerűbb esetben $x(t_1)$ időbeli interpolációjával nyerjük. Fontos azonban, hogy a veszteségfüggvényt $x(t_1)$ szerint minimalizáljuk, az adjungált modell futtatása nélkül. Ilyen módon a 3D-FGAT esetében a J_o innovációk hibája kisebb lesz mint a 3D-VAR esetében, azonban a 4D-VAR által adott optimális $x[t_0, t_2]$ trajektóriát nem kapjuk meg.

A hiba kovariancia mátrixok modellezése

Említettük, hogy mind az OI mind a variációs módszerek esetében a **B** és **R** hiba kovariancia mátrixokat előzetes becsléssel nyerjük. A hiba kovariancia mátrixok modellezése a korszerű adatasszimiláció egy fontos részterületévé nőtte ki magát, lévén, hogy a becslés minőségén sok múlik az analízis sikerességét illetően. A két mátrix közül, az **R** megfigyelési hiba kovariancia mátrix becslése egyszerűbb feladat (maga **R** alakja is jóval egyszerűbb mint a **B** mátrixé) mivel általánosságban feltételezzük, hogy:

- az egyes megfigyelések hibái térben korrelálatlanok (nem minden mérési technika esetén igaz, kivételt képeznek pl. a műholdas megfigyelések),
- az egyes meteorológiai változók megfigyelési hibái függetlenek egymástól (korrelálatlanok).

A fenti feltételezésekből következően az **R** mátrix általában diagonális és kizárólag az adott mérőműszerek hiba szórását tartalmazza. Nagyobb a hangsúly a **B** mátrix becslésén. A **B** mátrix alakja rendszerint meglehetősen bonyolult, mivel a háttérmező hibáját illetően jogosan tesszük fel, hogy az egyes térbeli pontok hibái valamilyen kapcsolatban állnak egymással, valamint az egyes meteorológiai változók hibái is szorosan összefüggenek. A **B** mátrixot tehát első közelítésben úgy képzelhetjük el, mint egy a modell összes rácspontja és az összes modellezett meteorológiai változó között kapcsolatot teremtő kovariancia mátrix. Egy ilyen kovariancia mátrix használata számos gyakorlati nehézségbe ütközne, ezért a **B** mátrix egyszerűsítése (diagonalizálása) érdekében, általában a következő feltételezéseket tesszük:

- horizontális homogenitás és izotrópia, azaz valamely horizontális korreláció csak a horizontális távolság függvénye (sem az iránytól sem az elhelyezkedéstől nem függ),
- a meteorológiai változók hibái közötti kapcsolat elhanyagolása. (Amennyiben az egyes meteorológiai változók között (hőmérséklet (T), felszíni nyomás (p_s), szél (u, v), specifikus nedvesség (q) kapcsolatot feltételezünk, akkor többváltozós analízisről (multivariate analysis), amennyiben egyes változókat függetlenítünk, egyváltozós (univariate) analízisről beszélünk.)

A fenti feltételezéseket nem mindig szigorú értelemben vesszük figyelembe. A háttérmező hibáinak realisabb figyelembevétele érdekében enyhíthetünk a megfogalmazott elméleti megszorításokon. Globális modellekben, illetve a nagy meridionális kiterjedésű korlátos tartományú modellekben, szokásos például a horizontális hiba kovarianciákat csak zonális irányban homogénnek, míg meridionális irányban változónak tekinteni. Napjaink adatasszimilációs eljárásai, általában valamilyen mértékben többváltozós formában működnek, csak egyes változókat kezelnek egyváltozósan (tipikusan a q).

A \mathbf{B} mátrix becslésének, azaz a kovariancia számítások előfeltétele a háttérmező hibájának (előrejelzési hiba) definíciója. A háttérmező hibáját elméletileg az $\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_t$ különbség definiálja, ezzel azonban az a probléma, hogy nem mérhető, hiszen \mathbf{x}_t -t nem ismerjük. Az $\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_t$ gyakorlatban történő becslésére a két napjainkban legelterjedtebb módszert, a Lönnberg-Hollingsworth (*Hollingsworth és Lönnberg, 1986*) (LH) és az NMC (*National Meteorological Center*) módszert (*Parrish és Derber, 1992*) mutatjuk be röviden.

Az LH módszer értelmében az előrejelzési hibákat a megfigyelésektől vett eltérések (az $\mathbf{y} - \mathbf{H}(\mathbf{x}_b)$ innovációk) alapján határozzuk meg. Az innovációk természetesen a megfigyelési és reprezentativitási vagy interpolációs hibát is tartalmazzák, tehát ezek statisztikai módszerrel különválasztandók (*Daley, 1991, vagy Hollingsworth és Lönnberg, 1986*).

Az NMC módszer egy adott időpontra különböző kezdeti feltételekből kiinduló előrejelzések különbségeként definiálja az előrejelzési hibát. E definíció előnye az LH módszerrel szemben, hogy az előrejelzési hibát készen kapjuk, valamint az, hogy a modell által leírt valamennyi térskálán jellemzi az előrejelzési hibát, ellentétben a LH módszerrel, ahol a jellemzett térskálák a megfigyelési hálózat sűrűsége által meghatározottak. A \mathbf{B} mátrix előállítását a definiált előrejelzési hibák gyűjtésével, majd az így előálló mintán történő kovariancia számítással valósul meg.

Kálmán-szűrő

A Kálmán-szűrő (v. Kálmán-Filter, a továbbiakban – KF) a korábban tárgyalt legkisebb négyzetes becslés általánosítása. Lényege az objektív analízis és a rövidtávú numerikus előrejelzés bizonytalanságának becslése az asszimilációs ciklusban. A KF analízist leíró alapegyenletek megegyeznek az (5) – (6) egyenletekkel, azonban a \mathbf{K} súlymátrixot az asszimilációs ciklus minden egyes lépésében újraszámítjuk. Ennek oka az, hogy a KF elméletben a \mathbf{B} mátrix nem egy időben állandó becslése a háttérmező hibájának (lásd az előző részt), hanem azt explicit módon jelezi előre az előző analízis hibája, valamint a modell hibák ismeretében. A KF alapelvének bemutatásához a következő jelölések bevezetése szükséges:

- Az analízis hibája alatt – a korábbi jelöléseket használva – az $\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_a$ különbséget értjük. Ennek kovariancia mátrixa legyen \mathbf{A} a továbbiakban. Az analízis hiba analízisről analízisre változik, tehát $\mathbf{A}(t)$ időfüggő.
- Modell hiba alatt a modell tökéletlenségéből adódó hibákat értjük és ezek kovariancia mátrixát jelöljük \mathbf{Q} -val. Feltesszük továbbá, hogy \mathbf{Q} időben állandó és ismert.
- Legyen \mathbf{M} a korábban bevezetett \mathbf{M} modell operátor linearizált változata, tehát $\mathbf{M}(\mathbf{x}) - \mathbf{M}(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) = -\mathbf{M}(d\mathbf{x})$.

A KF elmélet értelmében a \mathbf{B} mátrix előrejelzése a következő egyenlettel írható le:

$$\mathbf{B}(t+1) = \mathbf{M}\mathbf{A}(t)\mathbf{M}^T + \mathbf{Q} . \quad (7)$$

A KF alkalmazása az asszimilációs ciklus minden t időpontjában a következő műveletek elvégzését jelenti:

1. \mathbf{K} kiszámítása ($\mathbf{B}(t)$ előzetes előrejelzése alapján),
2. \mathbf{x}_a meghatározása,
3. $\mathbf{A}(t)$ kiszámítása,
4. $\mathbf{x}_b = \mathbf{x}_a(t+1) = \mathbf{M}(\mathbf{x}_a(t))$ előállítása,
5. $\mathbf{B}(t+1)$ kiszámítása ((7) alapján).

Megmutatható, hogy abban az esetben, ha $\mathbf{Q} = 0$ (azaz ha a numerikus modell tökéletes), a Kálmán-szűrő és a 4D-VAR eljárás, egy azonos számú lépésből álló asszimilációs ciklus végén, azonos \mathbf{x}_a eredményre vezet (*Bouttier és Courtier, 1999*). A Kálmán-szűrő eljárás a legkisebb négyzetes lineáris becsléshez hasonlóan lineáris megfigyelési (\mathbf{H}) és modell (\mathbf{M}) operátort feltételez. Az ún. kiterjesztett Kálmán-szűrő (extended Kalman-Filter) a KF elmélet általánosítása, amely nem tesz megkövetéseket \mathbf{H} -ra és \mathbf{M} -re.

Nudging

A Nudging egy viszonylag egyszerű ötleten alapuló technika, mely az eddig jellemzett módszerekhez képest teljesen más megközelítésben áll hozzá az adatasszimilációs feladathoz (*Davies és Turner, 1977*). Egy négydimenziós, folytonos adatasszimilációs technikáról van szó. Lényege az, hogy egy dinamikus relaxációs tag prognosztikai egyenletekbe történő bevezetésével a numerikus modellt a megfigyelésekhez kényszerítjük:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{M}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{G}(\mathbf{x}) \sum_{i=1}^P w_i (y_i - \mathbf{H}(\mathbf{x})_i) .$$

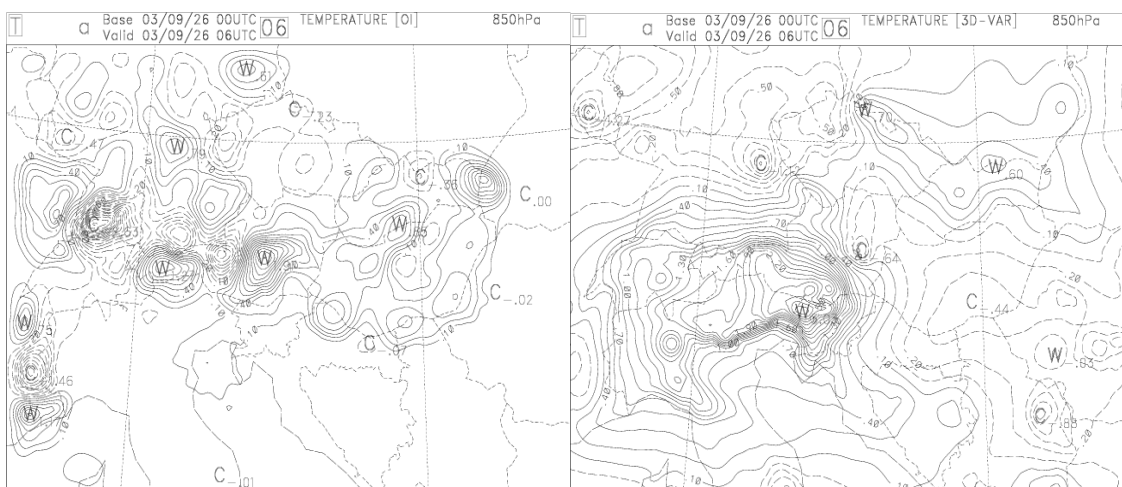
A fenti egyenlet jobboldalának második tagja az ún. nudging tag, ami az \mathbf{M} numerikus modellt a megfigyelésekhez közelíti. $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ az ún. nudging együttható, w_i az i -edik megfigyelés súlytényezője. A $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ nudging tagon keresztül súlyozhatjuk a megfigyelések hatását az \mathbf{M} modell által meghatározott trajektóriára, ami meteorológiai paraméterenként változhat. A nudging együttható empirikus megválasztásában az irányadó elv az, hogy a nudging hatása érezhetően nagy legyen, ugyanakkor a modell dinamikai egyensúlya se boruljon fel. A w_i súlytényezőket, az előzetesen becsült megfigyelési és modell hibák, a megfigyelés és az adott rácpont közötti távolság, valamint a megfigyelési és az analízis időpont között eltelt idő függvényében szokás megválasztani. A nudging technika előnye, hogy semmilyen kitévelt sem kell tennünk \mathbf{H} alakjára (lehet nemlineáris is), tehát az új mérési technikák jól asszimilálhatók. Folytonos adatasszimilációs módszer lévén, a technika további előnyeként említhető, hogy a megfigyeléseket valóban a megfigyelés időpontjában vehetjük figyelembe. Összehasonlítva a nudging

technikát, a fenti két előnyös tulajdonsággal szintén rendelkező 4D-VAR technikával, azt mondhatjuk, hogy számításigényét tekintve takarékosabb, azonban elméletben kevésbé megalapozott módszerről van szó. A nudging technika hátrányaként szokásos említeni, hogy a kapott kezdeti mező és a modell dinamikai konzisztenciája, általában kevésbé teljesül, mint például a variációs módszerek alkalmazása esetében.

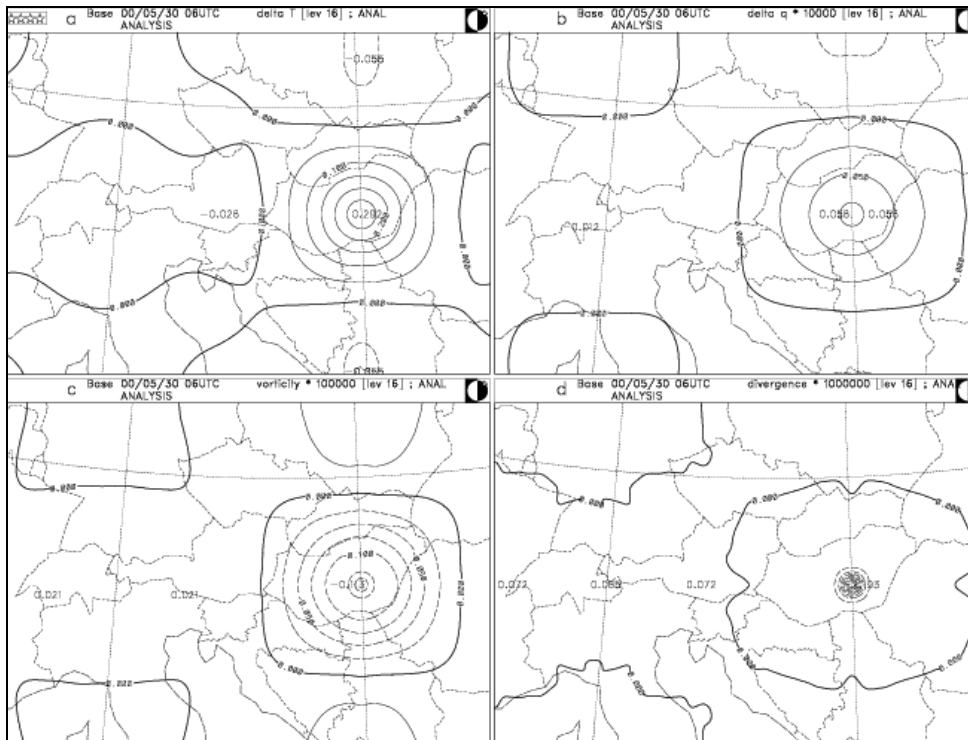
Adatasszimiláció a gyakorlatban

A dolgozat e részben az ALADIN modell eredményeire támaszkodva illusztráljuk a fent leírt elméleti áttekintést. Az ALADIN, egy az Országos Meteorológiai Szolgálatnál (OMSZ) futtatott korlátos tartományú numerikus modell, mely rövidtávú előrejelzések készítésére használatos (Horányi *et al.*, 1996). A kezdeti feltételek előállítására az ALADIN modellben jelenleg az OI és a 3D-VAR eljárás alkalmazható.

Első példaként egy a modell által előállított OI és 3D-VAR analízist mutatunk be, melyek ugyanazon időpontra, ugyanazon háttér mezők felhasználásával készültek. A 6. ábrán az analízisek és a hozzájuk tartozó háttér mezők különbsége látható ($\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b$, a korábbi jelölésekkel élve). Az $\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b$ mezőt analízis növekménynek (növekmény mezőnek) szokásos nevezni. Az analízis növekmény mező a megfigyelések analízisre kifejtett hatását mutatja meg, ezért bármely objektív analízis eljárás esetében tanulságos lehet a tanulmányozása. A 6. ábra alapján jól elkülöníthetők azok a területek, amelyek megfigyelésekben gazdagok voltak az analízis időpontjában és azok, ahonnan egyáltalán nem érkeztek jelentések a helyi adatbázisba. Látható, hogy a két különböző eljárás esetében a növekmények szerkezete meglehetősen különböző. Az OI növekmények lokálisabbak a 3D-VAR növekményeinél, ami valószínűleg az analízis rácspontonkénti megoldásából ered, de szerepe lehet a két eljárás különböző hiba kovariancia (\mathbf{B} mátrix) becslésének is. (Az OI a Lönnberg-Hollingsworth, a 3D-VAR az NMC becslést használja.) A növekmények különbözősége, valószínűleg a különböző felhasznált megfigyelési állományból is fakad, ugyanis a bemutatott OI analízisben csak felszíni (szinop), míg a 3D-VAR analízisben felszíni és magas-légköri (rádiószondás) megfigyeléseket használtunk fel.

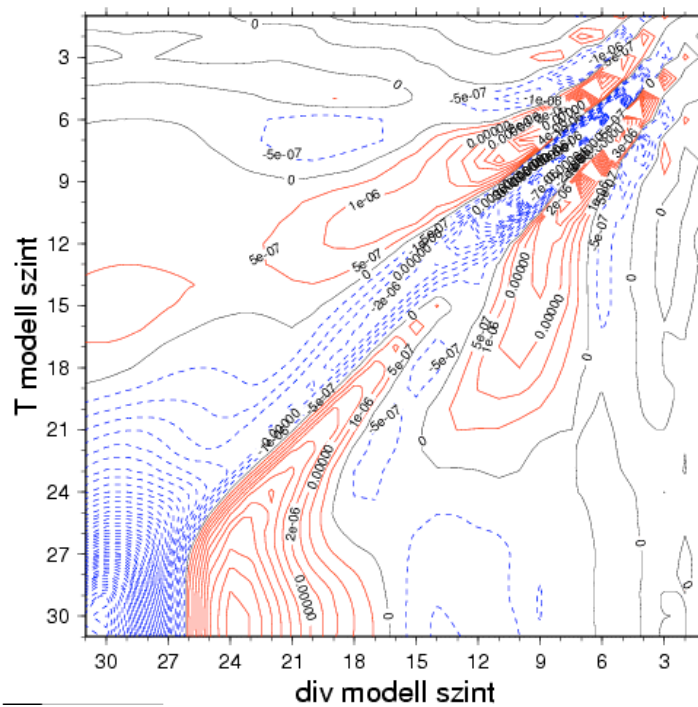


6. ábra. Hőmérséklet analízis növekmény mezők a 850hPa-os szinten.
Bal: ALADIN/OI, jobb: ALADIN/3D-VAR.



7. ábra. Egyetlen hőmérséklet megfigyelés hőmérséklet (bal, fent), örvényesség (bal, lent), divergencia (jobb, lent) és specifikus nedvesség (jobb, fent) analízis növekményei. (ALADIN/ 3D-VAR)

T-div vertikális kovarianciák

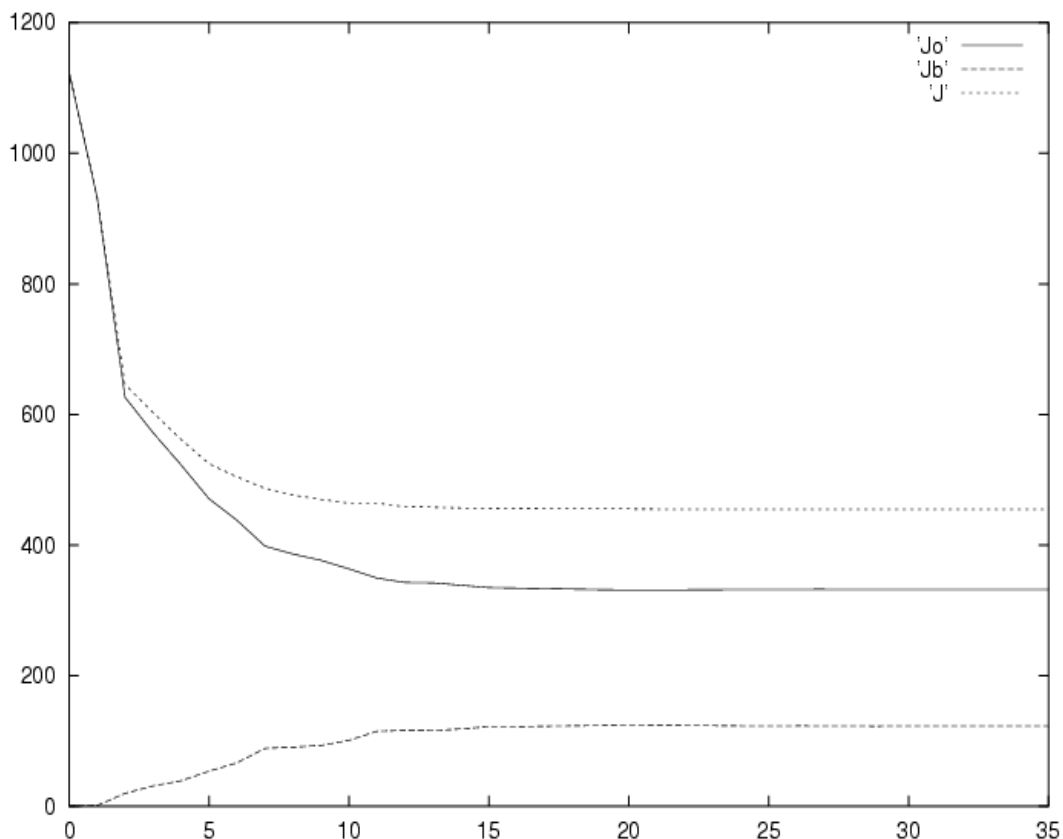


8. ábra. A hőmérséklet és a divergencia előrejelzési hibáinak vertikális kovariancia mátrixa.

A 7. és 8. ábrák segítségével az ALADIN modellben használt, **B** mátrixot jellemezzük röviden. A 7. ábrán a horizontális kovarianciák izotrópiáját mutatjuk be. Az ábrán egyetlen megfigyelés hatását láthatjuk, mely látványosan mutatja a **B** mátrix horizontális kovarianciáinak szerkezetét. Látható, hogy az analízis növekmények kiterjedése nagyjából kör alakú, amely az izotrópia bizonyítéka (az izotrópiától való eltérés az ALADIN modell spektrális reprezentációjából ered). A 7. ábra arról is tanúskodik, hogy az ALADIN modellben használt **B** mátrix többváltozós formulát ír le, hiszen már egyetlen hőmérséklet mérés hatást fejt ki az analízisben a többi modell változóra.

A 8. ábrán a **B** egy almátrixát ábrázoltuk. Ezen almátrix, a hőmérséklet és a divergencia előrejelzési hibáinak a vertikális kapcsolatát írja le (az ALADIN modellben nem a szél, hanem az örvényesség és a divergencia a kontroll változók). A meteorológiai változók közötti vertikális kovariancia mátrixok ábrázolása fontos diagnosztika, ugyanis e mátrixok szerkezete a modell dinamikájával, fizikájával és az abban rejlő hibákkal szoros összefüggésben áll.

Végezetül, a veszteségfüggvény minimalizálását illusztráljuk a 9. ábrán egy 3D-VAR futtatás során. Az ábrán jól látható (korábban már utaltunk erre), hogy a minimalizálás a kezdetén $J_b = 0$ és J_o maximális, azaz a minimalizálás a háttér mezőből indul ki. A minimalizálás során J_b nő és J_o csökken, míg J értéke minimális nem lesz.



9. ábra: A veszteségfüggvény értékek alakulása a minimalizálás során (ALADIN/3D-VAR).
 J_o : megfigyelési tag, J_b : háttér tag, $J = J_b + J_o$.

Adatasszimiláció mezo-skálán

E rövid szakaszban a mai meteorológiai adatasszimiláció fő célkitűzéseiről olvashatunk néhány sort. A számítástechnika fejlődésével a numerikus modellek felbontása is nő, egyre több nem-hidrosztatikus modell lát napvilágot, ami a néhány kilométeres térskálájú folyamatok explicit leírására is alkalmas. Az ilyen, nagy felbontású modellek értékes információval történő ellátása nagy kihívást jelent az adatasszimiláció tudománya számára.

- A fejlődés érdekében, létfontosságú a megfelelő térbeli sűrűségű megfigyelési adatok előállítása, ami a távérzékelési technikák meteorológiában való alkalmazásával válik lehetségessé és egyre pontosabbá. Megjegyezzük, hogy a hagyományos megfigyelési hálózat (rádiószondás megfigyelések) felbontása csak a globális és szinoptikus skálájú légköri folyamatok figyelembevételére alkalmas.
- Természetesen rendkívül fontos az is, hogy az új mérési technikákkal kapott adatokat figyelembe is tudjuk venni a numerikus modellekben. Ez elsődlegesen a megfigyelési operátorok (**H**) fejlesztését igényli. Minden egyes új technika új megfigyelési operátor kidolgozásával jár, mely az adott megfigyelt mennyiség (pl. sugárzás, reflektivitás) és a modell változók közötti, általában nem lineáris és bonyolult kapcsolatot hivatott leírni minél pontosabban.
- A nemlineáris megfigyelési operátor szükségessége meghatározza az alkalmazott adatasszimilációs technikát (variációs módszer vagy extended Kalman-Filter, Nudging), melyek gyakorlatba történő átültetése nem könnyű feladat.
- Az új mérési technikák a nagy térbeli felbontás mellett, nagy időbeli felbontású megfigyeléseket is lehetővé tesznek, melyek azonban csak a folytonos (négydimenziós) adatasszimilációs módszerek alkalmazásával aknázhatók csak ki hatékonyan.
- Az analízisben a **B** előrejelzési hiba mátrix határozza meg döntően a megfigyelések hatásának térbeli kiterjedését. Ebből következően, egy olyan asszimilációs rendszerben, amely lokális jelenségek figyelembevételét tűzi ki célul, fontos feladat a **B** mátrix modellezésének fejlesztése.
- Nagy felbontású modellek és sűrű térbeli megfigyelések használata esetén az inicializáció, az előrejelzés szempontjából értékes információkat is kiszűrhet a kezdeti mezőből. Ezt elkerülendő, az inicializációs módszerek is fejlesztésre, módosításra szorulnak.
- A korlátos tartományú modellekben (napjaink legtöbb igazán nagy felbontású modellje ilyen) az adatasszimilációs ciklus megtervezése fontos stratégiai feladat és a globális modellekkel összehasonlítva új kérdéseket vet fel:
 - Milyen peremfeltételeket használjunk a háttér mező előállításakor? (A meghajtó modell előrejelzését vagy analízisét, mely elvileg közelebb áll a valósághoz?)
 - Felhasználjuk-e a meghajtó modell analízisét a korlátos tartományú modell analízisének előállításakor? (Léteznek technikák, melyek a meteorológiai modell mezők térskálától függő keverését teszik lehetővé, ilyen módon megengedve, hogy a korlátos tartományú modellben csak a kis (ill. mezo) skálákat asszimiláljuk és az így kapott analízist mintegy összekeverjük a meghajtó modell nagy skálákon releváns analízisével.)

Összefoglalás

Cikkünkben megfogalmaztuk a meteorológiai adatasszimiláció célját és bemutattuk a numerikus modellek kezdeti feltételeinek előállításához felhasználható alapvető információ típusokat. Folytatásként ismertettük a kezdeti feltételek előállításakor szem előtt tartandó irányelveket és a numerikus modellek kezdeti feltételeivel szemben állított követelményeket. Az adatasszimiláció feladatának általános megfogalmazása után a napjainkban használatos legfontosabb adatasszimilációs (objektív analízis) módszereket mutattuk be, lehetőség szerint nem pusztán elméleti szempontból. A sort a legkisebb négyzetes lineáris becslés (OI) bemutatásával kezdtük, majd az egyre fejlettebb technikák tárgyalására térünk át, lehetőleg összehasonlítva az egyes eljárásokat. A variációs módszerek és a Kálmán-szűrő alapjainak bemutatása után egy egyszerű de gyakorlatban könnyen alkalmazható adatasszimilációs technika, a Nudging ismertetésével zártuk a sort. Az Objektív Analízis módszerek elméleti áttekintése után néhány szemléletes ábrát mutattunk be az ALADIN modellben implementált OI és 3D-VAR eljárások futtatási eredményeire támaszkodva, végül az adatasszimiláció legfontosabb aktuális kihívásairól fogalmaztunk meg néhány gondolatot.

Irodalom

- Bouttier, F. and Courtier, P., 1999: Data Assimilation concepts and methods. *ECMWF, Lecture Series, (Data assimilation and use of satellite data)*, 72 pp.
- Cressman, G., 1959: "An operational objective analysis system". *Mon. Wea. Rev.*, 87, 367-374.
- Daley, R., 1991: *Atmospheric Data Analysis*. Cambridge Atmospheric and Space Science Series, 457 pp.
- Davies, H. C. and Turner, R. E., 1977: Updating prediction models by dynamical relaxation: An examination of the technique. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 103, 225-245.
- Gandin, L., 1963: *Objective analysis of meteorological fields*. Leningrad, Gridrometeoizdat (angol fordítás: 1965).
- Gilbert, J. C. and Lemaréchal, C., 1989: Some numerical experiments with variable storage quasi-Newton algorithms. *Mathematical Programming*, B25, 407-435.
- Hollingsworth, A. and Lönnberg, P., 1986: The statistical structure of short-range forecast errors as determined from radiosonde data. Part I. The wind field. *Tellus*, 38A, 111-136.
- Horányi, A., Ihász, I. and Radnóti, G., 1996: ARPEGE/ALADIN: a numerical weather prediction model for Central-Europe with the participation of the Hungarian Meteorological Service. *Időjárás*, 100, 277-301.
- Lorenc, A.C., 1986: Analysis methods for numerical weather prediction. *Quart. J. R. Meteor. Soc.*, 114, 205-240.
- Parrish, D. F. and Derber, J. C., 1992: The National Meteorological Centre's spectral statistical interpolation system. *Mon. Wea. Rev.*, 1747-1763.
- Thépaut, J. N. and Courtier, P., 1991: Four dimensional variational data assimilation using the adjoint of a multilevel primitive equation model. *Quart. J. R. Meteor. Soc.*, 117 1225-1254.